공부하다

박수칠 수학

기본서

학습 자료

☆이 자료는 EBS 연계 교재에 수록된 문제 가운데 고난도 유형을 선별하고, 그에 관련된 수능/모평/학평 기출 문제를 추가해서 쉽게, 자세하게, 그리고 다양한 방법으로 풀이한 것입니다. 따라서 각 문제를 푼 다음, 해설까지 정독하면 실력 향상에 많은 도움이 될 것입니다.

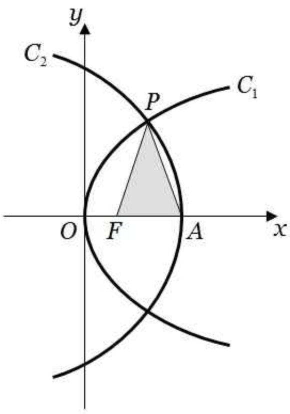
☆이 자료는 인터넷을 통해 무료로 배포되며, 유료 판매를 절대 금합니다.

EBS 수능특강+기출문제

기하와 벡터-4강~6강

1 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 p.35 유제#1

그림과 같이 x축을 축으로 하고 x축 위의 점 F를 초점으로 하는 두 포물선 C_1, C_2가 제1사분면 위의 점 P에서 만난다. 두 포물선 C_1, C_2의 꼭짓점이 각각 원점 O와 점 A이고, $\overline{OF}=3$, $\overline{PF}=8$일 때, 삼각형 PFA의 넓이는? (단, 점 F는 선분 OA 위의 점이다.)

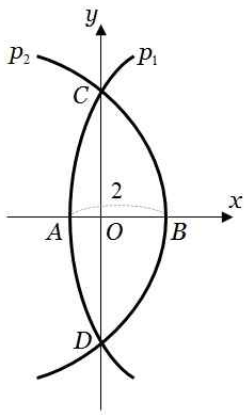


① 15 ② $5\sqrt{10}$
③ $10\sqrt{3}$ ④ 18
⑤ $5\sqrt{15}$

2 2011학년도 수능(가형) #14

그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

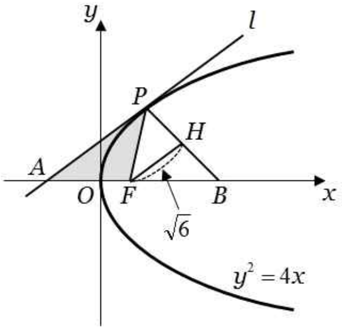
(가) p_1의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점 O이다.
(나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다.
(다) $\overline{AB}=2$



① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

3 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 p.39 유제#4

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A, 선분 AF를 $2:1$로 외분하는 점을 B라 하자. 점 F를 지나고 직선 l에 평행한 직선이 선분 PB와 만나는 점을 H라 할 때, $\overline{FH}=\sqrt{6}$이다. 삼각형 PAF의 넓이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

4 2010학년도 수능(가형) #4

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=4\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]

① 21 ② 32 ③ 45
④ 60 ⑤ 77

5 2014학년도 수능 6월 모평(B형) #29

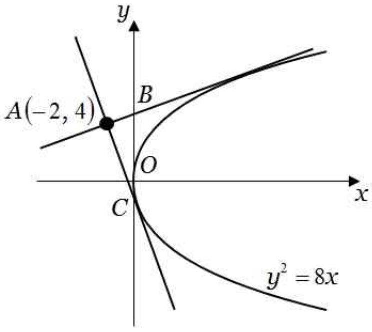
좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

> ㈎ 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
> ㈏ 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $(3, 0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{PQ}=20$일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

6 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.41$ #3

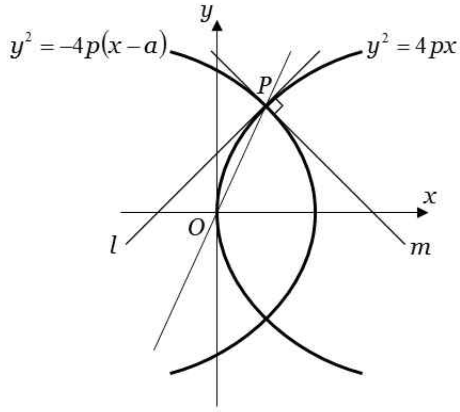
그림과 같이 점 $A(-2, 4)$에서 포물선 $y^2 = 8x$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\overline{AB} \times \overline{AC}$의 값은?



① $6\sqrt{2}$ ② 10 ③ $6\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 12

7 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.41$ #4

그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px\,(p>0)$와 포물선 $y^2 = -4p(x-a)$ $(a>0)$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 제1사분면에서의 교점 P에서 두 포물선에 그은 접선을 각각 l, m이라 하자.

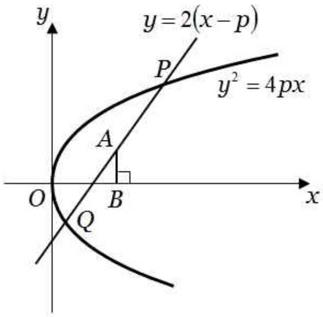


두 직선 l, m이 서로 수직일 때, 원점 O에 대하여 직선 OP의 기울기는? (단, a, p는 상수이다.)

① $\frac{7}{2}$ ② 3 ③ $\frac{5}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

8 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 p.42 #1

그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$와 직선 $y=2(x-p)$의 두 교점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 중점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{AB}=3$일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, p는 상수이다.)



① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

10 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 p.42 #2

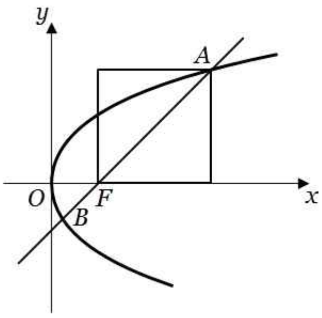
p가 0 아닌 실수일 때, 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=px+p$에 대한 설명 중 아래에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> ㄱ. $p=1$이면 포물선과 직선은 접한다.
> ㄴ. $p<0$이면 포물선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
> ㄷ. $p>1$일 때, 포물선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값을 $f(p)$라 하면 $\lim_{p\to\infty} f(p)=1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

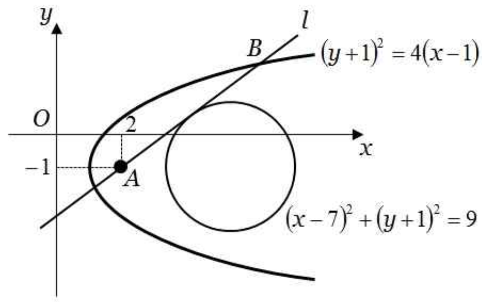
9 2013학년도 수능 9월 모평(가형) #26

그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고, 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)



11 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 p.42 #3

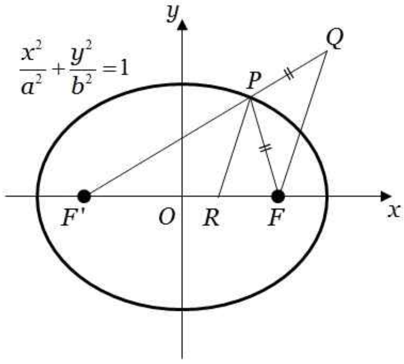
그림과 같이 점 $A(2,\,-1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 $(x-7)^2+(y+1)^2=9$에 접한다.



직선 l이 제1사분면에서 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$과 만나는 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

12 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.45$ 유제#1

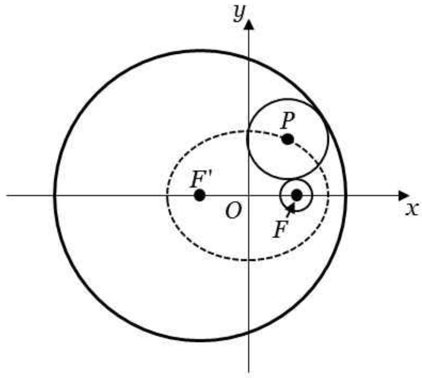
그림과 같이 두 점 $F(4,0)$, $F'(-4,0)$이 초점인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 위에 점 P가 있다.



선분 $F'P$의 연장선 위에 $\overline{PF}=\overline{PQ}$인 점 Q에 대하여 점 P를 지나고 직선 QF에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 점 R의 좌표가 $\left(\frac{4}{3},0\right)$이고 $\cos(\angle PF'F)=\frac{7}{8}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이고, $\overline{F'P}\le 8$이다.)

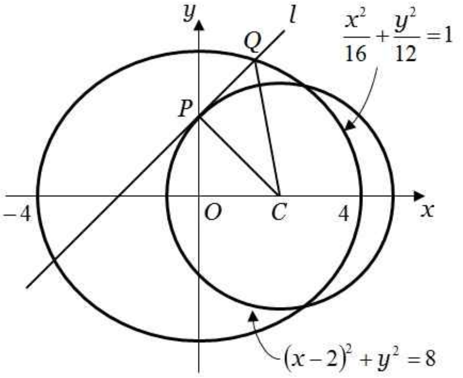
13 2004학년도 수능 6월 모평(자연) #29

그림과 같이 중심이 $F(3,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원과 중심이 $F'(-3,0)$이고 반지름의 길이가 9인 원이 있다. 큰 원에 내접하고 작은 원에 외접하는 원의 중심 P는 F와 F'을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위를 움직인다. 이때 a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]



14 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.51$ #1

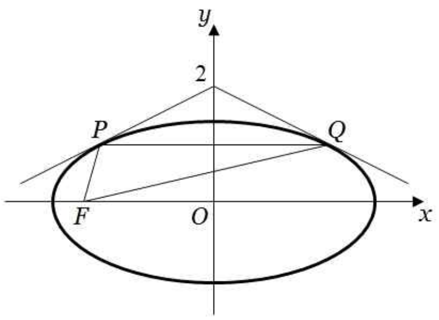
그림과 같이 중심이 C인 원 $(x-2)^2+y^2=8$ 위의 점 $P(0,2)$에서의 접선 l이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$과 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 PCQ의 둘레의 길이는?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

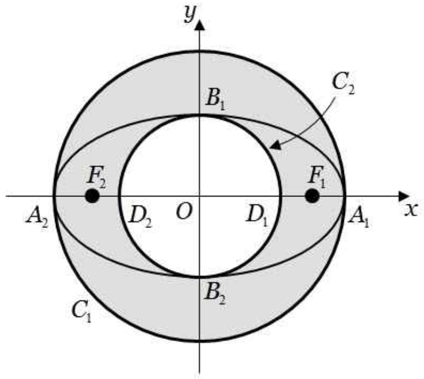
15 2012학년도 수능 6월 모평(가형) #28

점 $(0,2)$에서 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 두 초점 중 하나를 F라 할 때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는 $a\sqrt{2}+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



16 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.51$ #3

그림과 같이 x축 위의 두 점 F_1, F_2가 초점이고 중심이 원점 O인 타원의 네 꼭짓점을 A_1, B_1, A_2, B_2라 하자. x축 위의 선분 A_1A_2를 지름으로 하는 원을 C_1, y축 위의 선분 B_1B_2를 지름으로 하는 원을 C_2라 할 때, 원 C_1과 원 C_2로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이가 64π이다. 원 C_2가 x축과 만나는 점을 D_1, D_2라 할 때, 점 F_1은 선분 A_1D_1의 중점이고 점 F_2는 선분 A_2D_2의 중점이다. 원 C_2의 넓이는? (단, 세 점 A_1, D_1, F_1의 x좌표는 모두 0보다 크다.)



