출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	④	12	①	23	②	23	③	23	⑤
2	③	13	①	24	③	24	①	24	②
3	⑤	14	③	25	④	25	⑤	25	④
4	⑤	15	①	26	⑤	26	②	26	④
5	④	16	4	27	③	27	②	27	①
6	③	17	13	28	②	28	④	28	②
7	③	18	3	29	190	29	13	29	26
8	④	19	10	30	219	30	45	30	384
9	③	20	75						
10	④	21	9						
11	③	22	5						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

공통 해설 강의 QR코드

공통과목

1. 정답) ④ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $2^{-\frac{2}{3}} \times \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{2}{3}} \times 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{3}} = 2$

2. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $f(x)=3x^2(x-1)$의 도함수는 $f'(x)=3x^2+6x(x-1)$이고

$f'(0)+f'(1)=0+3=3$이다.

3. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 등차중항의 성질에 의해 $a_1a_5=a_3^2=3a_3$이고 $a_3=3>0$이다.

공비를 r라 할 때, $a_2=2$에서 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}=r$이고

$\frac{a_6}{a_4}=\frac{a_4 \times r^2}{a_4}=r^2=\frac{9}{4}$이다.

4. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x\to 0}f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=3$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=5$이다.

5. 정답) ④ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $3\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}=-2$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$3\cos^2\theta-1=-2\cos\theta$이고 정리하면

$3\cos^2\theta+2\cos\theta-1=(3\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$이다.

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\cos\theta>0$이고 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$이고

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan\theta=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$이므로

$\sin\theta-\tan\theta=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

6. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 방정식 $x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k=0$의 실근의 개수는

곡선 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$와 x축의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$의 도함수는 $y'=3x^2-9x+6$이고

$y'=3(x-1)(x-2)=0$에서 함수 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$는

$x=1$에서 극댓값 $\frac{5}{2}+k$, $x=2$에서 극솟값 $2+k$를 가진다.

곡선 $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$와 x축의 교점의 개수가 2이려면

극값이 0이어야 하고, $\frac{5}{2}+k=0$ 또는 $2+k=0$에서

$k=-\frac{5}{2}$ 또는 $k=-2$이다.

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 5이다.

7. 정답) ③ [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $x^2-3x+2=x-1$에서 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$이고

곡선 $y=x^2-3x+2$와 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점의 x좌표는

각각 1 또는 3이다.

$\int_1^3(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3=-\frac{4}{3}$이므로

곡선 $y=x^2-3x+2$와 직선 $y=x-1$로

둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.

$x^2=ax$에서 $x^2-ax=x(x-a)=0$이고

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$가 만나는 두 점의 x좌표는

각각 0 또는 a이다.

$\int_0^a(x^2-ax)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}=-\frac{a^3}{6}$이므로

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{a^3}{6}$이고

$\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$에서 $a^3=8$, $a=2$이다.

8. 정답) ④ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $g(t)=\frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t}$

$=f(t+1)-f(t)$

$=\sin\pi(t+1)-\sin\pi t$

$=-\sin\pi t-\sin\pi t$

$=-2\sin\pi t$

이다.

$|g(t)|=1$을 만족시키는 t는 $|-2\sin\pi t|=1$에서

$\sin\pi t=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\pi t=-\frac{1}{2}$이다.

$0\le t\le 3$에서

$\sin\pi t=\frac{1}{2}$를 만족시키는 t의 값은 $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{17}{6}$이고

$\sin\pi t=-\frac{1}{2}$를 만족시키는 t의 값은 $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$이다.

따라서 모든 t의 값의 합은 $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=9$이다.

9. 정답) ③ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $3\log_2\sqrt{\frac{2}{3}n+2}=k$ (k는 정수)라 두면

$3\log_2\sqrt{\frac{2}{3}n+2}=\frac{3}{2}\log_2\frac{2n+6}{3}=k$이고

$\log_2\frac{2n+6}{3}=\log_2\frac{n+3}{3}+1=\frac{2}{3}k$, $2^{\frac{2}{3}k-1}=\frac{n}{3}+1$

$3\times2^{\frac{2}{3}k-1}-3=n$이다.

n이 300 이하의 자연수가 되려면 k가 3의 배수이어야 하므로

$k=3$일 때, $3\times2^{2-1}-3=3=n$

$k=6$일 때, $3\times2^{4-1}-3=21=n$

$k=9$일 때, $3\times2^{6-1}-3=93=n$

$k=12$일 때, $3\times2^{8-1}-3=381=n>300$

이고 $3+21+93=117$이다.

10. 정답) ④ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=2$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하다.

즉, $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=2f(2)$에서 $f(2)=0$이다.

함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>2) \\ f(x)+xf'(x) & (x<2) \end{cases}$

이고 $x=2$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하므로

$f'(2)=f(2)+2f'(2)$에서 $f(2)=0$이므로 $f'(2)=0$이다.

$f(2)=0$, $f'(2)=0$에서 이차함수 $f(x)=(x-2)^2$이다.

함수

$$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x\ge 2) \\ x(x-2)^2 & (x<2) \end{cases}$$

이고 도함수

$$g'(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x>2) \\ 3x^2-8x+4 & (x\le 2) \end{cases}$$

이다.

$x>2$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가하고

$x\le 2$에서 $3a^2-8a+4=(3a-2)(a-2)=0$이므로

$x=a$에서 극댓값을 가지는 실수 a는 $a=\frac{2}{3}$이다.

따라서 $f(a)=\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{16}{9}$이다.

11. 정답) ③ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : 엇각에 의해 $\angle CPQ=\angle BCP$이고

$\cos(\angle CPQ)=\cos(\angle BCP)=\frac{3}{4}$이다.

삼각형 CPQ에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{CQ}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{3}{4}=14$에서 $\overline{CQ}=\sqrt{14}$이고

삼각형 BCP에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{BP}^2=6^2+5^2-2\times6\times5\times\frac{3}{4}=16$에서 $\overline{BP}=4$이다.

두 삼각형 APQ, ABC는 서로 닮음이고 $\overline{PQ}=2$, $\overline{BC}=6$에서

닮음비는 $1:3$이다. 닮음비에 의해 $\overline{AQ}=\frac{\sqrt{14}}{2}$, $\overline{AP}=2$이다.

따라서 삼각형 APQ는 $\overline{AP}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이고

선분 AQ의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM은 선분 AQ를

수직이등분하고, $\cos(\angle PQM)=\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{8}$이다.

따라서 $\sin(\angle PQM)=\frac{5\sqrt{2}}{8}$이므로

삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{14}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{8}$이다.

12. 정답) ① [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim\limits_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+f(t)}$의 분자는 0으로 가므로 극한값이 존재하지

않으려면 $x\to t$일 때 분모도 0으로 가야한다.

