

시작하는 대화

- 선생님 "1, 2, 3은 로마 숫자로 I, II, III이라고 씁니다."
학생 "덧셈은 쉽네요. I + II는 I을 세 개 나열하여 III으로 만들면 되니깐요."
선생님 "그렇지만 II + III은 IIII가 아니라 V랍니다."
학생 "아, 그런가요?"
선생님 "숫자가 커질수록 정리하는 데 약간의 수고가 필요하답니다."

1. 이 장에서 배울 내용

이 장에서는 0에 대해 배워봅니다.

우선 우리 인간이 사용하는 10진법과 컴퓨터가 사용하는 2진법에 대해 이야기해보겠습니다. 그런 다음 숫자 표기 기수법에 대해 설명하고 0이라는 것이 수행하는 역할에 대해 함께 생각해보도록 합니다. 0은 '아무것도 없음'이라는 것을 나타내는 것처럼 보이지만, 실제로는 패턴을 만들어 규칙을 간단하게 정리하는 막중한 구실을 하고 있습니다.

2. 초등학교 1학년의 추억

다음은 지금도 기억하는 초등학교 1학년 시절의 추억입니다.

"그러면 공책을 펴고 '십이'라고 쓰세요."라고 선생님이 말씀하셨습니다. 저는 새로 산 공책을 펴고 날카롭게 깎은 연필을 쥐고 숫자로 크게 다음과 같이 썼습니다.

102

선생님은 저에게 오셔서 공책을 보시더니 미소를 지으시며 이렇게 말씀하셨습니다.

"틀렸네요. 12라고 쓰는 겁니다."

어린 시절 저는 선생님이 '십이'라고 말씀하신 대로 '10(십)'과 '2(이)'를 썼습니다. 그러나 이렇게 쓰면 틀린 것이었습니다. 여러분도 잘 알듯이 '십이'는 12라고 표기하기 때문입니다.

그런데 로마 숫자에서는 '십이'를 XII라고 표기합니다. X는 10을 나타내고 I는 1을 나타냅니다. II는 I가 두 개이므로 2를 나타냅니다. 즉, XII는 십(X)과 이(II)를 나란히 표기한 것입니다.

'십이'라는 하나의 수를 12나 XII로 표기하듯이 숫자에는 다양한 표기법이 있습니다. 12라고 쓰는 것은 아라비아 숫자를 이용한 표기법이고 XII라고 쓰는 것은 로마 숫자를 이용한 표기법입니다. 어느 표기법을 쓰더라도 나타내고자 하는 '숫자 자체'는 다르지 않습니다. 그러면 지금부터 표기법을 몇 가지 소개해보도록 하겠습니다.

2.1 10진법

10진법에 대해 알아봅시다.

2.2 10진법이란?

우리는 보통 10진법을 사용합니다.

- 사용하는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 10종류입니다.
- 자릿수에 의미가 있으며 오른쪽으로부터 1의 자리, 10의 자리, 100의 자리, 1000의 자리라고 표현합니다.

이러한 약속은 초등학교 산수 시간에 배웠을 것입니다. 일상생활에서 쓰고 있으므로 모두 잘 알 것으로 생각합니다. 여기서는 복습을 겸하여 실례를 이용하여 10진법에 대해 설명하겠습니다.

2.3 2503의 분해

먼저 2503이라는 수를 예로 들어 생각해봅시다. 2503은 2, 5, 0, 3이라는 네 개의 숫자를 나열하여 2503이라는 하나의 숫자를 나타냅니다.



이렇게 나열한 숫자는 자릿수에 따라 의미가 달라집니다.

- 2는 '1000의 개수'를 나타냅니다.
- 5는 '100의 개수'를 나타냅니다.
- 0은 '10의 개수'를 나타냅니다.
- 3은 '1의 개수'를 나타냅니다.

즉, 2503이라는 수는 2개의 1000과 5개의 100, 0개의 10과 3개의 1을 더한 수를 표현하는 것입니다.

숫자와 말로만 설명해서는 재미가 없으므로 그림으로 나타내보겠습니다.

$$2 \times 1000 + 5 \times 100 + 0 \times 10 + 3 \times 1$$

이렇게 숫자에 크고 작음을 표현하니 각 자릿수의 숫자 2, 5, 0, 3이 등장하는 패턴을 잘 알 수 있습니다.