① 28π ② 32π ③ 36π
④ 40π ⑤ 44π

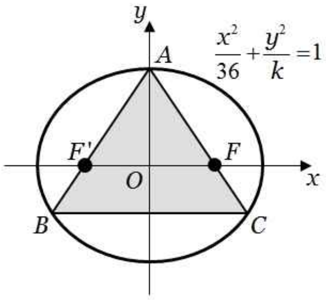
17 2012학년도 수능 9월 모평(가형) #13

두 초점이 F, F'이고, 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6인 타원이 있다. 중심이 F이고 점 F'을 지나는 원과 이 타원의 두 교점 중 한 점을 P라 하자. 삼각형 PFF'의 넓이는? [3점]

① $2\sqrt{10}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{70}$

18 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.52$ #1

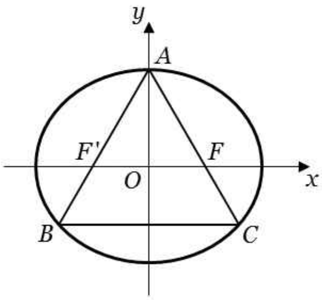
그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{k}=1$의 두 초점 F, F'이 x축 위에 있고 한 꼭짓점 A가 y축 위에 있다. 직선 AF'이 제3사분면에서 타원과 만나는 점을 B라 하고 직선 AF가 제4사분면에서 타원과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심이 원점 O이다. 삼각형 ABC의 넓이는? (단, k는 상수이다.)



① $21\sqrt{2}$　② $24\sqrt{2}$　③ $27\sqrt{2}$　④ $30\sqrt{2}$　⑤ $33\sqrt{2}$

19 2008학년도 10월 학평(가형) #5

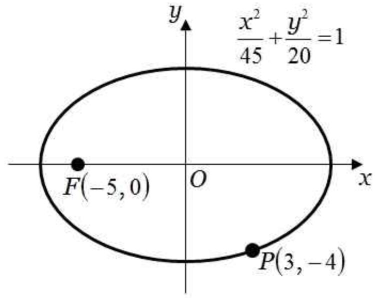
그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<a)$에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 타원의 두 초점 F, F'이 각각 선분 AC, AB 위에 있을 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은? (단, 점 A는 y축 위에 있다.) [3점]



① $\dfrac{3}{5}$　② $\dfrac{2}{3}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.52$ #2

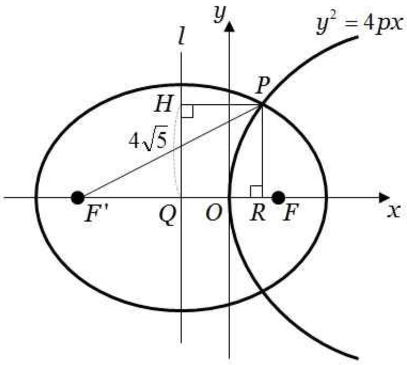
타원 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 한 초점 $F(-5,0)$을 지나는 직선 중 점 $P(3,-4)$에 이르는 거리가 최대인 직선을 l이라 하고, 직선 l이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 P를 지나고 직선 l과 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?



① $8\sqrt{5}$　② $10\sqrt{5}$　③ $12\sqrt{5}$　④ $14\sqrt{5}$　⑤ $16\sqrt{5}$

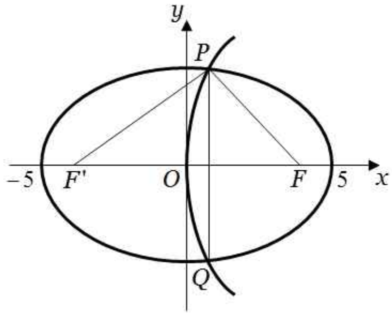
21 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.52$ #3

그림과 같이 x축 위의 두 점 F, F'이 초점이고 장축의 길이가 30인 타원이 있다. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$와 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 포물선의 준선 l과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, R이라 하자. 준선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q는 선분 $F'F$의 중점이고, $\overline{HQ}=4\sqrt{5}$이다. 삼각형 $PF'R$의 넓이가 $38\sqrt{5}$일 때, 타원의 단축의 길이는 m이다. m^2의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)



22 2011학년도 수능 9월 모평(가형) #20

좌표평면에서 두 점 $A(5, 0)$, $B(-5, 0)$에 대하여 장축이 선분 AB인 타원의 두 초점을 F, F'이라 하자. 초점이 F이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=2\sqrt{10}$일 때, 두 선분 PF와 PF'의 길이의 곱 $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



23 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.57$ 유제 #2

좌표평면 위에 두 쌍곡선

$$C_1:\ \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1,\ C_2:\ (x-m)^2-\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$$

이 있다. 쌍곡선 C_1의 한 점근선과 쌍곡선 C_2의 한 점근선이 점 $(3,3)$에서 만난다. 쌍곡선 C_1의 한 초점이 쌍곡선 C_2의 중심이 되도록 두 상수 a, m의 값을 정할 때, $a+m$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

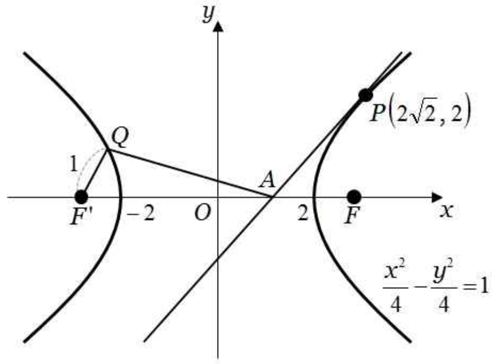
24 2007학년도 수능 9월 모평(가형) #9

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 $(2\sqrt{3},0)$, $(-2\sqrt{3},0)$을 각각 F, F'이라 하자. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $P(x,y)$ $(x>0)$에 대하여 선분 $F'P$ 위의 점 Q가 $\overline{FP}=\overline{PQ}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는? [4점]

① π ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π ④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\pi$

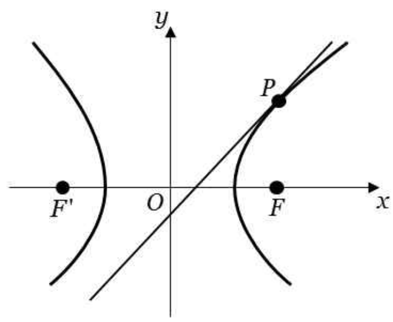
25 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.61$ 유제 #4

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 F, F'이라 하고 쌍곡선 위의 점 $P(2\sqrt{2},2)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 제2사분면에서 쌍곡선 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{F'Q}=1$일 때, $\overline{QA}^2$의 값을 구하시오.



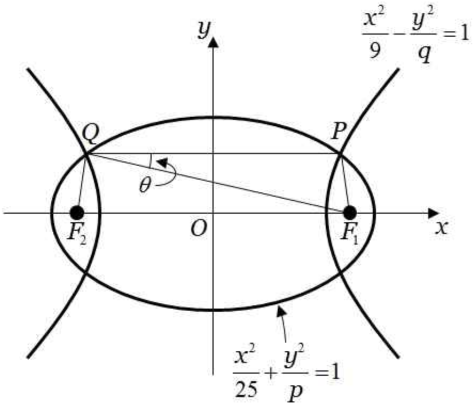
26 2014학년도 수능 9월 모평(B형) #26

그림과 같이 두 초점이 $F(3,0)$, $F'(-3,0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(4,k)$에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 $F'F$를 $2:1$로 내분할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]



27 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.64$ #1

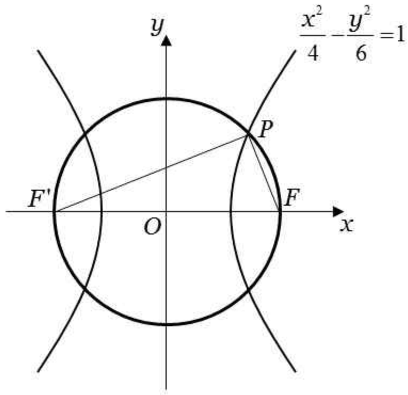
그림과 같이 두 점 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$은 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{p}=1$의 초점이고 동시에 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{q}=1$의 초점이다. 타원과 쌍곡선이 제1사분면과 제2사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 $\angle PQF_1=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\frac{31}{32}$이다. 사다리꼴 PQF_2F_1의 둘레의 길이는? (단, p, q는 상수이다.)



① $\frac{35}{2}$ ② 18 ③ $\frac{37}{2}$
④ 19 ⑤ $\frac{39}{2}$

28 2010학년도 10월 학평(가형) #8

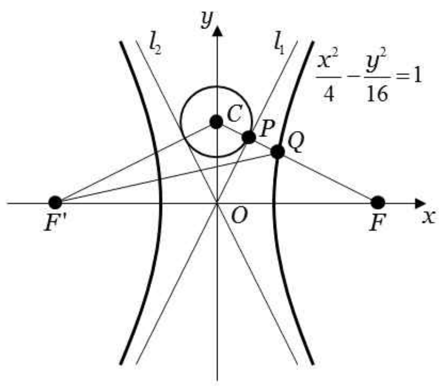
그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이라 하자. 두 점 F, F'을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, $\cos(\angle PFF')$의 값은? (단, c는 양수이다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{15}$ ③ $\frac{2\sqrt{10}}{15}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

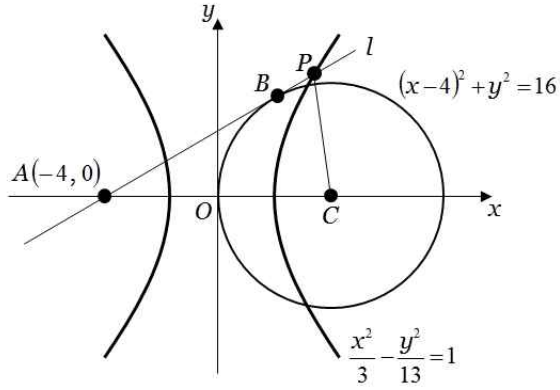
29 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.64$ #2

그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$의 초점이고 두 직선 l_1, l_2는 쌍곡선의 점근선이다. 중심이 점 $C(0, a)$ $(a>0)$인 원이 직선 l_1과 제1사분면 위의 점 P에서 접하고 세 점 C, P, F가 한 직선 위에 놓인다. 선분 CF와 쌍곡선의 교점을 Q라 할 때 삼각형 $CF'Q$의 둘레의 길이를 s_1, 삼각형 COF의 둘레의 길이를 s_2라 하면 $s_1-s_2=m+n\sqrt{5}$이다. 두 정수 m, n의 합 $m+n$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



30 2016학년도 수능 대비 수능특강 기벡 $p.64$ #3

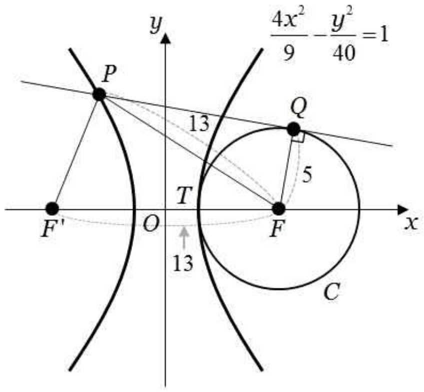
그림과 같이 점 $A(-4, 0)$을 지나는 직선 l이 원 $(x-4)^2+y^2=16$과 점 B에서 접하고 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{13}=1$과 제1사분면 위의 점 P에서 만난다. 원 $(x-4)^2+y^2=16$의 중심을 C라 할 때, 선분 PC의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.)