이때, $t^2-2t^2+f(t)=0$에서 $f(t)=t^2$이면

$\lim\limits_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+f(t)}=\lim\limits_{x\to t}\frac{x-t}{x^2-2tx+t^2}=\lim\limits_{x\to t}\frac{1}{x-t}$이므로

극한값이 존재하지 않는다.

즉, $f(t)=t^2$인 t가 2뿐이다.

ⅰ) $f(x)$의 최고차항의 계수가 1인 경우

$f(x)=x^2+a(x-2)$ 꼴이고

$f(3)=0$에서 $a=-9$, $f(x)=x^2-9(x-2)$이다.

이때, $f(0)=18$이다.

ⅱ) $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이 아닌 경우

$f(x)=x^2+b(x-2)^2$ 꼴이고

$f(3)=0$에서 $b=-9$, $f(x)=x^2-9(x-2)^2$이다.

이때, $f(0)=-36$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(0)$의 최댓값은 18, 최솟값은 -36이고

합은 -18이다.

13. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $\sum\limits_{k=1}^{5}|a_k|=\sum\limits_{k=1}^{7}a_{k+4}$에서

공차 d가 음수이면 $a_4<0$이므로 $0>a_4>a_5>\cdots$ 이고

$\sum\limits_{k=1}^{5}|a_k|>0$, $\sum\limits_{k=1}^{7}a_{k+4}=a_5+a_6+\cdots+a_{11}<0$이므로 모순이다.

공차 $d=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_4<0$이고

$\sum\limits_{k=1}^{5}|a_k|>0$, $\sum\limits_{k=1}^{7}a_{k+4}=a_5+a_6+\cdots+a_{11}<0$이므로 모순이다.

따라서 공차 d는 양수이고 $a_4<0$이므로

$a_1<a_2<a_3<a_4<0$이다.

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}$에서

$-a_1-a_2-a_3-a_4+|a_5|=a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11}$,

$|a_5|=\sum_{k=1}^{11}a_k$이고 등차중항에 의해 $|a_5|=11a_6$이다.

$a_5>0$이면 $a_5=11a_6$에서

$11a_6-a_5=10a_6+(a_6-a_5)=10a_6+d>0$이므로 모순이다.

$a_5=0$이면 $0=11a_6$에서 $a_6=0$이므로 모순이다.

따라서 $a_5<0$이고 $-a_5=11a_6$에서

$11a_6+a_5=12a_6-d=0$, $a_6=\frac{d}{12}$이다.

$\sum_{k=2}^{10}a_k=a_2+a_3+\cdots+a_{10}=9a_6=\frac{3}{4}d$이고

$d>0$이므로 $\frac{3}{4}d$가 4 이하의 정수가 되도록 하는 d의 값은

$d=\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, 4, $\frac{16}{3}$이다.

따라서 모든 실수 d의 값의 합은 $\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+4+\frac{16}{3}=\frac{40}{3}$이다.

14. 정답) ③ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=\frac{5}{3}\neq5=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to a+}f(x)\neq\lim_{x\to a-}f(x)$을 만족시키는 a는 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(f(x))$가 불연속일 가능성이 있는 x는

$f(x)=1$이거나 $x=1$인 x이다.

$f(x)=1$에서 $x=-3$, $x=3$이다.

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to\frac{5}{3}-}f(t)=\frac{13}{9}$이고

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to5-}f(t)=\frac{1}{3}$이므로

$x=1$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to-3+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)$이고

$\lim_{x\to-3-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)$이므로

ㄱ에 의해 $x=-3$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)$이고

$\lim_{x\to3-}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)$이므로

ㄱ에 의해 $x=3$에서 불연속이다.

따라서 불연속인 모든 x값의 합은 $-3+1+3=1$이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 연속이려면

$\lim_{x\to1+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to1-}f(x)f(x-a)$이고

$\lim_{x\to a+1+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+1-}f(x)f(x-a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to1-}f(x)f(x-a)$에서

$a>0$일 때, $\frac{5}{3}(5-a)=5(5-a)$에서 $a=5$이다.

$a=0$일 때, $\frac{25}{9}\neq25$이므로 불연속이다.

$a<0$일 때, $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}\right)=5\left(\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}\right)$에서 $a=-5$이다.

$\lim_{x\to a+1+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+1-}f(x)f(x-a)$에

$a=5$와 $a=-5$를 대입해 계산하면 식이 성립한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 0이다. (거짓)

15. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : ⅰ) $k=1$인 경우

$1\leq a_1<2$이다.

$a_1\geq1$이므로 $a_2=a_1$이다. $(1\leq a_2<2)$

$a_2<2$이므로 $a_3=a_2+2$이다. $(3\leq a_3<4)$

$a_3\geq3$이므로 $a_4=a_3$이다. $(3\leq a_4<4)$

$a_4<4$이므로 $a_5=a_4+4$이다. $(7\leq a_5<8)$

$a_5\geq5$이므로 $a_6=a_5$이다. $(7\leq a_6<8)$

⋮

$a_7\geq7$이므로 $a_8=a_7$이다. $(7\leq a_8<8)$

$a_8<8$이므로 $a_9=a_8+8$이다. $(15\leq a_9<16)$

$a_9\geq9$이므로 $a_{10}=a_9$이다. $(15\leq a_{10}<16)$

⋮

$a_{15}\geq15$이므로 $a_{16}=a_{15}$이다. $(15\leq a_{16}<16)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16}a_n&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+\cdots+a_8)+(a_9+\cdots+a_{16})\\&=2a_1+2(a_1+2)+4(a_1+2+4)+8(a_1+2+4+8)\\&=16a_1+4+24+112\\&=16a_1+140\end{aligned}$$

이고 $\sum_{n=1}^{16}a_n=168$이므로 $16a_1+140=168$에서

$a_1=\frac{28}{16}=\frac{7}{4}$이다.

ⅱ) $k=2$인 경우

$3 \le a_1 < 4$이다.

$a_1 \ge 1$이므로 $a_2 = a_1$이다. $(3 \le a_3 < 4)$

$a_2 \ge 2$이므로 $a_3 = a_2$이다. $(3 \le a_3 < 4)$

$a_3 \ge 3$이므로 $a_4 = a_3$이다. $(3 \le a_4 < 4)$

$a_4 < 4$이므로 $a_5 = a_4 + 4$이다. $(7 \le a_5 < 8)$

$a_5 \ge 5$이므로 $a_6 = a_5$이다. $(7 \le a_6 < 8)$

$\vdots$

$a_7 \ge 7$이므로 $a_8 = a_7$이다. $(7 \le a_8 < 8)$

$a_8 < 8$이므로 $a_9 = a_8 + 8$이다. $(15 \le a_9 < 16)$

$a_9 \ge 9$이므로 $a_{10} = a_9$이다. $(15 \le a_{10} < 16)$

$\vdots$

$a_{15} \ge 15$이므로 $a_{16} = a_{15}$이다. $(15 \le a_{16} < 16)$

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + (a_9 + \cdots + a_{16})$$
$$= 4a_1 + 4(a_1 + 4) + 8(a_1 + 4 + 8)$$
$$= 16a_1 + 16 + 96$$
$$= 16a_1 + 112$$

이고 $\sum_{n=1}^{16} a_n = 168$이므로 $16a_1 + 112 = 168$에서

$a_1 = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}$이다.

