2023학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ③ (출제자 : 21 박주원)

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$2^{3\sqrt{2}-2} \times 8^{\frac{1}{3}-\sqrt{2}}$

$= 2^{3\sqrt{2}-2} \times 2^{3\left(\frac{1}{3}-\sqrt{2}\right)}$

$= 2^{3\sqrt{2}-2+(1-3\sqrt{2})}$

$= 2^{-1}$

$= \frac{1}{2}$

2) [정답] ① (출제자 : 22 박민수)

[출제의도] 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(1) = -1$ 이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)+1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= f'(1)$ 이다.

한편, $f'(x) = 3x^2 - 2$ 이므로 $f'(1) = 1$ 이다.

3) [정답] ② (출제자 : 22 김건우)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 사인 함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\cos\theta = \frac{4}{5}$ 이므로 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ 이다.

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ 이다.

$\tan\theta > 0$ 이고 $\cos\theta < 0$ 이므로 $\sin\theta < 0$ 이다.

따라서 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ 이다

4) [정답] ① (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 2 + (-1)$

$= 1$

5) [정답] ④ (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 부정적분을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 9$ 이므로

$f(x) = \int (3x^2 - 9)\,dx$

$= x^3 - 9x + C$ (단, C 는 적분상수)이다.

이때, $f(2) = 6$ 이므로 $C = 16$ 이고

$f(1) = 1 - 9 + 16$

$= 8$ 이다.

[별해]

$\int_1^2 f'(x)\,dx = f(2) - f(1)$ 이므로

$\int_1^2 (3x^2 - 9)\,dx = \left[x^3 - 9x\right]_1^2$

$= -2$ 에서

$f(1) = f(2) - (-2)$

$= 8$ 이다.

6) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 수열의 합의 성질을 활용할 수 있는가?

[해설]

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_9 - a_{10} = 20$ 이고

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_9 + a_{10} = 30$ 이므로

두 식을 연립하면

$2a_1 + 2a_3 + \cdots + 2a_9 = 50$ 에서

$a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = 25$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = 25$ 이다.

7) [정답] ④ (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 함수의 연속의 뜻과 연속함수의 성질을 아는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = 1$, $x = 3$ 에서 연속이다.

$x = 1$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속이므로

$f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x)$ 에서

$a + 2 + b = 4 + a$ 이다.

그러므로 $b = 2$ 이다.

$x=3$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속이고 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$\lim_{x \to 3-} f(x) = f(3)$

$= f(0)$ 에서

$9a+6+b=a$ 이다.

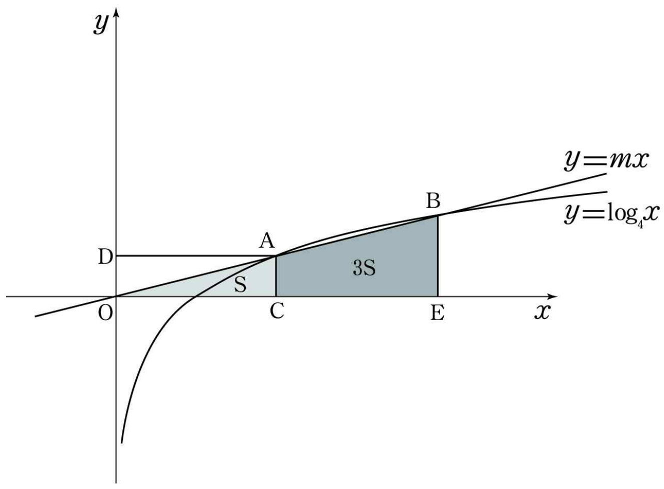
그러므로 $a=-1$ 이다.

따라서 $a+b=1$ 이다.

8) [정답] ③ (출제자 : 22 윤성준)

[출제의도] 로그함수 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]



선분 AO 는 직사각형 ADOC 의 대각선이므로 삼각형 AOC 의 넓이는 사각형 ADOC 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 삼각형 AOC 의 넓이를 S 라 하면 사각형 ADOC 의 넓이는 $2S$ 이다.

이때 사각형 ADOC 와 사각형 ACEB 의 넓이의 비가 $2:3$ 이므로 사각형 ACEB 의 넓이는 $3S$ 이다.

따라서 삼각형 BOE 의 넓이는 $S+3S=4S$ 이다.

삼각형 AOC 와 삼각형 BOE 에 대하여 $\angle AOC = \angle BOE$ 이고, $\angle ACO = \angle BEO$ 이므로 삼각형 AOC 와 삼각형 BOE 는 닮음이다. (AA 닮음)

이때, 삼각형 AOC 와 삼각형 BOE 의 넓이의 비가 $1:4$ 이므로 삼각형 AOC 와 삼각형 BOE 의 닮음비는 $1:2$ 이다.