1000은 $10 \times 10 \times 10$, 즉 10^3 (10의 3승)이고 100은 10×10 , 즉 10^2 (10의 2승)이므로 다음과 같이 표현할 수도 있습니다. (화살표 부분에 주목해주세요.)

$$2 \times 10^{\uparrow 3} + 5 \times 10^{\uparrow 2} + 0 \times 10 + 3 \times 1$$

더불어 10은 10^1 (10의 1승), 1은 10^0 (10의 0승)이므로 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

1,000의 자리, 100의 자리, 10의 자리, 1의 자리는 각각 10^3 자리, 10^2 자리, 10^1 자리, 10^0 자리라고 표현해도 좋을 것입니다. 10진법의 자리는 모두 10^n 이라는 형태로 이루어집니다. 여기서 10을 10진법의 기수 또는 밑수라고 일컫습니다.

밑수 10의 오른쪽 위에 있는 수(지수)가 3, 2, 1, 0처럼 규칙적이라는 점을 기억해두기 바랍니다.

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

3. 2진법

다음은 2진법에 대해 알아보겠습니다.

3.1 2진법이란?

컴퓨터는 수를 다룰 때 2진법을 사용합니다. 10진법으로부터 유추해보면 규칙을 쉽게 알 수 있습니다.

- 사용하는 숫자는 0과 1 두 종류뿐입니다.
- 오른쪽으로부터 순서대로 1의 자리, 2의 자리, 4의 자리, 8의 자리, ...를 나타냅니다.

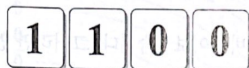
2진법으로 수를 순서대로 세어보면 먼저 0, 그리고 1, 다음은 2, ...가 아니라 한 자리를 올려 10이 되므로 11, 100, 101 순으로 계속됩니다.

표 1-1 0부터 99까지의 수를 10진법과 2진법으로 표기

10진법	2진법	10진법	2진법	10진법	2진법	10진법	2진법	10진법	2진법
0	0	20	10100	40	101000	60	111100	80	1010000
1	1	21	10101	41	101001	61	111101	81	1010001
2	10	22	10110	42	101010	62	111110	82	1010010
3	11	23	10111	43	101011	63	111111	83	1010011
4	100	24	11000	44	101100	64	1000000	84	1010100
5	101	25	11001	45	101101	65	1000001	85	1010101
6	110	26	11010	46	101110	66	1000010	86	1010110
7	111	27	11011	47	101111	67	1000011	87	1010111
8	1000	28	11100	48	110000	68	1000100	88	1011000
9	1001	29	11101	49	110001	69	1000101	89	1011001
10	1010	30	11110	50	110010	70	1000110	90	1011010
11	1011	31	11111	51	110011	71	1000111	91	1011011
12	1100	32	100000	52	110100	72	1001000	92	1011100
13	1101	33	100001	53	110101	73	1001001	93	1011101
14	1110	34	100010	54	110110	74	1001010	94	1011110
15	1111	35	100011	55	110111	75	1001011	95	1011111
16	10000	36	100100	56	111000	76	1001100	96	1100000
17	10001	37	100101	57	111001	77	1001101	97	1100001
18	10010	38	100110	58	111010	78	1001110	98	1100010
19	10011	39	100111	59	111011	79	1001111	99	1100011

3.2 1100의 분해

여기서 2진법으로 쓰인 1100이라는 수(2진수 1100)를 예로 들어 자세하게 살펴보겠습니다.



10진법일 때와 마찬가지로 나열한 숫자는 자릿수에 따라 의미가 달라집니다. 왼쪽 자리부터 순서대로 다음과 같습니다.

- 1은 '8'의 개수를 나타냅니다.
- 1은 '4'의 개수를 나타냅니다.
- 0은 '2'의 개수를 나타냅니다.
- 0은 '1'의 개수를 나타냅니다.