ⅲ) $k=3$인 경우

$7 \le a_1 < 8$이다.

$a_1 \ge 1$이므로 $a_2 = a_1$이다. $(7 \le a_2 < 8)$

$a_2 \ge 2$이므로 $a_3 = a_2$이다. $(7 \le a_3 < 8)$

$\vdots$

$a_7 \ge 7$이므로 $a_8 = a_7$이다. $(7 \le a_8 < 8)$

$a_8 < 8$이므로 $a_9 = a_8 + 8$이다. $(15 \le a_9 < 16)$

$a_9 \ge 9$이므로 $a_{10} = a_9$이다. $(15 \le a_{10} < 16)$

$\vdots$

$a_{15} \ge 15$이므로 $a_{16} = a_{15}$이다. $(15 \le a_{16} < 16)$

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = (a_1 + \cdots + a_8) + (a_9 + \cdots + a_{16})$$
$$= 8a_1 + 8(a_1 + 8)$$
$$= 16a_1 + 64$$

이고 $7 \le a_1 < 8$에서 $176 \le \sum_{n=1}^{16} a_n < 192$이므로

$\sum_{n=1}^{16} a_n = 168$에 모순이다.

ⅳ) $k \ge 4$인 경우

$2^k - 1 \le a_1 < 2^k$이다.

$a_1 \ge 1$이므로 $a_2 = a_1$이다. $(2^k - 1 \le a_2 < 2^k)$

$a_2 \ge 2$이므로 $a_3 = a_2$이다. $(2^k - 1 \le a_3 < 2^k)$

$\vdots$

$a_{15} \ge 15$이므로 $a_{16} = a_{15}$이다. $(2^k - 1 \le a_{16} < 2^k)$

$\sum_{n=1}^{16} a_n = (a_1 + \cdots + a_{16}) = 16a_1$이고 $2^k - 1 \le a_1 < 2^k$에서

$240 \le 2^{k+4} - 2^4 \le \sum_{n=1}^{16} a_n < 2^{k+4}$이므로 $\sum_{n=1}^{16} a_n = 168$에

모순이다.

따라서 ⅰ)~ⅳ)에 의해 가능한 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$이다.

16. 정답) 4 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\log_3 18 + \frac{1}{2}\log_3 \frac{81}{4} = \log_3 18 + \log_3 \frac{9}{2}$
$$= \log_3 18 \times \frac{9}{2}$$
$$= \log_3 81$$
$$= 4$$

17. 정답) 13 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$의 양변을 부정적분하면

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$이다. (단, C는 적분상수)

$f(1) = 1 - 2 + 1 + C = C = 1$에서

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$이므로

$f(3) = 27 - 18 + 3 + 1 = 13$이다.

18. **정답)** 3 **[수학Ⅰ - 수열]**

해설 : $\sum_{k=1}^{10}(a_k+m)(b_k+m)=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+ma_k+mb_k+m^2)$

$$=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+m\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{10}m^2$$

$$=10m^2-20m+10$$

이고

$10m^2-20m+10=40$,

$10(m^2-2m-3)=10(m-3)(m+1)=0$이므로

$m=3$이다.

19. **정답)** 10 **[수학Ⅱ - 적분]**

해설 : 점 P의 시각 t에서의 위치와 가속도를 각각 $x(t)$, $a(t)$라 할 때,

$x(t)=\int_0^t v(t)dt=\frac{1}{2}at^2+bt$, $a(t)=v'(t)=a$이다.

$x(2)=2a+2b=4$, $a(2)=a=4$에서 $a=4$, $b=-2$이다.

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\int_0^k|v(t)|dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\{-v(t)\}dt+\int_{\frac{1}{2}}^k v(t)dt$$

$$=\left[-2t^2+2t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[2t^2-2t\right]_{\frac{1}{2}}^k$$

$$=2k^2-2k+1$$

이다. 움직인 거리가 25 이하이므로 $2k^2-2k+1\le 25$에서

$2k^2-2k-24=2(k+3)(k-4)\le 0$, $-3\le k\le 4$이다.

범위 내의 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

20. **정답)** 75 **[수학Ⅱ - 적분]**

해설 : $f(x)\ge 0$ $(x\le a,\ x\ge 3a)$에서

$$f(x)+|f(x)|=2f(x)$$

$$=2(x-a)(x-3a)$$

$$=2x^2-8ax+6a^2$$

이고

$f(x)<0$ $(a<x<3a)$에서 $f(x)+|f(x)|=0$이다.

$g(0)=0$이므로

$$g(x)=\int_0^x\{f(t)+|f(t)|\}dt$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3-4ax^2+6a^2x & (x\le a)\\ \frac{8}{3}a^3 & (a<x<3a)\\ \frac{2}{3}x^3-4ax^2+6a^2x+\frac{8}{3}a^3 & (x\ge 3a)\end{cases}$$

에서 $g(4a)=\frac{16}{3}a^3$이다.

$\frac{g(4a)-g(0)}{4a-0}=\frac{4}{3}a^2=3$에서 $a^2=\frac{9}{4}$, $a=\frac{3}{2}$이고

$50a=75$이다.

21. **정답)** 9 **[수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]**

해설 : 삼각형 BDP의 넓이가 삼각형 OBD의 넓이의 두 배이고,

두 삼각형의 높이가 $\overline{\mathrm{BD}}$로 같으므로 $\overline{\mathrm{PD}}=2\overline{\mathrm{OD}}$이고,

점 D는 선분 OP의 내분점이므로 $\mathrm{D}\left(\frac{k}{3},\ 0\right)$이다.

점 B는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이고 x좌표가 점 D와 같으므로

$\mathrm{B}\left(\frac{k}{3},\ \frac{2k}{3}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{k}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OC}}=\frac{k}{3}$이고

$\overline{\mathrm{OP}}=k$에서 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{2k}{3}$, $\mathrm{C}\left(\frac{2k}{3},\ 0\right)$이다.

점 A는 직선 $y=-x+12$ 위의 점이고 x좌표가 점 C와 같으므로

$\mathrm{A}\left(\frac{2k}{3},\ 12-\frac{2k}{3}\right)$이다.