① $\frac{7\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　③ $3\sqrt{3}$　④ $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$

31 2014학년도 수능 6월 모평(B형) #12

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$의 두 초점은 F, F'이고, 점 F를 중심으로 하는 원 C는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에서 원 C에 접선을 그었을 때 접점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=12$일 때, 선분 PF'의 길이는? [3점]

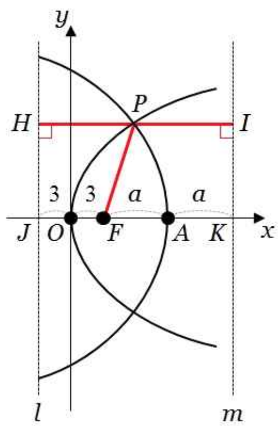


① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11 ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

EBS 수능특강+기출문제 기벡-4강~6강

1 ⑤

★포물선의 정의에 따라 포물선 위의 한 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같음을 이용하는 문제



포물선 C_1의 준선을 l, 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 따라 다음이 성립한다.

$$\overline{PF}=\overline{PH}=8$$

마찬가지로 포물선 C_2의 준선을 m, 점 P에서 준선 m에 내린 수선의 발을 I라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{PF}=\overline{PI}=8$$

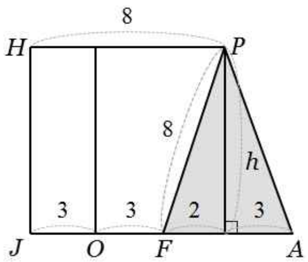
또한 곡선 C_1의 준선 l과 x축의 교점을 J라 하면 원점 O가 선분 FJ를 이등분하므로

$$\overline{OF}=\overline{OJ}=3$$

이고, 곡선 C_2의 준선 m과 x축의 교점을 K라 하면 점 A가 선분 FK를 이등분하므로 $\overline{AF}=a$일 때

$$\overline{AF}=\overline{AK}=a$$

가 성립한다. 따라서



$$\overline{HI}=\overline{JK}$$

$$16=2a+6$$

$$a=5$$

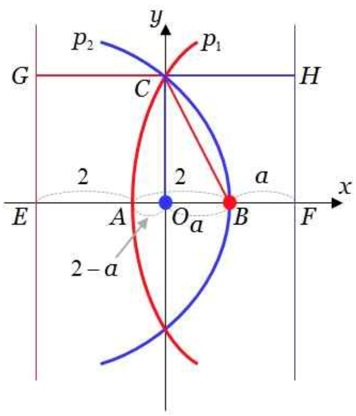
마지막으로 삼각형 PFA의 높이 h가

$$h=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$$

이므로 삼각형 PFA의 넓이는 다음과 같다.

$$\triangle PFA=\frac{1}{2}\times5\times2\sqrt{15}=5\sqrt{15}$$

2 ③



포물선 p_1의 초점이 B이므로 준선은 꼭짓점 A의 왼쪽에 위치하며 준선과 x축의 교점을 E라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}=\overline{AE}=2$$

포물선 p_2의 초점은 원점이므로 준선은 꼭짓점 B의 오른쪽에 위치하며 준선과 x축의 교점을 F, $\overline{BO}=a$라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{BO}=\overline{BF}=a,\ \overline{OA}=2-a$$

또한 두 포물선의 교점 C에서 두 준선에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 포물선의 정의에 의해

$$\overline{CB}=\overline{CG}=2+(2-a)=4-a$$

$$\overline{CO}=\overline{CH}=2a$$

가 된다. 그런데 삼각형 OBC가 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$$

$$a^2+(2a)^2=(4-a)^2$$

$$a^2+2a-4=0$$

$$a=\sqrt{5}-1\ (\because a>0)$$

$$\overline{CO}=2a=2(\sqrt{5}-1)$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CO}=\frac{1}{2}\times2\times2(\sqrt{5}-1)$$

$$=2(\sqrt{5}-1)$$

3 ②

★접선의 방정식을 구하기 위한 조건-접점 좌표, 접선 기울기, 포물선 밖 점의 좌표-이 주어지지 않았을 때, 적당한 조건을 가정해서 접선의 방정식을 만드는 문제

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$$y_1^{\ 2}=4x_1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

이 성립하고, 접선 l의 방정식은 $y_1y=2(x+x_1)$이다. 이때, 점 A의 좌표는 $(-x_1, 0)$이 된다.

초점 F가 선분 AB의 중점이고, $\overline{AP}\,/\!/\,\overline{FH}$이므로 삼각형의 중점연결 정리에 의해 점 H는 선분 PB의 중점이다. 여기에 삼각형의 중점연결 정리를 한 번 더 적용하면

$$\overline{AP}=2\overline{FH}=2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{(2x_1)^2+y_1^{\ 2}}=2\sqrt{6}$$

$$(2x_1)^2+y_1^{\ 2}=24 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

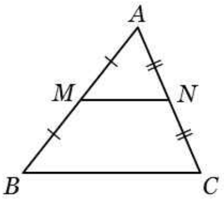
가 성립하고 ①, ②를 연립해서 풀면 $x_1=2$, $y_1=2\sqrt{2}$가 된다. 따라서 점 P의 좌표는 $(2, 2\sqrt{2})$, 점 A의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

마지막으로 초점 F의 좌표가 $(1, 0)$이므로 삼각형 PAF의 넓이는 다음과 같이 계산된다.

$$\triangle PAF=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times(\text{점 }P\text{의 }y\text{좌표})$$

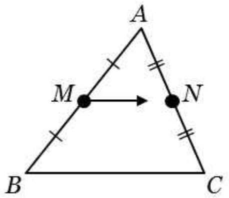
$$=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

〈삼각형의 중점연결 정리〉



삼각형에서 두 변의 중점을 이은 선분은 나머지 한 변과 평행하고, 나머지 한 변 길이의 반이다.

$$\overline{MN} /\!/ \overline{BC}, \ \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$



삼각형에서 한 변의 중점을 지나면서 다른 변에 평행한 직선은 나머지 한 번의 중점을 지난다.

4 ②

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선 방정식이

$$by=2(x+a)$$

이므로 점 Q의 좌표는 $(-a, 0)$이다. 따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(2a)^2+b^2}=4\sqrt{5}$$

$$4a^2+b^2=80 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

또한 점 P의 좌표를 포물선의 방정식에 대입하면

$$b^2=4a \qquad \cdots\cdots ②$$

이며 ①, ②를 연립해서 b를 소거하면

$$4a^2+4a=80$$

$$(a+5)(a-4)=0$$

$$a=4 \ (\because ②로부터 \ a=\frac{b^2}{4}\geq 0)$$

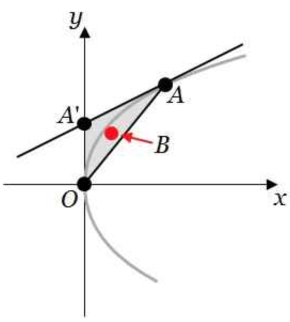
가 된다. 이를 다시 ②에 대입하면

$$b^2=16$$

$$\therefore a^2+b^2=32$$

5 14

점 A가 원점이 아닐 때, 점 A에서의 접선과 y축의 교점을 A'이라 하면 삼각형 OAA'의 무게중심이 점 B이다. 점 B의 자취를 구하기 위해 점 A의 좌표를 (a, b)로 두면



$$b^2=16a \quad \cdots\cdots ①$$

가 성립하고, 점 A에서의 접선의 방정식이

$$by=8(x+a)$$

이므로 점 A'의 좌표는 $\left(0, \frac{8a}{b}\right)$가 된다. 이때, 삼각형 OAA'의 무게중심 좌표는 $\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{3}\left(b+\frac{8a}{b}\right)\right)$이며, 이를 (x', y')으로 두고 ①을 이용해서 a, b를 소거하면 다음과 같이 점 B의 자취, 즉 곡선 C의 방정식을 구할 수 있다.

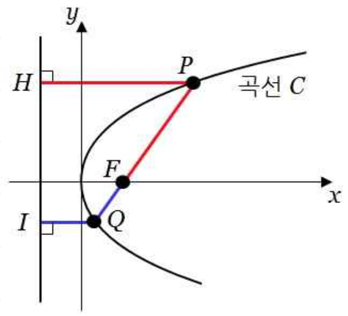
$$x'=\frac{a}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{b^2}{16}=\frac{b^2}{48}$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(b+\frac{8a}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(b+\frac{8}{b}\times\frac{b^2}{16}\right)=\frac{b}{2}$$

$$x'=\frac{1}{48}\times(2y')^2=\frac{1}{12}y'^2$$

$$y'^2=12x'$$

따라서 곡선 C의 방정식은 $y^2=12x$



이때, 곡선 C의 초점은 점 $F(3, 0)$이고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 포물선의 정의에 따라 다음이 성립한다.

$$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PH}+\overline{QI}=(\alpha+3)+(\beta+3)$$

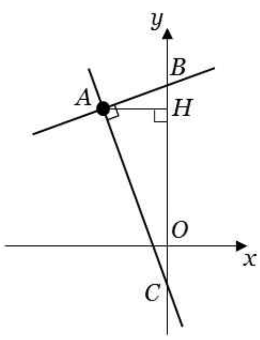
$$=(\alpha+\beta)+6=20$$

$$\therefore \alpha+\beta=14$$

6 ④

★포물선 밖의 점에서 포물선에 그은 접선의 방정식을 구하는 문제

점 $A(-2, 4)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 기울기가 m이라면 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{2}{m}$이고, 여기에 점 A의 좌표를 대입하면 기울기 m에 대한 이차방정식이 나타난다.



$$4=-2m+\frac{2}{m}$$

$$2m^2+4m-2=0$$

$$m^2+2m-1=0 \qquad \cdots ①$$

방정식 ①의 두 근을 m_1, m_2라 하면 접선 AB, AC의 기울기와 같고, $m_1m_2=-1$에 의해 접선 AB, AC가 직교한다. 따라서 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AH}\times\overline{BC}=2\overline{BC}$$

가 성립한다.

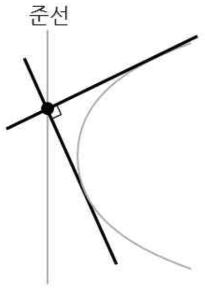
이때 선분 BC의 길이는 접선 AB, AC의 y절편의 차와 같고, 방정식 ①의 두 근이 $-1\pm\sqrt{2}$이므로

$$\overline{BC}=\left|\frac{2}{m_1}-\frac{2}{m_2}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}-1}-\frac{2}{-\sqrt{2}-1}$$

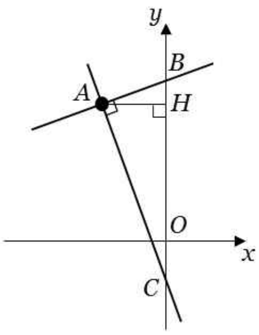
$$=2(\sqrt{2}+1)+2(\sqrt{2}-1)=4\sqrt{2}$$

$\therefore 2\overline{BC}=8\sqrt{2}$

[다른 방법] $\overline{AB}\perp\overline{AC}$를 알아내지 못하면 선분 AB, AC의 길이를 계산해야 하기 때문에 풀이가 복잡해진다. 그런데 다음 개념을 알면 $\overline{AB}\perp\overline{AC}$를 쉽게 파악할 수 있다.



포물선의 준선 위의 임의의 점에서 포물선에 그은 두 접선은 항상 직교한다.
반대로 포물선의 두 접선이 직교하면 접선의 교점은 항상 포물선의 준선 위에 있다.