즉, 2진법 1100은 1개의 8, 1개의 4, 0개의 2와 0개의 1을 더한 수를 나타내는 것이 됩니다. 여기서 나온 8, 4, 2, 1이라는 수는 각각 2^3 , 2^2 , 2^1 , 2^0 을 나타냅니다. 다른 말로 하면 2진법의 1100은 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

이 식을 계산하면 2진법으로 쓴 1100을 10진법으로 변환할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 &= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 \\ &= 8 + 4 + 0 + 0 \\ &= 12 \end{aligned}$$

이로써 2진법으로 표기한 1100을 10진법으로 표기하면 12가 된다는 것을 알 수 있습니다.

3.3 진법 변환

10진법으로 쓴 12를 2진법으로 바꾸어보겠습니다. 그러려면 먼저 12를 2로 반복해서 나누어 (12를 2로 나누고 그 몫인 6을 다시 2로 나누고 또다시 그 몫 3을 2로 나누는 등), 나머지가 1인지 0인지를 조사합니다. 나머지가 0이라는 것은 나누어떨어진다는 의미입니다. 이렇게 얻은 나머지(1과 0)를 반대 순서로 나열하면 2진법 표기가 됩니다.

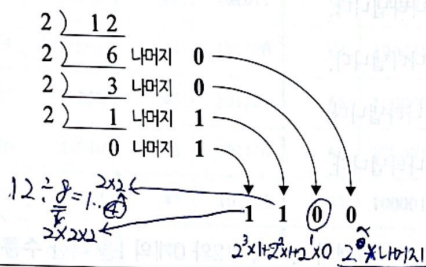
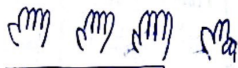


그림 1-1 12를 2진법으로 표기

같은 방법으로 10진수로 표기한 2503을 2진법으로 표기해보겠습니다.

진법이란 무엇일까?

손이 하나만 많은 나라에서 10을 표현할 때,



손을 다 더면

자리를 옮겨서 세도록 하자.

손 다 더면	:	손가락이
3	:	3
개	:	개

표현할 수 있다.

이것, 숫자 5개로 표현하는 5진법이라고 한다.

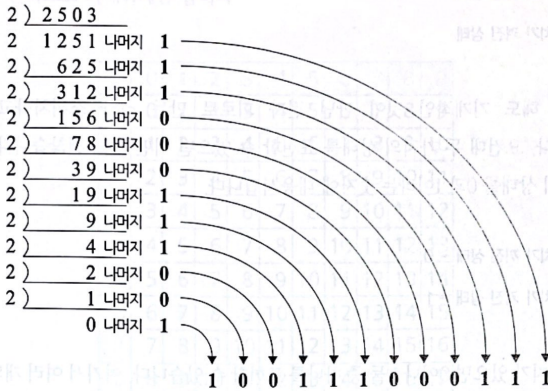


그림 1-2 2503을 2진법으로 표기

그림 1-2를 통해 10진법으로 표기한 2503을 2진법으로 바꾸면 100111000111이 된다는 것을 알 수 있습니다. 각 자리를 강조하여 표기하면 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 0 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

10진법에서는 밑수가 10이고 각 자리는 10^n 이라는 형태가 됩니다. 이에 비해 2진법에서는 밑수가 2이고 각 자리는 2^n 이라는 형태가 됩니다. 10진법에서 2진법으로 표기 형식을 바꾸는 것을 10진법에서 2진법으로의 진법 변환(또는 기수 교환)이라고 합니다.

3.4 컴퓨터에서 2진법을 사용하는 이유

컴퓨터에서는 일반적으로 2진법을 사용하는데, 왜 그런지 생각해보도록 합시다. 컴퓨터에서는 수를 표현할 때 다음과 같은 두 가지 상태를 이용합니다.

- 스위치가 꺼진 상태
- 스위치가 켜진 상태

스위치라고 해도 기계적인 것이 아닌 전자 회로로 만든 전자 스위치라고 생각해도 상관없습니다. 요컨대 두 가지의 상태를 표현할 수 있으면 어떤 것도 괜찮습니다. 스위치에 있는 두 가지 상태를 0과 1이라는 숫자에 대응시킵니다.

- 스위치가 꺼진 상태 - 0
- 스위치가 켜진 상태 - 1

하나의 스위치가 있으면 0이나 1 둘 중 하나를 표현할 수 있습니다. 여기서 여러 개의 스위치를 나열하여 각각의 스위치가 2진법의 각 자리를 나타낸다고 생각해봅시다. 그러면 스위치의 개수를 늘리기만 하면 아무리 큰 수라도 표현할 수 있게 됩니다.