두 점 A, B가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$\frac{2k}{3}=a^{\frac{k}{3}}$, $12-\frac{2k}{3}=a^{\frac{2k}{3}}$이고

두 식을 연립하면 $12-a^{\frac{k}{3}}=a^{\frac{2k}{3}}$에서

$a^{\frac{2k}{3}}+a^{\frac{k}{3}}-12=\left(a^{\frac{k}{3}}+4\right)\left(a^{\frac{k}{3}}-3\right)=0$, $a^{\frac{k}{3}}=3$이다.

$\frac{2k}{3}=a^{\frac{k}{3}}$에서 $\frac{2k}{3}=3$이고 $k=\frac{9}{2}$, $a^{\frac{k}{3}}=a^{\frac{3}{2}}=3$이므로

$a^3=9$이다.

22. 정답 : 5 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $f'(0)=0$이고 방정식 $(f\circ f')(x)=0$이 $x=0$을 실근으로 가지므로 $(f\circ f')(0)=f(0)=0$이다.

이때 $f(0)=f'(0)=0$에서 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

즉, $f(x)=mx^2(x-n)=mx^3-mnx^2$이라 둘 수 있다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 극값을 가지므로 $n\neq 0$이고

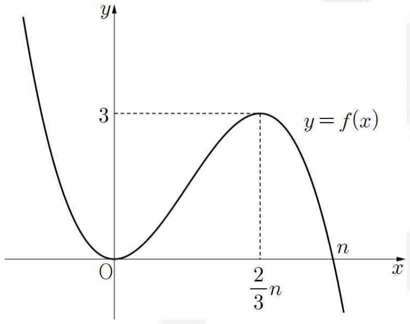
$f'(x)=3mx^2-2mnx=mx(3x-2n)$에서

함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=\frac{2}{3}n$에서 극값을 갖는다.

ⅰ) $n>0$인 경우

조건 (가)에서 극댓값과 극솟값의 합이 3이므로

$m<0$이고 극댓값이 3이어야 한다.

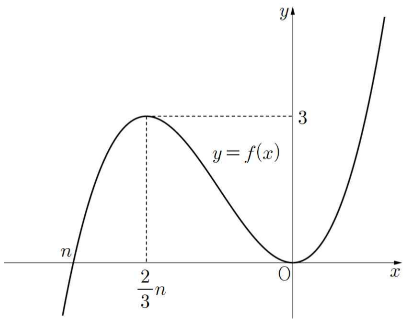


이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}n$에서 극대이므로 $f\left(\frac{2}{3}n\right)=3$이다.

ⅱ) $n<0$인 경우

조건 (가)에서 극댓값과 극솟값의 합이 3이므로

$m>0$이고 극댓값이 3이어야 한다.



이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}n$에서 극대이므로 $f\left(\frac{2}{3}n\right)=3$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에서 모두 $f\left(\frac{2}{3}n\right)=3$이다.

방정식 $(f\circ f')(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $f'(x)=n$이고

방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근 $x=0$, $x=\frac{2}{3}n$을 가지므로

이차방정식 $f'(x)=n$은 중근을 가져야 한다.

함수 $f'(x)=3mx^2-2mnx$에 대하여 곡선 $y=f'(x)$는

직선 $x=\frac{n}{3}$에 대하여 대칭이므로 $f'\left(\frac{n}{3}\right)=n$이다.

$f\left(\frac{2}{3}n\right)=3$에서 $mn^3=-\frac{81}{4}$,

$f'\left(\frac{n}{3}\right)=n$에서 $mn=-3$이고 위와 연립하면 $n^2=\frac{27}{4}$이다.

이때 방정식 $(f\circ f')(x)=0$의 서로 다른 세 실근은

0, $\frac{n}{3}$, $\frac{2}{3}n$이므로

$\alpha\times\beta=\frac{2}{9}n^2=\frac{2}{9}\times\frac{27}{4}=\frac{3}{2}$이고 $p+q=5$이다.

확률과 통계

23. 정답) ② [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : $0\le r\le 6$인 정수 r에 대하여

각 항은 ${}_6\mathrm{C}_r 2^r x^r\left(-\frac{1}{4}\right)^{6-r}={}_6\mathrm{C}_r(-1)^{6-r}2^{3r-12}x^r$이므로

$r=3$일 때, x^3의 계수는

${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3 2^{-3}=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2}$이다.

24. 정답) ③ [확률과 통계 - 확률]

해설 : 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

각각의 두 사건

A와 B^C, A^C과 B, A^C과 B^C

도 모두 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C)$이고

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B-A)=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A-B)&=\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

25. 정답) ④ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : 여학생 4명이 앉는 경우의 수 ⇨ $\frac{4!}{4}=3!=6$

이웃할 두 명의 남학생을 뽑는 경우의 수 ⇨ ${}_3C_1=3$

여학생 4명의 사이사이에 이웃할 남학생 두 명과 남은 한 명의 남학생이 앉는 경우의 수 ⇨ ${}_4P_2\times 2!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 3\times 24=432$이다.

26. 정답) ⑤ [확률과 통계 - 통계]

해설 : 확률밀도함수의 정의에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

함수 $y=\frac{1}{2}f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$이고

세 직선 $y=\frac{1}{2}k$, $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k이다.

따라서 $k-\frac{1}{2}=1$, $k=\frac{3}{2}$이다.

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (0\le x\le 1) \\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

이므로 $g(x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}f(x)$에서

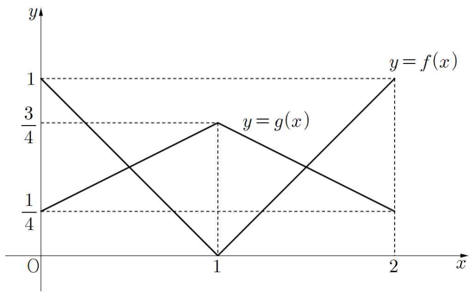
$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & (0\le x\le 1) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{4} & (1<x\le 2)\end{cases}$$

이고

$$\mathrm{P}\left(0\le Y\le \frac{1}{k}\right)=\mathrm{P}\left(0\le Y\le \frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{12}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{18}$$

[참고]

두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.



27. 정답) ③ [확률과 통계 - 확률]

해설 : 모든 함수 $f:X\to X$의 개수는 $4^4=256$

네 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$로 가능한 순서쌍을 모두 구하면

3은 적어도 한 개 포함하고,

2 두 개와 4 한 개 중에서 한쪽만을 포함해야 하므로

$(2,2,3,3)$ ⇨ $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

$(2,2,3,1)$ ⇨ $\frac{4!}{2!}=12$

$(4,3,3,3)$ ⇨ $\frac{4!}{3!}=4$

$(4,3,3,1)$ ⇨ $\frac{4!}{2!}=12$

$(4,3,1,1)$ ⇨ $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$6+12+4+12+12=46$이고

따라서 임의의 함수 f가 주어진 조건을 만족시킬 확률은

$\frac{46}{256}=\frac{23}{128}$이다.