포물선 $y^2=8x$의 준선이 $x=-2$이므로 점 $A(-2,4)$는 준선 위에 있으며, 점 A에서 포물선에 그은 두 접선 AB, AC는 직교한다. 따라서 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AH}\times\overline{BC}=2\overline{BC}$$

가 성립한다.

점 $A(-2,4)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 기울기가 m이라면 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{2}{m}$이고, 여기에 점 A의 좌표를 대입하면 기울기 m에 대한 이차방정식이 나타난다.

$$4=-2m+\frac{2}{m} \Rightarrow m^2+2m-1=0$$

선분 BC의 길이는 접선 AB, AC의 y절편의 차와 같고, 위 방정식의 두 근이 $-1\pm\sqrt{2}$이므로

$$\overline{BC}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}-\frac{2}{-\sqrt{2}-1}$$
$$=2(\sqrt{2}+1)+2(\sqrt{2}-1)=4\sqrt{2}$$

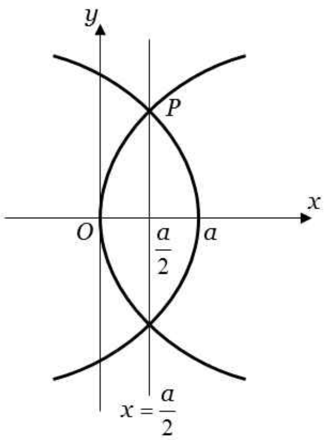
7 ④

★포물선의 평행이동, 대칭이동 및 접선의 방정식을 이용하는 문제

포물선 $y^2=4px$를 y축에 대해 대칭이동하면 $y^2=-4px$가 되고, 다시 x축 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y^2=-4p(x-a)$가 된다. 따라서 두 포물선 $y^2=4px$, $y^2=-4p(x-a)$는 합동이고, 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점을 이은 선분의 수직이등분선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대해 대칭이다.

또한 교점 P의 x좌표가 $\dfrac{a}{2}$이므로 이를 포물선 $y^2=4px$에 대입하면 $y=\pm\sqrt{2ap}$, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{2ap}\right)$이다.

두 포물선이 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대해 대칭이기 때문에 점 P에서의 접선 l, m은 기울기의 절댓값이 같고, 부호가 반대다. 그리고 $l\perp m$으로부터 기울기 곱이 -1이기 때문에 접선 l의 기울기는 1, 접선 m의 기울기는 -1이 된다.



미분가능한 함수 $y=f(x)$를 직선 $x=k$에 대해 대칭이동하면 함수 $y=f(2k-x)$가 된다. 이때, 두 함수의 도함수는 각각 $y'=f'(x)$, $y'=-f'(2k-x)$이고, $x=k$일 때의 미분계수는 각각 $f'(k)$, $-f'(k)$이다.
그러므로 그래프가 직선 $x=k$에 대해 대칭인 두 함수에 대하여 $x=k$일 때의 두 미분계수는 절댓값이 같고, 부호가 반대다.

포물선 $y^2=4px$와 점 $P\left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{2ap}\right)$에서 접하는 접선 l의 방정식

$$\sqrt{2ap}\times y=4p\times\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

로부터 접선 l의 기울기가 $\dfrac{2p}{\sqrt{2ap}}=1$이므로

$$4p^2=2ap \Rightarrow p(2p-a)=0 \Rightarrow 2p=a$$

이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(p,2p)$, 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{2p}{p}=2$이다.

[다른 방법] 포물선의 접선 공식 대신 도함수를 이용해서 풀 수도 있다. 이때도 두 포물선 $y^2=4px$, $y^2=-4p(x-a)$가 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대해 대칭인 것은 알고 있어야 한다.

포물선의 방정식 $y^2=4px$, $y^2=-4p(x-a)$를 x에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$y^2=4px \Rightarrow 2yy'=4p \Rightarrow y'=\frac{2p}{y}$$

$$y^2=-4p(x-a) \Rightarrow 2yy'=-4p \Rightarrow y'=-\frac{2p}{y}$$

앞에서의 풀이와 같이 점 P의 좌표가 $\left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{2ap}\right)$이므로

접선 l의 기울기: $\dfrac{2p}{\sqrt{2ap}}$

접선 m의 기울기: $-\dfrac{2p}{\sqrt{2ap}}$

기울기의 곱: $-\dfrac{4p^2}{2ap}=-\dfrac{2p}{a}=-1 \Rightarrow 2p=a$

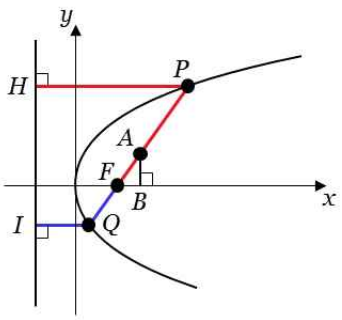
이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(p,2p)$, 직선 OP의 기울기는

$\frac{2p}{p}=2$이다.

8 ②

> ★포물선의 정의에 따라 포물선 위의 한 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같음을 이용하는 문제

포물선 $y^2=4px$의 초점 $(p, 0)$을 직선 $y=2(x-p)$에 대입하면 성립하므로 직선은 포물선의 초점을 지난다. 따라서 아래 그림과 같이 포물선의 초점을 F, 포물선과 직선의 교점 P, Q에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}$, $\overline{QF}=\overline{QI}$가 성립한다.



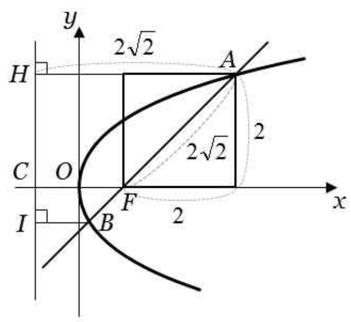
두 점 P, Q의 좌표를 구하기 위해 포물선의 방정식 $y^2=4px$와 직선의 방정식 $y=2(x-p)$를 연립해서 y를 소거하면 다음과 같다.

$$4(x-p)^2=4px$$
$$x^2-3px+p^2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

방정식 ①의 두 근을 α, β(단, $\alpha<\beta$)라 하면 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(\alpha, 2(\alpha-p))$, $(\beta, 2(\beta-p))$이며, 선분 PQ의 중점 A의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta-2p\right)$이다. 이때, 방정식 ①의 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=3p$이므로 중점 A의 좌표는 $\left(\frac{3p}{2}, p\right)$가 되고, 선분 PQ의 길이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\overline{AB}=(\text{점 } A\text{의 } y\text{좌표})=p=3$$
$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PH}+\overline{QI}\\&=(\alpha+p)+(\beta+p)=(\alpha+\beta)+2p\\&=5p=5\times3=15\end{aligned}$$

9 128



정사각형의 한 변 길이가 2이므로 대각선 AF의 길이는 $2\sqrt{2}$이며, 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 따라

$$\overline{AH}=\overline{AF}=2\sqrt{2}$$

가 성립한다.

또한 준선과 x축의 교점을 C라 하면 선분 FC의 길이가 $2\sqrt{2}-2$이므로

$$\overline{OF}=\overline{OC}=\sqrt{2}-1$$

이고 초점 F는 $(\sqrt{2}-1, 0)$, 준선은 $y=-\sqrt{2}+1$이 된다.

그러므로 포물선의 방정식은 $y^2=4(\sqrt{2}-1)x$, 직선 AF의 방정식은 $y=x-(\sqrt{2}-1)$이며, 두 식을 연립하고 y를 소거하면 x에 대한 이차방정식

$$\{x-(\sqrt{2}-1)\}^2=4(\sqrt{2}-1)x$$
$$x^2-2(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}-1)^2=4(\sqrt{2}-1)x$$
$$x^2-6(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}-1)^2=0$$

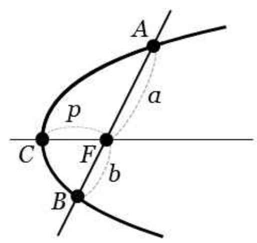
이 나타난다. 이 방정식의 두 근을 α, β라 하면 점 A, B의 x좌표와 같고, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6(\sqrt{2}-1)$이 성립하므로 선분 AB의 길이는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AH}+\overline{BI}\\&=(\alpha+\sqrt{2}-1)+(\beta+\sqrt{2}-1)\\&=(\alpha+\beta)+2\sqrt{2}-2\\&=6(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}-2\\&=8\sqrt{2}-8\end{aligned}$$

그러므로

$$a^2+b^2=8^2+(-8)^2=128$$

[다른 방법] 포물선과 그 초점을 지나는 직선이 두 점에서 만날 때 다음이 성립함을 이용한다.



> 포물선의 초점이 F, 꼭짓점이 C이고, 초점을 지나는 직선과 포물선의 서로 다른 두 교점이 A, B일 때
> $\overline{AF}=a$, $\overline{BF}=b$, $\overline{CF}=p$
> 이면 다음이 성립한다.
> $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$$

앞에서의 풀이와 같은 방법으로

$$\overline{AH}=\overline{AF}=2\sqrt{2}$$
$$\overline{OF}=\overline{OC}=\sqrt{2}-1$$

을 구하면 $p=\sqrt{2}-1$이므로 □ 안의 관계식 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$에 따라 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\overline{BF}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$
$$\frac{1}{\overline{BF}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$$

$$\overline{BF}=\frac{4}{3\sqrt{2}+4}=\frac{4(3\sqrt{2}-4)}{2}=6\sqrt{2}-8$$

$$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=2\sqrt{2}+(6\sqrt{2}-8)=8\sqrt{2}-8$$

$$a^2+b^2=8^2+(-8)^2=128$$

10 ⑤

★포물선과 직선의 방정식을 연립해서 만든 이차방정식과 그 판별식으로 포물선과 직선의 위치 관계를 따지는 문제
★포물선과 직선이 만나지 않을 때 포물선 위의 점 가운데 직선에 가장 가까운 것은 직선과 평행한 접선의 접점

ㄱ. 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=px+p$의 위치 관계를 조사하기 위해 두 방정식을 연립하고 x를 소거하면 다음과 같다.

$$y^2=4(y-p)$$

$$y^2-4y+4p=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$p=1$이면 이차방정식 ①의 판별식이

$$D/4=4-4p=0$$

을 만족하므로 포물선과 직선은 접한다. (참)

ㄴ. $p<0$이면 이차방정식 ①의 판별식은

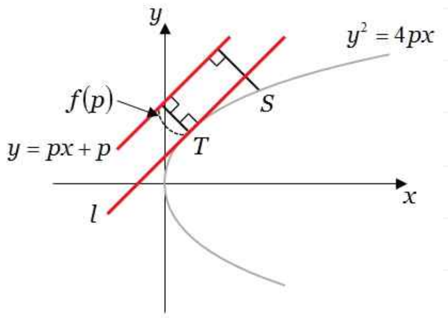
$$D/4=4-4p>4$$

를 만족하므로 포물선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $p>1$이면 이차방정식 ①의 판별식은

$$D/4=4-4p<0$$

를 만족하므로, 포물선과 직선은 만나지 않는다. 이때, $f(p)$를 구하기 위해 아래 그림과 같이 직선 $y=px+p$에 평행하고, 포물선에 접하는 접선 l을 생각해보자.