물론 0~9까지 10개의 상태를 표현할 수 있는 스위치를 만들면 컴퓨터가 10진법을 사용하는 것도 논리적으로는 가능한 이야기입니다. 그러나 그렇게 하려면 0과 1로 이루어진 스위치와 비교하여 무척이나 복잡한 구조를 만들어야만 합니다.

또한, 다음 그림 1-3과 그림 1-4에 나타낸 덧셈표를 비교해보기 바랍니다. 2진법의 표는 10진법의 표보다도 훨씬 작고 간단하다는 것을 알 수 있습니다. 한자릿수를 계산하는 전자 회로를 만든다고 하면 10진법을 이용하는 것보다도 2진법을 이용하는 것이 훨씬 편할 것입니다.

다만, 2진법은 10진법과 비교하여 자릿수가 많아진다는 단점이 있습니다. 예를 들어 10진법에서는 숫자 2,503이 네 자리로 표현되지만, 2진법에서 같은 숫자를 표현하려면 100111000111처럼 12자리가 필요합니다. 앞의 표 1-1을 보더라도 분명히 2진법 쪽이 자릿수가 많아진다는 것을 알 수 있습니다.

사람은 2진법보다도 10진법을 다루기 쉽다고 느낍니다. 10진법이 자릿수가 적으므로 계산할 때 실수할 확률이 낮기 때문입니다. 또한, 2진법보다도 10진법이 숫자의 크기를 직관적으로 판단하는 데 편리하다는 장점도 있습니다. 사람의 두 손 손가락을 합하면 10개가 된다는 것도

10진법을 직관적으로 이해하게끔 합니다.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

그림 1-3 10진법 덧셈표

+	0	1
0	0	1
1	1	10

그림 1-4 2진법 덧셈표

이에 비해 컴퓨터는 아주 빠르게 계산할 수 있으므로 자릿수의 많고 적은은 신경 쓰지 않습니다. 컴퓨터는 사람처럼 계산 실수를 하지도 않고, 수의 크기를 직관적으로 파악할 필요도 없습니다. 컴퓨터는 다루는 숫자의 종류가 적고, 계산 규칙이 간단한 것을 선호하기 때문입니다.

정리해봅시다.

- 10진법에서는 자릿수가 적어지지만, 숫자의 종류가 많아집니다.
→ 사람에게는 이러한 편이 사용하기 쉽습니다.
- 2진법에서는 숫자의 종류는 적지만, 자릿수가 많아집니다.
→ 컴퓨터에게는 이러한 편이 사용하기 쉽습니다.

이러한 이유로 컴퓨터에서는 2진법을 사용하는 것입니다.

사람은 10진법을 사용하고 컴퓨터는 2진법을 사용하므로 컴퓨터가 10진법을 계산할 때는 10진법과 2진법 사이의 변환을 수행합니다. 컴퓨터는 10진법을 2진법으로 변환하고 2진법을 사용하여 계산한 다음, 2진법으로 얻은 계산 결과를 10진법으로 변환하게 됩니다.

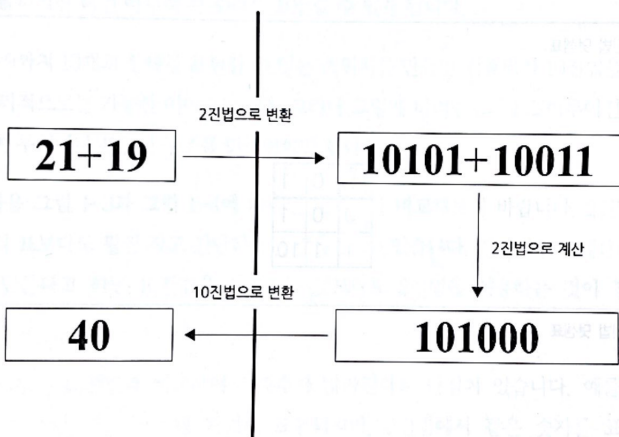


그림 1-5 사람이 컴퓨터를 사용하여 계산할 때