28. 정답) ② [확률과 통계 - 통계]

해설 : 주머니에서 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 할 때, 5 이하의 모든 자연수 k에 대하여

$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{5}$이다.

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$, ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(Y^2)=\frac{1+4+9+16+25}{5}=11$,

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=11-9=2$ ⋯ ㉡

확인한 5개의 수의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 표본평균의 분포와

㉠, ㉡에 의해

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=3$, ⋯ ㉢

$\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{1}{5}\times\mathrm{V}(Y)=\frac{2}{5}$ ⋯ ㉣

$X=5\overline{Y}$이므로 ㉢, ㉣에 의해

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(5\overline{Y})+\mathrm{V}(5\overline{Y})=5\times 3+25\times\frac{2}{5}=25$

29. 정답) 190 **[확률과 통계 - 경우의 수]**

해설 : $a+b+c=x$, $d+e=y$라 하면

a, b, c, d, e는 자연수이므로 $x \geq 3$, $y \geq 2$이다.

조건 (가)에서 $x+y=12$이고, 조건 (나)에 의해 x는 y의 배수이어야 하므로 가능한 순서쌍 (x, y)는

$(10, 2)$, $(9, 3)$, $(8, 4)$, $(6, 6)$이다.

ⅰ) $a+b+c=10$, $d+e=2$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

이라 하면 a', b', c', d', e'은 5 이하의 음이 아닌 정수이고

$a'+b'+c'=7$, $d'+e'=0$을 모두 만족하는 모든 순서쌍

(a', b', c', d', e')의 개수를 구하면

${}_3H_7 \times 1 = {}_9C_2 = 36$

a', b', c' 중 하나가 6 또는 7인 것을 제외하면

$36-\left(3!+\dfrac{3!}{2!}\right)=27$

ⅱ) $a+b+c=9$, $d+e=3$

$a'+b'+c'=6$, $d'+e'=1$이고

${}_3H_6 \times {}_2H_1 = {}_8C_2 \times {}_2C_1 = 28 \times 2 = 56$

a', b', c' 중 하나가 6인 것을 제외하면

$56-\dfrac{3!}{2!}\times 2 = 50$

ⅲ) $a+b+c=8$, $d+e=4$

$a'+b'+c'=5$, $d'+e'=2$이고

${}_3H_5 \times {}_2H_2 = {}_7C_2 \times {}_3C_1 = 21 \times 3 = 63$

ⅳ) $a+b+c=6$, $d+e=6$

$a'+b'+c'=3$, $d'+e'=4$이고

${}_3H_3 \times {}_2H_4 = {}_5C_2 \times {}_5C_1 = 10 \times 5 = 50$

ⅰ)~ⅳ)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$27+50+63+50=190$이다.

30. 정답) 219 **[확률과 통계 - 확률]**

해설 : 한 번의 시행에서 각각의 점수를 얻을 확률은 아래와 같다.

2점 ⇨ $\dfrac{3}{6}$

3점 ⇨ $\dfrac{2}{6}$

4점 ⇨ $\dfrac{1}{6}$

각각의 시행에서 얻은 점수의 합이 11이 되는 경우는

$(2, 2, 2, 2, 3)$, $(2, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 3, 3)$, $(3, 4, 4)$이다.

ⅰ) $(2, 2, 2, 2, 3)$

$\left(\dfrac{3}{6}\right)^4 \times \left(\dfrac{2}{6}\right)^1 \times \dfrac{5!}{4!} = \dfrac{2\times 3^4 \times 5}{6^5} = \dfrac{3^3\times 5}{6^4}$이고

11점이 되기 전에 5점을 얻은 적이 있는 경우는

$(2, 3)(2, 2, 2)$에서 괄호 안의 수들의 자리를 바꾸는 경우이므로 그 확률은

$\left(\dfrac{3}{6}\right)^4 \times \left(\dfrac{2}{6}\right)^1 \times 2 = \dfrac{2^2\times 3^4}{6^5} = \dfrac{2\times 3^3}{6^4}$

ⅱ) $(2, 2, 3, 4)$

$\left(\dfrac{3}{6}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{6}\right)^1 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^1 \times \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{2^3\times 3^3}{6^4}$

11점이 되기 전에 5점을 얻은 적이 있는 경우는

$(2, 3)(2, 4)$에서 괄호 안의 수들의 자리를 바꾸는 경우이므로

그 확률은

$\left(\dfrac{3}{6}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{6}\right)^1 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^1 \times 2 \times 2 = \dfrac{2^3\times 3^2}{6^4}$

ⅲ) $(2, 3, 3, 3)$

$\left(\dfrac{3}{6}\right)^1 \times \left(\dfrac{2}{6}\right)^3 \times \dfrac{4!}{3!} = \dfrac{2^5\times 3}{6^4}$

11점이 되기 전에 5점을 얻은 적이 있는 경우는

$(2, 3)(3, 3)$에서 괄호 안의 수들의 자리를 바꾸는 경우이므로

그 확률은

$\left(\dfrac{3}{6}\right)^1 \times \left(\dfrac{2}{6}\right)^3 \times 2 = \dfrac{2^4\times 3}{6^4}$

ⅳ) $(3, 4, 4)$

$\left(\dfrac{2}{6}\right)^1 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \times \dfrac{3!}{2!} = \dfrac{2\times 3}{6^3} = \dfrac{2^2\times 3^2}{6^4}$

11점이 되기 전에 5점을 얻은 적이 있는 경우는 없다.

ⅰ)~ⅳ)에 의해 구하는 조건부확률은

$\dfrac{2\times 3^3 + 2^3\times 3^2 + 2^4 \times 3}{3^3\times 5 + 2^3 \times 3^3 + 2^5\times 3 + 2^2\times 3^2}$

$=\dfrac{18+24+16}{45+72+32+12}$

$=\dfrac{58}{161}$

$\therefore p+q=161+58=219$

미적분

23. 정답) ③ [미적분 - 미분법]

해설 : $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}=\frac{2+1}{3}=1$

24. 정답) ① [미적분 - 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta=8$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=0$이므로 $3\alpha-\beta=0$이다.