접선 l과 포물선의 접점이 T라면 $f(p)$는 점 T에서 직선 $y=px+p$까지의 거리와 같다.(접점을 제외한 포물선 위의 점 S에서 직선 $y=px+p$까지의 거리는 접선 l과 직선 $y=px+p$ 사이의 거리보다 항상 크기 때문) 또한 접선 l의 기울기가 p이므로 접선 l의 방정식은

$$y=px+\frac{p}{p} \Rightarrow y=px+1$$

포물선 $y^2=4px$에 대하여 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$

이며, $f(p)$는 접선 l위의 한 점 $(0,1)$과 직선 $y=px+p$ $(px-y+p=0)$ 사이의 거리로 구할 수 있다.

$$f(p)=\frac{|p-1|}{\sqrt{p^2+1}}$$

따라서 주어진 극한은

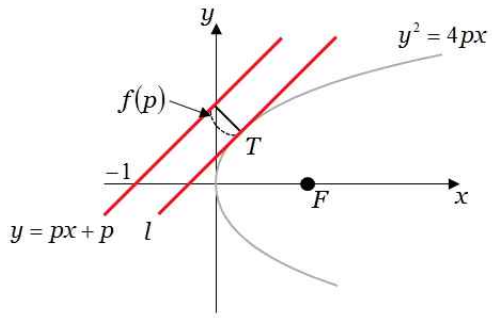
$$\lim_{p\to\infty}f(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{|p-1|}{\sqrt{p^2+1}}=\lim_{p\to\infty}\frac{|p-1|}{|p|}=1 \text{ (참)}$$

$$(\because \frac{\infty}{\infty}\text{의 꼴이므로 } \sqrt{p^2+1}\fallingdotseq\sqrt{p^2}=|p|)$$

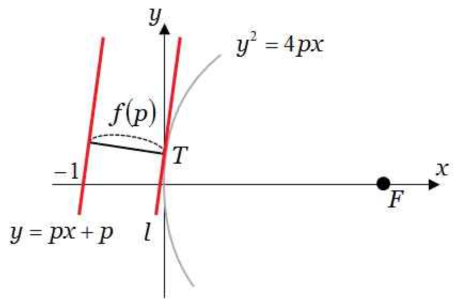
[다른 방법] ㄷ은 다음과 같이 직관적으로 풀 수도 있다.

포물선 $y^2=4px$는 초점이 $F(p,0)$이며, p값이 증가하면 초점 F가 오른쪽으로 이동하면서 포물선의 폭이 넓어진다. 그리고 직선 $y=px+p=p(x+1)$은 p값에 관계없이 점 $(-1,0)$을 지나고, p값이 증가할수록 기울기가 커진다. 따라서 직선 $y=px+p$에 평행한 접선 l의 접점 T는 p값이 증가할수록 점점 원점 쪽으로 이동한다.

〈p의 값이 작을 때〉



〈p의 값이 클 때〉



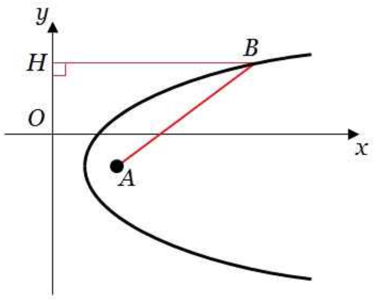
$p\to\infty$이면 직선 $y=px+p$의 기울기가 한없이 커지므로 직선 $x=-1$로 한없이 다가가고, 접선 l도 기울기가 한없이 커지면서 y축으로 한없이 다가간다. 따라서 접점 T는 원점으로 한없이 다가가고, 접점 T에서 직선 $y=px+p$까지의 거리 $f(p)$는 원점과 점 $(-1,0)$까지의 거리 1로 수렴하게 된다. (참)

11 10

★포물선의 정의에 따라 포물선 위의 한 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같음을 이용하는 문제
★꼭짓점이 원점이 되도록 포물선을 평행이동시키면 풀기 쉬워짐

포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$은 포물선 $y^2=4x$를 평행이동한 것과 같다. 그리고 포물선 $y^2=4x$의 준선과 초점이 꼭짓점 $(0,0)$에서 좌우로 거리 1인 지점에 있으므로 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$의 준선과 초점은 꼭짓점 $(1,-1)$에서 좌우로 거리 1인 지점에 있는 직선 $x=0$과 점 $(2,-1)$이다. 따라서 점 A는 주어진 포물선의 초점이다.

또한 포물선의 정의에 따라 선분 AB의 길이는 점 B에서 준선 y축에 내린 수선 BH의 길이와 같고, 이것은 다시 점 B의 x좌표와 같다.



이제 점 B의 x좌표를 구하기 위해 직선 l의 방정식과 포물선의 방정식 $(y+1)^2=4(x-1)$을 연립해보자. 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y+1=m(x-2)$$
$$mx-y-2m-1=0$$

이며, 원과 접하려면 원의 중심 $(7,-1)$에서 직선 l까지의 거리가 원의 반지름 3과 같아야 한다.

$$\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$$
$$25m^2=9(m^2+1)$$
$$m=\frac{3}{4}\ \ (\because m>0)$$

그러므로 직선 l의 방정식은

$$y+1=\frac{3}{4}(x-2)$$

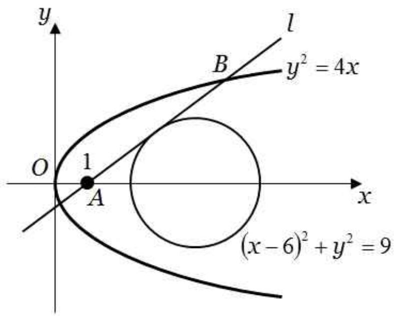
이며, 포물선의 방정식과 연립해서 y를 소거하면

$$\frac{9}{16}(x-2)^2=4(x-1)$$
$$(9x-10)(x-10)=0$$
$$x=\frac{10}{9},\ 10$$

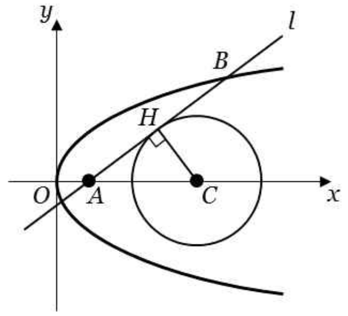
이다. 이 중에서 $\frac{10}{9}$은 포물선과 직선 l의 교점 가운데 점 B가 아닌 것의 x좌표이므로 점 B의 x좌표는 10이다.

$$\therefore \overline{AB}=10$$

[다른 방법] 주어진 포물선을 평행이동해서 꼭짓점이 원점인 포물선으로 만들면 문제를 보다 쉽게 풀 수 있다. 이를 위해 모든 조건을 x축으로 -1만큼, y축으로 1만큼 평행이동시키면 다음과 같은 문제가 된다.

> 점 $A(1,0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 $(x-6)^2+y^2=9$에 접한다.
>
> 
>
>
> 직선 l이 제 1사분면에서 포물선 $y^2=4x$와 만나는 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

이 문제는 앞에서와 같은 방법으로 풀 수 있지만, 다양한 접근 방법을 알아보기 위해 그래프로 푸는 방법을 생각해보자.



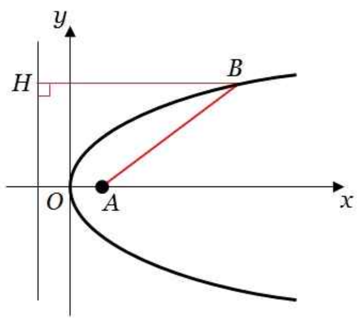
위 그림과 같이 원의 중심 $(6,0)$을 점 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AC}=5,\ \overline{CH}=3$$
$$\overline{AH}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

이다. 따라서 직선 l의 기울기와 방정식은 각각

$$\tan\angle CAH=\frac{3}{4},\ y=\frac{3}{4}(x-1)$$

이 된다.



위 그림과 같이 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{AB}=\overline{BH}$이므로 선분 AB의 길이를 구하기 위해서는 점 B의 x좌표를 알아야 한다. 이를 위해 포물선의 방정식 $y^2=4x$와 직선 l의 방정식 $y=\frac{3}{4}(x-1)$을 연립해서 y를 소거하면 다음과 같다.

$$\frac{9}{16}(x-1)^2=4x$$
$$(9x-1)(x-9)=0$$

$x=\frac{1}{9},\ 9$

$\frac{1}{9}$은 포물선과 직선 l의 교점 가운데 점 B가 아닌 것의 x좌표이므로 점 B의 x좌표는 9이다.

$\therefore \overline{AB}=\overline{BH}=9+1=10$

12 56

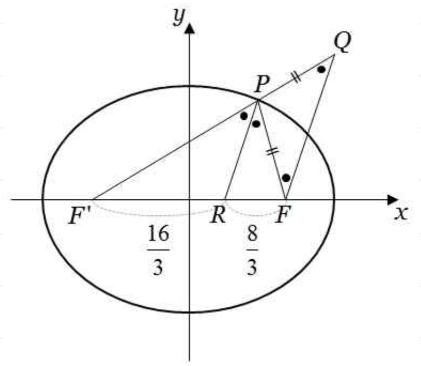
★타원의 정의에 따라 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리 합이 장축의 길이와 같음을 이용하는 문제

삼각형 PQF가 $\overline{PF}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로

$\angle PQF=\angle PFQ$

이고, $\overline{QF}\,/\!/\,\overline{PR}$에 의해 다음이 성립한다.

$\angle PQF=\angle F'PR,\ \angle PFQ=\angle FPR$



또한 세 점 $F(4,0)$, $F'(-4,0)$, $R\left(\frac{4}{3},0\right)$으로부터 $\overline{FR}=\frac{8}{3}$, $\overline{RF'}=\frac{16}{3}$이고, 선분 PR이 삼각형 PFF'의 한 내각 $\angle FPF'$의 이등분선이므로

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{RF'}:\overline{RF}=\frac{16}{3}:\frac{8}{3}=2:1$

이 성립한다.

$\cos(\angle PF'F)=\frac{7}{8}$을 이용하기 위해 $\overline{PF'}=2k$, $\overline{PF}=k$로 두고, 삼각형 $PF'F$에서 코사인 제2법칙을 적용하면

$$\cos(\angle PF'F)=\frac{\overline{PF'}^2+\overline{FF'}^2-\overline{PF}^2}{2\times\overline{PF'}\times\overline{FF'}}$$

$$\frac{7}{8}=\frac{(2k)^2+8^2-k^2}{2\times 2k\times 8}$$

$(k-4)(3k-16)=0$

$k=4,\ \frac{16}{3}$

그런데 $\overline{PF'}=2k\le 8$이므로 $k=4$, $\overline{PF'}=8$, $\overline{PF}=4$이다.

타원의 정의에 의해 점 P에서 두 초점 F, F'에 이르는 거리의 합 12가 장축의 길이와 같으므로

$2a=12 \Rightarrow a=6$

또한 $c^2=a^2-b^2$으로 두면 $c=4$이므로

$b^2=a^2-c^2=36-16=20$

$\therefore a^2+b^2=36+20=56$

13 41

점 P를 중심으로 하는 원의 반지름을 r이라 하면 이 원과 점 F를 중심으로 하는 원이 외접하므로 다음이 성립한다.

$\overline{PF}=r+1 \leftarrow$ (중심 사이 거리)=(반지름 합)

점 P를 중심으로 하는 원과 점 F'을 중심으로 하는 원은 내접하므로 다음이 성립한다.

$\overline{PF'}=9-r \leftarrow$ (중심 사이 거리)=(반지름 차)

두 식을 더하면

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$

이므로 동점 P의 자취는 두 점 F, F'을 중심으로 하면서 장축의 길이가 10인 타원이 된다. 그러므로

$a=5,\ c=3$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$

$\therefore a^2+b^2=25+16=41$

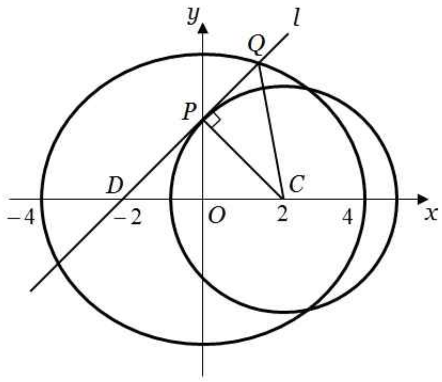
14 ③

★타원의 정의에 따라 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리 합이 장축의 길이와 같음을 이용하는 문제

타원의 방정식 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$로부터

$c^2=a^2-b^2=16-12=4$

이므로 초점 C의 좌표는 $(2,0)$이다. 또한 점 P의 좌표가 $(0,2)$이므로 직선 PC의 기울기가 -1, 직선 PC와 직교하는 접선 l의 기울기가 1이고, 접선 l과 x축의 교점 좌표는 $(-2,0)$이 된다. 또한 점 $(-2,0)$은 타원의 또 다른 초점이며, 이를 점 D라고 하자.



따라서 삼각형 PCQ의 둘레 길이는 타원의 정의에 의해 다음과 같이 계산된다.

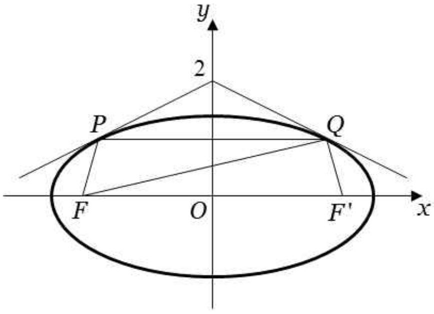
$\overline{PQ}+\overline{PC}+\overline{QC}=\overline{PQ}+\overline{PD}+\overline{QC}=\overline{QD}+\overline{QC}$

$=$(타원의 장축 길이)$=8$

15 32

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 밖의 점 $(0,2)$에서 타원에 그은 접선의 접점을 (x_1,y_1)이라 하면 $\frac{{x_1}^2}{8}+\frac{{y_1}^2}{2}=1$이 성립하고, 접선의

방정식은 $\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1$이다. 접선의 방정식에 점 $(0,2)$를 대입하면 $y_1=1$, $x_1=\pm 2$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-2,1)$, $(2,1)$이고 선분 PQ의 길이는 4가 된다.



또한 타원의 또 다른 초점을 F'이라 하면 점 P와 점 Q, 점 F'와 점 F'은 각각 y축 대칭이므로 선분 PF와 QF'도 y축 대칭이고, 길이가 같다.

그러므로 삼각형 PFQ의 둘레 길이는

$\overline{PQ}+\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PQ}+\overline{QF'}+\overline{QF}=4+4\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=4^2+4^2=32$

16 ③

★도형의 넓이로부터 얻은 방정식을 타원의 방정식과 연결하는 문제

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 원 C_1의 반지름은 a, 원 C_2의 반지름은 b이다. 따라서 어두운 부분의 넓이는

$\pi a^2-\pi b^2=64\pi$

$a^2-b^2=64$ ……… ①

또한 두 점 A_1, D_1의 좌표가 각각 $(a,0)$, $(b,0)$이므로 초점 F_1의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$이고 다음이 성립한다.

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=a^2-b^2=64$

$a+b=16$

이를 ①에 적용하면

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=16(a-b)=64$

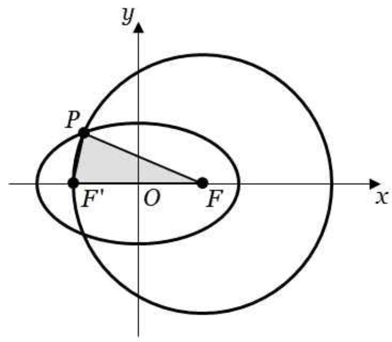
$a-b=4$

가 되고, 두 식을 연립해서 풀면 다음과 같다.

$a=10$, $b=6$

그러므로 원 C_2의 넓이는 36π

17 ④



문제에 주어진 타원의 중심이 원점, 장축이 x축, 단축이 y축에 오도록 그리면 위와 같다. 이 타원의 방정식이 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라면

(장축의 길이)$=2a=10 \Rightarrow a=5$

(단축의 길이)$=2b=6 \Rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16$

이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 각각 $(4,0)$, $(-4,0)$이다.

또한 타원의 정의에 따라

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=10$

이 성립하고, 원의 반지름이 $\overline{PF}=\overline{FF'}=8$이므로 $\overline{PF'}=2$가 된다.

그러므로 삼각형 PFF'은 세 변 길이가 2, 8, 8인 이등변삼각형이며 $\overline{PF}$를 밑변으로 보면 높이가

$\sqrt{8^2-1^2}=3\sqrt{7}$

이므로 삼각형 PFF'의 넓이는 다음과 같다.

$\triangle PFF'=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

18 ③

★타원의 정의에 따라 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리 합이 장축의 길이와 같음을 이용하는 문제

타원의 장축 길이가 12이므로

타원의 정의에 따라

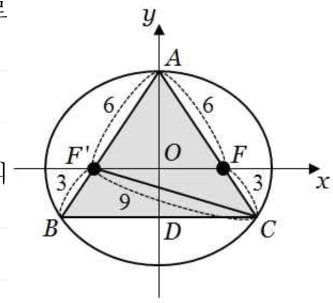
$\overline{AF}+\overline{AF'}=12$

$\overline{CF}+\overline{CF'}=12$

가 성립하고, 점 A가 타원의 단축 위에 있으므로

$\overline{AF}=\overline{AF'}=6$

이 된다.



점 F와 F', 점 C와 B가 y축에 대해 대칭이므로 $\overline{FF'}\,/\!/\,\overline{CB}$, $\triangle AOF \backsim \triangle ADC$가 성립하고, 원점 O가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AF}:\overline{CF}=2:1$

이다. 따라서

$\overline{CF}=3$, $\overline{CF'}=9$

이며, 삼각형 ACF'은 세 변의 길이가 9, 9, 6인 이등변삼각형이 된다.

$$\therefore \triangle ACF' = \frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{9^2-3^2} = 3\times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

또한 삼각형 BCF'은 밑변 길이가 $\overline{BF'}=\overline{CF}=3$, 높이가 삼각형 ACF'의 높이 $6\sqrt{2}$이므로

$$\triangle BCF' = \frac{1}{2}\times 3\times 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ACF' + \triangle BCF'$$
$$= 18\sqrt{2}+9\sqrt{2} = 27\sqrt{2}$$

[다른 방법] 타원의 정의를 이용하는 대신, 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 구하는 방법으로 풀 수도 있다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 $c^2=a^2-b^2$(단, $a^2>b^2$)으로 정의하면 초점의 좌표는 $(\pm c, 0)$이다. 이를 문제에 주어진 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{k}=1$에 적용하면 초점 F, F'의 좌표는 각각 $(\sqrt{36-k}, 0)$, $(-\sqrt{36-k}, 0)$이 된다.

또한 점 A의 좌표가 $(0, \sqrt{k})$이고, 점 C가 선분 AF를 $3:1$로 외분하므로

$$(\text{점 } C\text{의 } x\text{좌표}) = \frac{3\times\sqrt{36-k}-1\times 0}{3-1} = \frac{3\sqrt{36-k}}{2}$$

$$(\text{점 } C\text{의 } y\text{좌표}) = \frac{3\times 0-1\times\sqrt{k}}{3-1} = -\frac{\sqrt{k}}{2}$$

이며, 이를 타원의 방정식에 대입하면 다음과 같이 k의 값이 나타난다.

$$\frac{1}{36}\times\frac{9}{4}\times(36-k)+\frac{1}{k}\times\frac{k}{4}=1$$

$$\frac{36-k}{16}+\frac{1}{4}=1$$

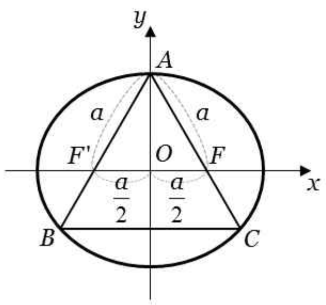
$$36-k+4=16$$

$$k=24$$

그러므로 점 A의 좌표는 $(0, 2\sqrt{6})$, 점 C의 좌표는 $(3\sqrt{3}, -\sqrt{6})$, 점 B의 좌표는 $(-3\sqrt{3}, -\sqrt{6})$이고, 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 3\sqrt{6} = 27\sqrt{2}$$

19 ⑤



타원이 y축 대칭이므로 타원에 내접하는 정삼각형도 y축 대칭이고, $\overline{AF}=\overline{AF'}$이 성립한다. 또한 타원의 정의에 의해

$$\overline{AF}+\overline{AF'}=(\text{장축의 길이})=2a$$

$$\overline{AF}=\overline{AF'}=\overline{FF'}=a$$

$$\overline{OF}=\overline{OF'}=\frac{a}{2}$$

이고, 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$이다.

초점 좌표가 $(\pm c, 0)$일 때 $c^2=a^2-b^2$이 성립하므로

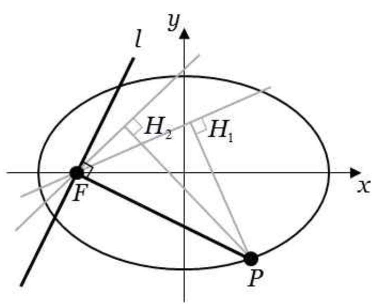
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2-b^2 \Rightarrow b^2=\frac{3}{4}a^2 \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

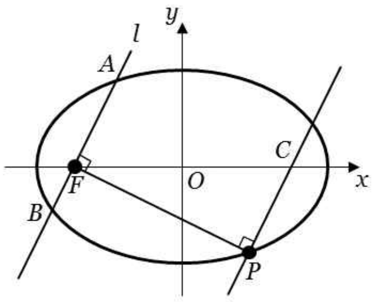
20 ③

★타원의 정의에 따라 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리 합이 장축의 길이와 같음을 이용하는 문제

오른쪽 그림과 같이 초점 F를 지나는 직선을 몇 개 그리고 점 P에서 그 직선으로 수선을 내리면 두 점 F, P와 수선의 발을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형이 만들어지고 점 P에서 직선까지의 거리 $\overline{PH_1}$, $\overline{PH_2}$는 빗변의 길이 $\overline{PF}$보다 짧음을 알 수 있다. 따라서 점 P에서 점 F를 지나는 직선까지의 거리가 최대이려면 위 그림의 굵은 선과 같이 점 P에서 직선에 내린 수선의 발이 점 F와 일치해야 하고, 이때 점 F를 지나는 직선이 l이다.