따라서 $\alpha=2$, $\beta=6$이고

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta=12$

25. 정답) ⑤ [미적분 - 적분법]

해설 : $y=\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$이므로 $y'=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$이다.

$$\int_4^9\sqrt{(y')^2+1}\,dx=\int_4^9\sqrt{\left(\frac{1}{16}x-\frac{1}{2}+x^{-1}\right)+1}\,dx$$
$$=\int_4^9\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^9$$
$$=\frac{1}{6}(27-8)+2(3-2)$$
$$=\frac{19}{6}+2$$
$$=\frac{31}{6}$$

26. 정답) ② [미적분 - 수열의 극한]

해설 : 선분 C_1D_1의 중점을 O_1,

점 O_1에서 선분 AB_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

삼각형 $B_1O_1H_1$은 $\angle O_1B_1H_1=\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형이므로

$\overline{B_1O_1}=2\times\overline{O_1H_1}$ ⋯ ㉠

선분 C_1D_1으로 하는 원 위에 두 점 C_1, H_1이 있으므로

$\overline{O_1C_1}=\overline{O_1H_1}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$2=\overline{B_1C_1}=\overline{B_1O_1}+\overline{O_1C_1}=3\times\overline{O_1H_1}$,

$\overline{O_1H_1}=\frac{2}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{9}\pi=\frac{\pi}{9}$

$\overline{AB_1}=\overline{B_1C_1}\times\cos\frac{\pi}{6}\times2=2\sqrt{3}$

$\overline{AB_2}=\overline{AB_1}-\overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}-2=2(\sqrt{3}-1)$이므로

닮음비는 $2\sqrt{3}:2(\sqrt{3}-1)=1:\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$,

넓이의 비는 $1:\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{\pi}{9}}{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}+1}{33}\pi$$

27. 정답) ② [미적분 - 적분법]

해설 : $f'(x)=2\cos2x$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=2\cos2t(x-t)+\sin2t$이고

$g(t)=-2t\cos2t+\sin2t$

$g(0)=0$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로 $h(0)=0$, $h(1)=\frac{\pi}{4}$

$h(t)=u$라 할 때, $t=g(u)$, $h'(t)dt=du$에서

$$\int_0^1 th'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}g(u)du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-2u\cos2u+\sin2u)du$$
$$=\left[-u\sin2u-\frac{1}{2}\cos2u-\frac{1}{2}\cos2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left[-u\sin2u-\cos2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=1-\frac{\pi}{4}$$

28. 정답) ④ [미적분 - 미분법]

해설 : $S=\int_0^t e^{x-a}dx=\left[e^{x-a}\right]_0^t=e^{-a}(e^t-1)$이다.

$e\times S=2a$에서

$e\times\{e^{-g(t)}(e^t-1)\}=2g(t)$,

$e^{1-g(t)}(e^t-1)=2g(t)$ ⋯ ㉠

이고 $t=\ln 3$을 대입하면

$2e^{1-g(\ln 3)}=2g(\ln 3)$,

$e^{1-g(\ln 3)}=g(\ln 3)$,

$\therefore g(\ln 3)=1$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$-g'(t)\times e^{1-g(t)}\times(e^t-1)+e^{1-g(t)}\times e^t=2g'(t)$

$$g'(t)=\frac{e^{1-g(t)}\times e^t}{e^{1-g(t)}\times(e^t-1)+2}$$

$t=\ln 3$을 대입하면 $g(\ln 3)=1$이므로

$$g'(\ln 3)=\frac{1\times 3}{1\times(3-1)+2}=\frac{3}{4}$$

29. 정답) 13 [미적분 - 미분법]

해설 : 삼각형 ABP는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$

$\angle\mathrm{AQP}=\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$이므로 $\sin(\angle\mathrm{AQP})=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

삼각형 APQ에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\theta},$$

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{\cos\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)},\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$$

삼각형 APQ의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})\times r(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\sin\theta$$

$$r(\theta)=\frac{\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times sin\theta}{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}}$$

$$=\frac{2\cos\theta\times\cos\theta\times\sin\theta}{2\cos\theta\times\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\frac{2}{2\times\frac{1}{2}+1}=1$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{r(\theta)\}^2}{\theta^2}\pi=\pi\ \cdots\ ㉠$$

$\angle\mathrm{BPQ}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\times 2\sin\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,sin^2\theta\cos\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의해 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)\times\theta^2}{\{g(\theta)\}^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{f(\theta)}{\theta^2}}{\frac{\{g(\theta)\}^2}{\theta^4}}=\frac{1}{12}\pi$이고

$p+q=13$이다.

30. 정답) 45 [미적분 - 정적분]

해설 : $f(3-x)+f(3+x)=0$에 $x=0$을 대입하면

$2f(3)=0$이므로 $f(3)=0$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,0)$에 대하여 대칭인 그래프이다.

$f(x+2)=f(x)+2$에 $x=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+2$이고,

$f(3-x)+f(3+x)=0$에 $x=1$을 대입하면

$f(2)+f(4)=0$이므로

$f(2)=-1$, $f(4)=1$이다.

따라서 모든 정수 n에 대하여 $f(n)=n-3$이다. ⋯ ㉠

㉠에서 $f(0)=-3$이고 함수 $y=f(x)$의 점 $(0,-3)$에 대하여 대칭인 그래프이므로 함수 $y=f(x)+3$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 그래프이다.

따라서 함수 $y=\sin\pi x\{f(x)+3\}$은 y축에 대하여 대칭인 그래프이므로

$$\int_{-1}^{1}\sin\pi x\{f(x)+3\}dx$$

$$=2\int_0^1\sin\pi x\{f(x)+3\}dx$$

$$=2\int_0^1\sin\pi x f(x)dx+6\int_0^1\sin\pi x dx$$

$$=2\int_0^1\sin\pi x f(x)dx+6\left[-\frac{1}{\pi}cos\,\pi x\right]_0^1$$

$$=2\int_0^1\sin\pi x f(x)dx+\frac{12}{\pi}\ \cdots\ ㉡$$

이다.

$$\int_{-1}^{1}\sin\pi x\{f(x)+3\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\sin\pi x f(x)dx+\int_{-1}^{1}3\sin\pi x dx=\frac{20}{\pi}\ \cdots\ ㉢$$

이고, ㉡, ㉢을 연립하면

$$\int_{0}^{1}\sin\pi x f(x)dx=\frac{4}{\pi},\ \int_{-1}^{0}\sin\pi x f(x)dx=\frac{16}{\pi}$$

이다.