문제에 주어진 조건에 따라 점 P를 지나면서 직선 l과 평행한 직선을 그리고, 세 점 A, B, C를 추가하면 오른쪽 그림이 나타난다. 여기서 직선 PF의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PC의 기울기는 2, 직선 PC의 방정식은 다음과 같다.



$$y-(-4)=2(x-3) \Rightarrow y=2x-10$$

이때, 점 C의 좌표는 $(5, 0)$이며, 타원의 또 다른 초점과 일치한다. 그러므로 삼각형 ABC의 둘레 길이는

$$(\overline{AF}+\overline{AC})+(\overline{BF}+\overline{BC})$$
$$=(\text{타원의 장축 길이})\times 2$$
$$=2\sqrt{45}\times 2=12\sqrt{5}$$

21 500

★타원의 정의에 따라 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리 합이 장축의 길이와 같음을 이용하는 문제

삼각형 $PF'R$의 넓이가 $38\sqrt{5}$, 높이가 $\overline{PR}=\overline{HQ}=4\sqrt{5}$이므로 밑변 $F'R$의 길이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{F'R}\times4\sqrt{5}=38\sqrt{5}\ \Rightarrow\ \overline{F'R}=19$$

이며, 빗변 $\overline{PF'}$의 길이는

$$\overline{PF'}=\sqrt{19^2+(4\sqrt{5})^2}=\sqrt{441}=21$$

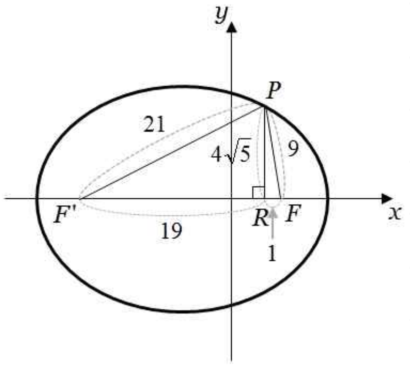
이 된다. 또한 타원의 정의에 의해 타원의 장축 길이와 타원 위의 한 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합이 같으므로

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=30\ \Rightarrow\ \overline{PF}=9$$

이다. 이때, 삼각형 PRF에 피타고라스의 정리를 적용하면

$$\overline{RF}=\sqrt{9^2-(4\sqrt{5})^2}=1$$

이고, 지금까지 구한 것들을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $c^2=a^2-b^2$)이 위 타원과 합동이라면

(장축의 길이)$=2a=30\ \Rightarrow\ a=15$

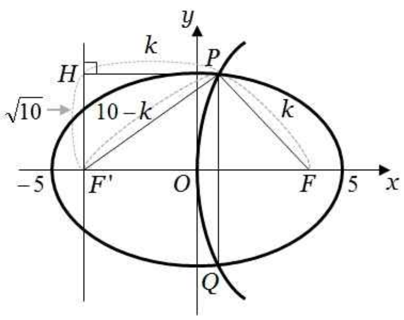
(초점 사이의 거리)$=2c=20\ \Rightarrow\ c=10$

$b^2=a^2-c^2=15^2-10^2=125$

이고, 단축의 길이가 $m=2b$이므로 m^2의 값은 다음과 같다.

$m^2=4b^2=4\times125=500$

22 103



타원의 중심이 원점이므로 $\overline{OF}=\overline{OF'}$이고, 포물선의 초점이 F이므로 포물선의 준선은 점 F'을 지나면서 x축에 수직인 직선이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{PF}=\overline{PH}$가 성립하고, 이를 k로 둔다. 이때, 타원의 정의에 따라 $\overline{PF}+\overline{PF'}=10$이므로

$$\overline{PF'}=10-\overline{PF}=10-k$$

가 성립한다.

그리고 타원과 포물선 모두 x축에 대해 대칭이므로 두 점 P, Q도 x축에 대해 대칭이며, $\overline{PQ}=2\sqrt{10}$이므로 점 P의 y좌표는 $\sqrt{10}$이다. 따라서 $\overline{HF'}=\sqrt{10}$이며, 삼각형 PHF'에 피타고라스의 정리를 적용하면

$$k^2+(\sqrt{10})^2=(10-k)^2\ \Rightarrow\ 20k=90\ \Rightarrow\ k=\frac{9}{2}$$

$$\overline{PF}\times\overline{PF'}=k\times(10-k)=\frac{9}{2}\times\frac{11}{2}=\frac{99}{4}$$

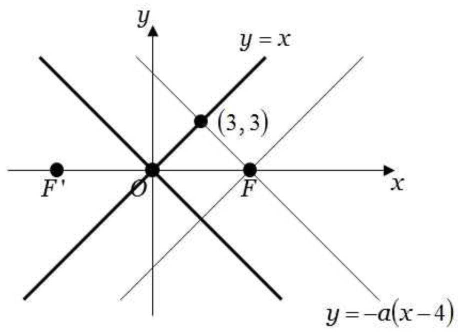
$$\therefore p+q=103$$

23 ①

★쌍곡선의 점근선에 대한 문제

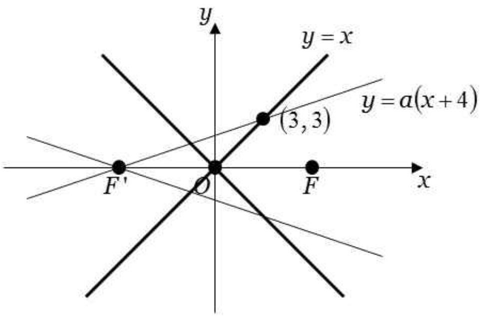
쌍곡선 C_1은 중심이 $(0,0)$, 점근선이 $y=\pm x$이고, 쌍곡선 C_2는 중심이 $(m,0)$, 점근선은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$의 점근선 $y=\pm ax$를 x축으로 m만큼 평행이동한 $y=\pm a(x-m)$이다. 또한 쌍곡선 C_1의 초점이 $F(4,0)$, $F'(-4,0)$ 두 개이므로 쌍곡선 C_2의 중심 $(m,0)$이 초점 F와 일치할 때, 초점 F'과 일치할 때 두 경우로 나눠서 접근해야 한다.

i) 쌍곡선 C_2의 중심 $(m,0)$이 초점 $F(4,0)$과 일치할 때
$m=4$이며, 쌍곡선 C_1의 점근선 $y=\pm x$와 쌍곡선 C_2의 점근선 $y=\pm a(x-4)$을 좌표평면에 그리면 다음과 같다.



따라서 점 $(3,3)$은 두 점근선 $y=x$, $y=-a(x-4)$의 교점이며, $a=3$이 된다.

ii) 쌍곡선 C_2의 중심 $(m,0)$이 초점 $F'(-4,0)$과 일치할 때
$m=-4$이며, 쌍곡선 C_1의 점근선 $y=\pm x$와 쌍곡선 C_2의 점근선 $y=\pm a(x-4)$을 좌표평면에 그리면 다음과 같다.



따라서 점 $(3, 3)$은 두 점근선 $y=x$, $y=a(x+4)$의 교점이며, $a=\frac{3}{7}$이 된다.

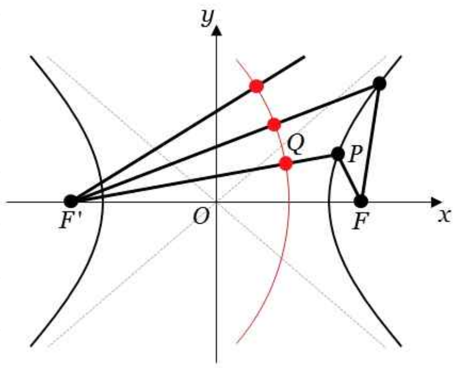
$i)$로부터 $a+m=3+4=7$, $ii)$로부터 $a+m=\frac{3}{7}-4=-\frac{25}{7}$이므로 두 $a+m$값의 곱은 $7\times\left(-\frac{25}{7}\right)=-25$이다.

24 ③

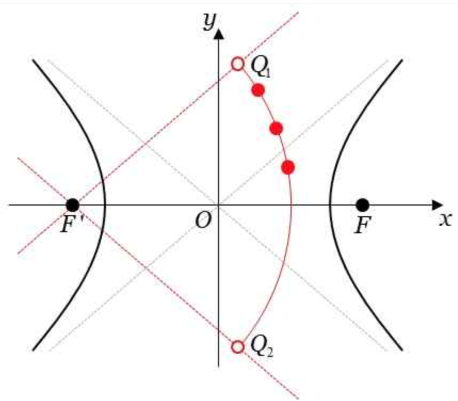
쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 정의에 따라 $\overline{PF'}-\overline{PF}=6$이 성립하고, 여기에 $\overline{PF}=\overline{PQ}$를 적용하면 다음과 같다.

$$(\overline{PQ}+\overline{QF'})-\overline{PQ}=6 \Rightarrow \overline{QF'}=6$$

따라서 점 Q의 자취는 점 F'을 중심으로 하면서 반지름의 길이가 6인 원의 일부다.



위 그림과 같이 점 F'을 중심으로 하면서 반지름이 6인 원(빨간 원)을 그리고, 이 원과 선분 PF'의 교점을 점 Q로 잡는다. 이때, 점 P가 쌍곡선을 따라 오른쪽 위로 올라갈수록 점 Q는 빨간 원을 따라 왼쪽 위로 올라간다.



또한 점 P가 쌍곡선의 점근선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$로 한없이 다가가면 점 Q는 점 F'을 지나면서 점근선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$에 평행한 직선과 원의 교점 Q_1로 한없이 다가감을 알 수 있다. 마찬가지로 점 P가 쌍곡선을 따라 오른쪽 아래로 내려갈수록 점 Q는 원을 따라 왼쪽 아래로 내려가며, 점 F'을 지나면서 점근선 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$에 평행한 직선과 원의 교점 Q_2로 한없이 다가감을 알 수 있다. 그러므로 점 Q가 나타내는 도형은 호 Q_1Q_2이다.

점근선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각이 30°이므로 각 $Q_1F'Q_2$의 크기는 60°이며, 호 Q_1Q_2의 길이는 다음과 같다.

$$6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$$

25 13

★쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하는 문제

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2}, 2)$에서 접선 방정식이

$$\frac{2\sqrt{2}x}{4}-\frac{2y}{4}=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{1}{2}y=1$$

이므로 점 A의 좌표는 $(\sqrt{2}, 0)$이다.

또한 쌍곡선의 초점 F'의 좌표가 $(-2\sqrt{2}, 0)$이므로 점 Q의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$$\overline{QF'}=\sqrt{(x_1+2\sqrt{2})^2+{y_1}^2}=1$$

$$(x_1+2\sqrt{2})^2+{y_1}^2=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

이고, 점 Q가 쌍곡선 위의 점이므로

$${x_1}^2-{y_1}^2=4 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

가 성립한다. ①, ②를 연립해서 더하면

$$(x_1+2\sqrt{2})^2+{x_1}^2=5$$

$$2{x_1}^2+4\sqrt{2}x_1+3=0$$

$$x_1=\frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}$$

그런데 $x_1=-\sqrt{2}$이면 y_1의 값이 허수이므로

$$x_1=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$${y_1}^2={x_1}^2-4=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2} \Rightarrow y_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이고, 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 된다. 따라서

$$\overline{QA}^2=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{25}{2}+\frac{1}{2}=13$$

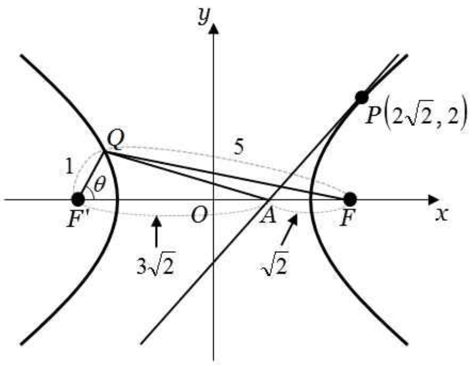
[다른 방법] 점 Q의 좌표를 구하는 대신, 쌍곡선의 정의로 선분 QA가 포함된 삼각형의 변의 길이를 구하고 코사인 법칙

을 적용해서 구할 수도 있다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2},\,2)$에서 접선 방정식이

$$\frac{2\sqrt{2}\,x}{4}-\frac{2y}{4}=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{1}{2}y=1$$

이므로 점 A의 좌표는 $(\sqrt{2},\,0)$이다. 그리고 쌍곡선의 초점 F, F'의 좌표가 각각 $(2\sqrt{2},\,0)$, $(-2\sqrt{2},\,0)$이므로 $\overline{AF}=\sqrt{2}$, $\overline{AF'}=3\sqrt{2}$이다.
또한 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QF}-\overline{QF'}=4$이고, $\overline{QF'}=1$이므로 $\overline{QF}=5$가 된다.



이때, $\angle QF'F=\theta$로 두면 삼각형 $QF'F$에서 코사인 제2법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{(4\sqrt{2})^2+1^2-5^2}{2\times 4\sqrt{2}\times 1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고, 다시 삼각형 $QF'A$에 코사인 제2법칙을 적용하면

$$\overline{QA}^2=(3\sqrt{2})^2+1^2-2\times 3\sqrt{2}\times 1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=13$$

26 15

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점이 $F(3,\,0)$, $F'(-3,\,0)$이므로

$$a^2+b^2=9$$

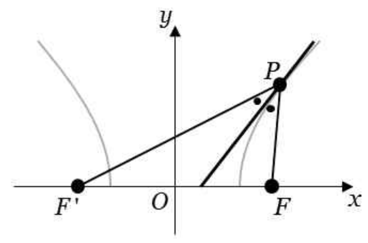
가 성립한다. 또한 쌍곡선 위의 점 $P(4,\,k)$에서의 접선 방정식 $\dfrac{4x}{a^2}-\dfrac{ky}{b^2}=1$에 선분 $F'F$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표 $(1,\,0)$을 대입하면

$$\frac{4}{a^2}=1 \Rightarrow a^2=4,\ b^2=5$$

가 된다.
따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$이고, 점 P의 좌표 $(4,\,k)$를 대입하면

$$4-\frac{k^2}{5}=1 \Rightarrow k^2=15$$

[다른 방법] 다음과 같은 쌍곡선의 접선의 성질을 이용하면 이 문제를 보다 쉽게 풀 수 있다.

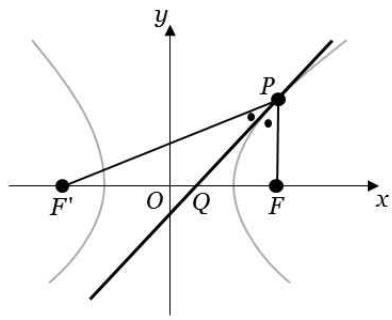


쌍곡선 위의 한 점 P에서 그은 접선은 점 P와 두 초점 F, F'을 이어서 만든 각 FPF'을 이등분한다.

쌍곡선 위의 점 P에서의 접선은 삼각형 PFF'의 한 내각 FPF'의 이등분선이므로

$$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{QF'}:\overline{QF}=2:1$$

이 성립한다.

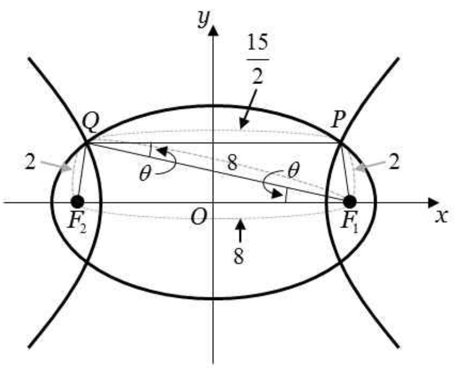


따라서

$$2\overline{PF}=\overline{PF'}$$
$$2\sqrt{1^2+k^2}=\sqrt{7^2+k^2}$$
$$4(1+k^2)=49+k^2$$
$$k^2=15$$

27 ⑤

★타원과 쌍곡선의 결합 문제



점 Q는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{p}=1$, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{q}=1$의 교점이므로 타원, 쌍곡선의 정의에 따라

$$\overline{QF_1}+\overline{QF_2}=10,\ \overline{QF_1}-\overline{QF_2}=6$$

이 성립하고 $\overline{QF_1}=8$, $\overline{QF_2}=2$임을 알 수 있다. 또한 타원과 쌍곡선 모두 y축에 대해 대칭이므로 교점 P, Q와 초점 F_1, F_2도 y축에 대해 대칭이다. 그러므로

$$\overline{PF_1}=\overline{QF_2}=2$$

다음으로 삼각형 PQF_1에 코사인 제2법칙을 적용해서 선분 PQ의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{PF_1}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QF_1}^2-2\times\overline{PQ}\times\overline{QF_1}\times\cos\theta$$

$$2^2=\overline{PQ}^2+8^2-2\times\overline{PQ}\times 8\times\frac{31}{32}\qquad\cdots ①$$

$$2\overline{PQ}^2-31\overline{PQ}+120=0$$

$$(\overline{PQ}-8)(2\overline{PQ}-15)=0$$

$$\overline{PQ}=\frac{15}{2},\ 8$$

$\overline{PQ}\ /\!/\ (x축)$이므로 $\angle PQF_1=\angle QF_1F_2$이며, 삼각형 QF_1F_2에 코사인 제2법칙을 적용하면

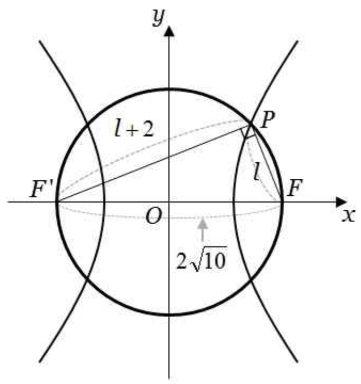
$$2^2=\overline{F_1F_2}^2+8^2-2\times\overline{F_1F_2}\times 8\times\frac{31}{32}$$

이므로 ①과 같은 식이 나타난다. 이 방정식의 근도 $\frac{15}{2}$와 8이므로 두 근 중 하나는 선분 PQ의 길이, 다른 하나는 선분 F_1F_2의 길이가 된다.

따라서 사다리꼴 PQF_2F_1의 둘레 길이는

$$\frac{15}{2}+2+8+2=\frac{39}{2}$$

28 ①



쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$에서

$$c^2=4+6=10\ \Rightarrow\ c=\sqrt{10}$$

이므로 원의 지름은 $\overline{FF'}=2\sqrt{10}$이다. 또한 쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$이므로 $\overline{PF}=l$일 때 $\overline{PF'}=l+4$이다.

이때, 원의 지름 $\overline{FF'}$의 원주각 $\angle FPF'$이 직각이므로 피타고라스의 정리에 따라 다음이 성립한다.

$$l^2+(l+4)^2=(2\sqrt{10})^2$$

$$(l+6)(l-2)=0$$

$$l=2=\overline{PF}$$

$$\therefore \cos(\angle PFF')=\frac{\overline{PF}}{\overline{FF'}}=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

29 6

삼각형 $CF'Q$의 둘레 길이 s_1, 삼각형 COF의 둘레 길이 s_2, 둘레 길이의 차 s_1-s_2는 다음과 같이 표현된다.

$$s_1=2\overline{CF}+2\overline{OF},\ s_2=\overline{CF}+\overline{OF}+\overline{OC}$$

$$s_1-s_2=\overline{CF}+\overline{OF}-\overline{OC}$$

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$로부터 $c^2=4+16=20$이므로 초점 F의 좌표는 $(2\sqrt{5},0)$, 점 C의 좌표가 $(0,a)$, 점근선 l_1의 방정식이 $y=2x$이고 직선 CF와 점근선 l_1이 직교하므로 다음이 성립한다.

(직선 CF의 기울기)×(점근선 l_1의 기울기)$=-1$

$$-\frac{a}{2\sqrt{5}}\times 2=-1\ \Rightarrow\ a=\sqrt{5}$$

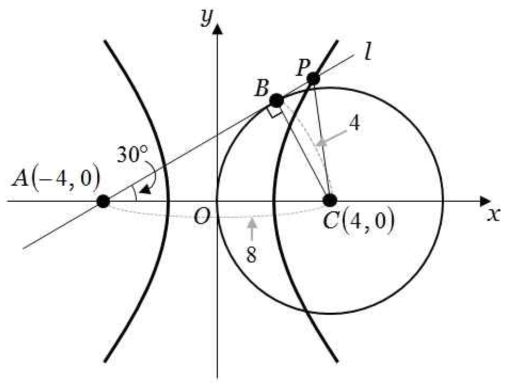
따라서

$$\begin{aligned}s_1-s_2&=\overline{CF}+\overline{OF}-\overline{OC}\\&=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}\\&=5+\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$m+n=5+1=6$$

30 ①

★쌍곡선의 정의에 따라 쌍곡선 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리 차가 주축의 길이와 같음을 이용하는 문제



원 $(x-4)^2+y^2=16$의 중심은 점 $C(4,0)$이며, 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=4$이므로

$$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1,\ \angle CAB=30^\circ$$

가 성립한다. 이를 이용해서 삼각형 PAC에 코사인 제2법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\overline{PC}^2=\overline{PA}^2+8^2-2\times\overline{PA}\times 8\times\cos 30^\circ$$

$$\overline{PC}^2=\overline{PA}^2-8\sqrt{3}\times\overline{PA}+64$$

또한 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PA}-\overline{PC}=2\sqrt{3}$이고, $\overline{PC}=l$로 두면 $\overline{PA}=l+2\sqrt{3}$이므로

$$l^2=(l+2\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}(l+2\sqrt{3})+64$$

$$l=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

[다른 방법] 쌍곡선의 정의 대신, 쌍곡선의 방정식과 직선 l의 방정식을 연립해서 푸는 방법도 생각할 수 있다.

원 $(x-4)^2+y^2=16$의 중심은 점 $C(4, 0)$이며, 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=4$이므로

$$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1,\ \angle CAB=30^\circ$$

가 성립한다. 따라서 직선 l의 기울기는 $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 방정식은 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+4)$이다.

이 직선 l의 방정식을 쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{13}=1$과 연립하고 y를 소거하면

$$\frac{x^2}{3}-\frac{1}{13}\times\frac{1}{3}\times(x+4)^2=1$$

$$(6x+11)(2x-5)=0$$

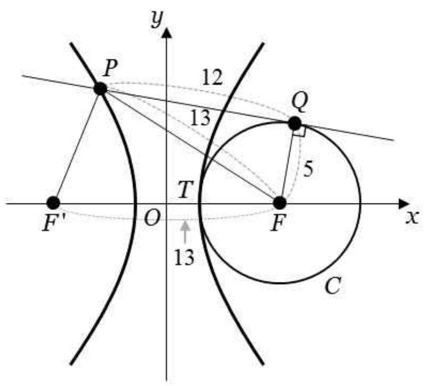
$$x=-\frac{11}{6},\ \frac{5}{2}$$

이고, 점 P의 x좌표가 양수이므로 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{13}{2\sqrt{3}}\right)$이 된다. 그러므로

$$\overline{PC}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+\left(\frac{13}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

31 ①

다음 그림과 같이 선분 PF, PF', QF를 그리면 선분 PF, QF, FF'의 길이를 구할 수 있고, 쌍곡선의 정의를 적용하면 선분 PF'의 길이를 구할 수 있다.



쌍곡선의 방정식 $\dfrac{4x^2}{9}-\dfrac{y^2}{40}=1$에서 $c^2=\dfrac{9}{4}+40=\dfrac{169}{4}$이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{13}{2}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{13}{2}, 0\right)$이다.

따라서 $\overline{FF'}=13$이다.

원 C와 쌍곡선의 접점 T는 쌍곡선의 꼭짓점 가운데 하나이며, 좌표가 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$이므로 원 C의 반지름은 $\overline{TF}=\overline{QF}=5$가 된다.

삼각형 PQF에서 $\overline{PQ}=12$이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PF}=13$이고, 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF}-\overline{PF'}=3$이므로

$$\overline{PF'}=\overline{PF}-3=10$$