$\int_{-2}^{3}\cos\pi x f'(4-x)dx$에서 $4-x=t$라 하면

$$\int_{-2}^{3}\cos\pi x f'(4-x)dx=\int_{6}^{1}\cos(4\pi-\pi t)f'(t)(-dt)$$

$$=\int_{1}^{6}\cos\pi t f'(t)dt$$

부분적분법을 이용하면

$$\int_{1}^{6}\cos\pi t f'(t)dt$$

$$=\Big[\cos\pi t f(t)\Big]_{1}^{6}-\int_{1}^{6}(-\pi\sin\pi t)f(t)dt$$

$$=f(6)+f(1)+\pi\int_{1}^{6}\sin\pi t f(t)dt\ \cdots\ ㉣$$

$$\int_{1}^{2}\sin\pi t f(t)dt=\int_{-1}^{0}\sin(2\pi+\pi t)f(t+2)dt$$

$$=\int_{-1}^{0}\sin\pi t\{f(t)+2\}dt$$

$$=\int_{-1}^{0}\sin\pi t f(t)dt+2\int_{-1}^{0}\sin\pi t dt$$

$$=\frac{16}{\pi}+2\times\left(-\frac{2}{\pi}\right)$$

$$=\frac{12}{\pi}$$

같은 방법으로

$$\int_{3}^{4}\sin\pi t f(t)dt=\frac{8}{\pi},\ \int_{5}^{6}\sin\pi t f(t)dt=\frac{4}{\pi}$$

$$\int_{2}^{3}\sin\pi t f(t)dt=\int_{0}^{1}\sin(2\pi+\pi t)f(t+2)dt$$

$$=\int_{0}^{1}\sin\pi t\{f(t)+2\}dt$$

$$=\int_{0}^{1}\sin\pi t f(t)dt+2\int_{0}^{1}\sin\pi t dt$$

$$=\frac{4}{\pi}+2\times\frac{2}{\pi}$$

$$=\frac{8}{\pi}$$

같은 방법으로 $\int_{4}^{5}\sin\pi t f(t)dt=\frac{12}{\pi}$ ㉣에서

$$\int_{-2}^{3}\cos\pi x f'(4-x)dx$$

$$=f(6)+f(1)+\pi\int_{1}^{6}\sin\pi t f(t)dt$$

$$=3+(-2)+\pi\times\left(\frac{12}{\pi}+\frac{8}{\pi}+\frac{4}{\pi}+\frac{8}{\pi}+\frac{12}{\pi}\right)$$

$$=3-2+44=45$$

(별해) 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$에 대칭이고 함수 $y=f(x)$의 그래프도 점 $(3,\ 0)$에 대칭이므로 두 함수의 곱인 함수 $y=\sin\pi x f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대칭이다.

이때 $\int_{0}^{1}\sin\pi x f(x)dx=\frac{4}{\pi}$임을 구한 후,

$$\int_{-1}^{1}\sin\pi x f(x)dx=\int_{1}^{3}\sin\pi(x-2)f(x-2)dx$$

$$=\int_{1}^{3}\sin\pi x\{f(x)-2\}dx$$

$$=\int_{1}^{3}\sin\pi x f(x)dx-2\int_{1}^{3}\sin\pi x dx$$

$$=\int_{1}^{3}\sin\pi x f(x)dx=\frac{20}{\pi}$$

임을 구하면 함수 $y=\sin\pi x f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대칭이므로 적분값도 대칭인 구간에 대하여

$$\int_{1}^{3}\sin\pi x f(x)dx=\int_{3}^{5}\sin\pi x f(x)dx=\frac{20}{\pi}$$

$$\int_{0}^{1}\sin\pi x f(x)dx=\int_{5}^{6}\sin\pi x f(x)dx=\frac{4}{\pi}$$

이다. 따라서

$$\int_{1}^{6}\sin\pi x f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{3}\sin\pi x f(x)dx+\int_{3}^{5}\sin\pi x f(x)dx+\int_{5}^{6}\sin\pi x f(x)dx$$

$$=\frac{20}{\pi}+\frac{20}{\pi}+\frac{4}{\pi}=\frac{44}{\pi}$$

이고,

$$\int_{-2}^{3}\cos\pi x f'(4-x)dx=f(6)+f(1)+\pi\int_{1}^{6}\sin\pi t f(t)dt$$

$$=3+(-2)+\pi\times\frac{44}{\pi}$$

$$=3-2+44=45$$

이다.

기하

23. 정답) ⑤ [기하 - 공간도형과 공간좌표]

해설 : 점 $(2,\ a,\ 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$(-2,\ a,\ -4)$이므로 $a=3,\ b=-4$이다.

따라서 $a+b=3-4=-1$이다.

24. 정답) ② [기하 - 이차곡선]

해설 : 점 $(4,\ a)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $a^2=4\times4=16$이다.

이때, $a=4$ 또는 $a=-4$인데, $a=4$이면 점 $(4,\ a)$는 제1사분면 위의 점이므로 이 점도 반드시 제1사분면을 지난다.

따라서 $a=-4$이다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4,\ -4)$에서의 접선은

$-4y=2(x+4),\ y=-\frac{1}{2}x-2$이므로 y절편은 -2이다.

25. 정답) ④ [기하 - 평면벡터]

해설 : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로 주어진 식에서

$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

이고, 양변을 제곱하면,

$|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2$

이다.

$|\overrightarrow{AB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$라 하면,

$4^2-2k+(2\sqrt{2})^2=k^2$,

$k^2+2k-24=0$,

$(k+6)(k-4)=0$

에서 $k=-6$ 또는 $k=4$이고

$k=|\overrightarrow{AB}|>0$이므로 $k\neq-6$이다.

따라서 $k=|\overrightarrow{AB}|=4$이다.

26. 정답) ④ [기하 - 공간도형과 공간좌표]

해설 : 점 B′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{B'H}=\sqrt{3}$이다.

$\angle BB'H=\angle B'HA=\frac{\pi}{2}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\angle BHA=\frac{\pi}{2}$이고,

두 직선 AB, l이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 ABH는 $\angle BAH=\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이고,

$\overline{BH}=\overline{AB}\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$이다.

따라서 직각삼각형 BB′H에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BB'}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$이다.

27. 정답) ① [기하 - 평면벡터]

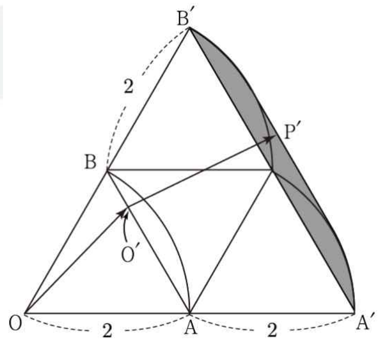
해설 : 현 AB 위의 한 점 O′을 시점으로 하고

크기와 방향이 $\overrightarrow{OP}$와 같은 벡터를 $\overrightarrow{O'P'}$이라 하자.

점 Q는 현 AB 위의 임의의 점이므로

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{O'P'}=\overrightarrow{OP'}$

이다. 따라서 점 R이 나타내는 도형은 점 P′이 나타내는 도형과 같고, 칠하여 나타내면 아래 그림과 같다.



따라서 점 R가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$3\times\overline{AB}+2\times\frac{\pi}{3}=6+\frac{2}{3}\pi$이다.

28. 정답) ② [기하 - 이차곡선]

해설 : 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{a^2}=1$의 장축의 길이는 10이므로

$\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=10$이다.

정삼각형 BPF′의 한 변의 길이를 k라 하면,

$$\begin{aligned}\overline{AF}+\overline{AF'}&=\overline{AF}+\overline{PF'}+\overline{AP}\\&=5+k+\overline{AP}\\&=10\end{aligned}$$

이므로

$\overline{AP}=5-k$이고

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF}'}=\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{BF}'}$

$=k+\overline{\mathrm{PF}}+k$

$=10$

이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=10-2k=2(5-k)$이다.

$\angle\mathrm{APF}=\angle\mathrm{BPF}'$ (맞꼭지각)

이므로 삼각형 APF에서 코사인법칙을 이용하면,

$\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\cos(\angle\mathrm{APF})$,

$25=(5-k)^2+4(5-k)^2-2(5-k)\times2(5-k)\times\frac{1}{2}$,

$25=3(5-k)^2$,

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(5-k)^2=\frac{25}{3}$,

$\overline{\mathrm{AP}}=5-k=\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ($\because \overline{\mathrm{AP}}>0$)

29. 정답) 26 [기하 - 평면벡터]

해설 : 두 점 A(2, 0), P(4, 2)를 지나는 직선은 $x-y-2=0$이다.

점 C에서 직선 $x-y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$가 이루는 예각을 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\theta$, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=2\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

$=2\sqrt{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

$=12+4\sqrt{2}$

에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=3\sqrt{2}+2$이다.

두 점 C, H를 지나는 직선을 l이라 하면,

직선 l은 직선 $x-y-2=0$과 수직이므로

$l: x+y+a=0$

이라 할 수 있다.

점 P와 직선 l 사이의 거리는 $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=3\sqrt{2}+2$이므로

$\frac{|4+2+a|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+2$,

$|6+a|=6+2\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

이다. 또, 직선 l은 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원과 점 C에서 만나야 하므로,

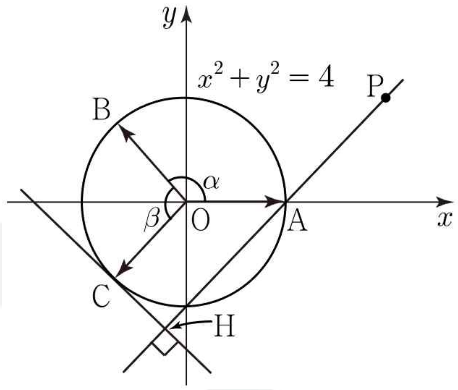
$\frac{|a|}{\sqrt{2}}\le 2$,

$|a|\le 2\sqrt{2}$ ⋯ ㉡

이다.

㉠, ㉡에 의해 $a=2\sqrt{2}$이고, 이때, 원점 O와 직선 $l: x+y+2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 2이므로

직선 l은 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원과 접하고, 이때의 접점이 점 $\mathrm{C}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$이다.



위의 그림과 같이

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각을 α,

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각을 β

라 하자.

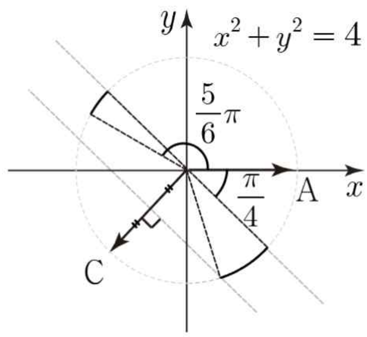
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\alpha=4\cos\alpha$,

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\beta=4\cos\beta$

이므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\alpha\le\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0\le\cos\beta\le\frac{1}{2}$

이고, 점 B의 위치로 가능한 점들을 나타내면 아래 그림 같다.



따라서 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각

$M\pi=2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{3}\pi$, $m\pi=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

이므로 $M=\frac{5}{3}$, $m=\frac{1}{2}$이다. 따라서

$12(M+m)=12\times\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right)=20+6=26$이다.

30. 정답) 384 [기하 - 공간도형과 공간좌표]

해설 : 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 점 B′이라 할 때,

조건 (나)에서 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 4이므로

$\overline{A'B'}=4$이다.

삼각형 BA′B′은 $\angle BB'A'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고,

$\overline{A'B'}=4$, $\overline{BA'}=5$이므로 $\overline{BB'}=3$이다.

평면 ABC와 평면 α의 교선이 직선 l이므로,

직선 l은 평면 ABC와 평면 α에 포함되고,

점 C도 평면 ABC와 평면 α에 포함되므로

점 C는 직선 l 위의 점이다.

두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라

하였으므로 $\angle APC=\angle BQC=\frac{\pi}{2}$이고,

두 점 A′, B′은 각각 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의

발이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\angle A'PC=\angle B'QC=\frac{\pi}{2}$이다.

조건 (다)에서 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기가

$\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle APA'=\angle BQB'=\frac{\pi}{4}$이고

따라서 두 삼각형 APA′, BQB′은 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{AA'}=5$, $\overline{BB'}=3$이므로

$\overline{AP}=5\sqrt{2}$, $\overline{BP}=3\sqrt{2}$이다.

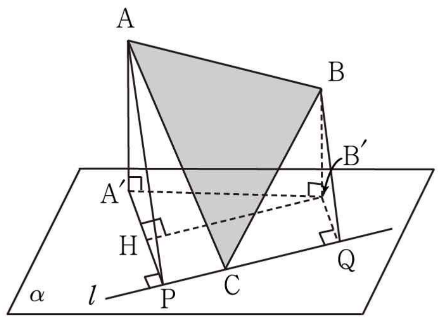
점 B′에서 선분 A′P에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 A′B′H는 $\angle A'HB'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고,

$$\begin{aligned}\overline{A'H}&=\overline{A'P}-\overline{HP}\\&=\overline{A'P}-\overline{B'Q}\\&=2\end{aligned}$$

이므로 삼각형 A′B′H에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{B'H}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이다.



두 선분 AP, BQ는 모두 직선 l과 수직이므로 사각형 ABQP는

사다리꼴이고, 그 넓이는 $\frac{1}{2}\times(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\overline{PQ}$이다.

$\overline{PQ}=\overline{B'H}=2\sqrt{3}$, $\overline{AP}=5\sqrt{2}$, $\overline{BP}=3\sqrt{2}$이므로

사각형 ABQP의 넓이 k는

$k=\frac{1}{2}\times8\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=8\sqrt{6}$

이다. 따라서 $k^2=(8\sqrt{6})^2=384$이다.