선분 OC 와 선분 OE 의 길이의 비가 $1:2$ 이므로

점 C 의 좌표를 $(k,\ 0)$ $(k>0)$ 이라 하면 점 E 의 좌표는 $(2k,\ 0)$ 이다.

$\overline{AC}=\log_4 k$, $\overline{BE}=\log_4 2k$ 이고

$\overline{AC}:\overline{BE}=1:2$ 이므로 $\overline{BE}=2\overline{AC}$ 이다.

$\log_4 2k = 2\log_4 k$ 에서 $2k=k^2$ 이므로 $k=2$ 이다.

점 A 의 좌표는 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ 이므로 $S=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 사각형 ACEB 의 넓이는 $3S$ 이므로 $\frac{3}{2}$ 이다.

9) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 등차중항을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$|a_1+a_3+a_5+a_7|=4|a_4|=8$ 이므로

$a_4=2$ 또는 $a_4=-2$ 이다.

$|a_2|=a_4+a_6$ 에서 $a_2 \le 0$ 이면 $a_2+a_4+a_6=0$ 이므로 $a_4=0$ 이다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a_2>0$ 이므로 $|a_2|=a_4+a_6$ 에서 $a_2=a_4+a_6$ 이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$a_2=a_4+a_6$ 에서 $a_1+d=2a_1+8d$ 이므로

$a_1=-7d$ 이고 $a_2=-6d$ 이다.

$a_2=-6d>0$ 이므로 $d<0$ 이다.

$a_4=a_1+3d=-4d=2$ $(\because d<0)$ 에서

$d=-\frac{1}{2}$ 이고 $a_1=\frac{7}{2}$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{12\left\{2\times\left(\frac{7}{2}\right)+(12-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}}{2}$

$=9$ 이다.

10) [정답] ③ (출제자 : 22 윤성준)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=(x-a)^2(x-b)^2$ 이므로

$f'(x)=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ 이다.

주어진 조건에서 $f'(a+3)=0$ 이므로

$a+3=b$ 또는 $a+3=\frac{a+b}{2}$ 이다.

즉, $b=a+3$ 또는 $b=a+6$ 이다.

또한, 주어진 조건에서

$f(1)-f(4)=g(4)-g(1)$ 이고

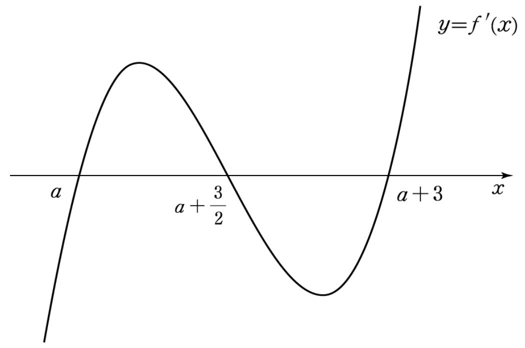
$$g(4)-g(1)=\int_0^4 |f'(t)|\,dt-\int_0^1 |f'(t)|\,dt$$
$$=\int_0^4 |f'(t)|\,dt+\int_1^0 |f'(t)|\,dt$$
$$=\int_1^4 |f'(t)|\,dt,$$

$f(1)-f(4)=-\int_1^4 f'(t)\,dt$ 이므로

$-\int_1^4 f'(t)\,dt=\int_1^4 |f'(t)|\,dt$ 이다.

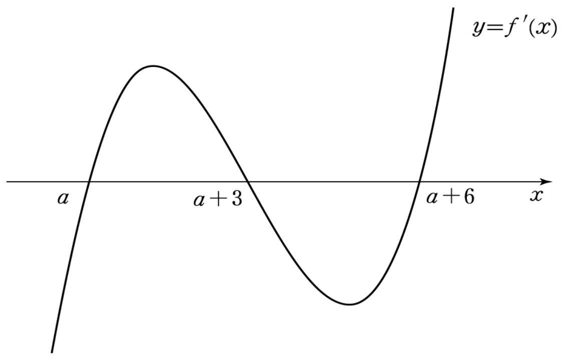
따라서 $1\le x\le 4$ 에서 $f'(x)\le 0$ 이다.

ⅰ) $b=a+3$ 일 때
함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로
$x \le a$ 또는 $a+\frac{3}{2} \le x \le a+3$ 에서 $f'(x) \le 0$ 이다.



$1 \le x \le 4$ 에서 $f'(x) \le 0$ 이려면 $a \ge 4$ 이어야 한다.
이때, $b \ge 7$ 이므로 $ab<0$ 에 모순이다.

ⅱ) $b=a+6$ 일 때
함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로
$x \le a$ 또는 $a+3 \le x \le a+6$ 에서 $f'(x) \le 0$ 이다.



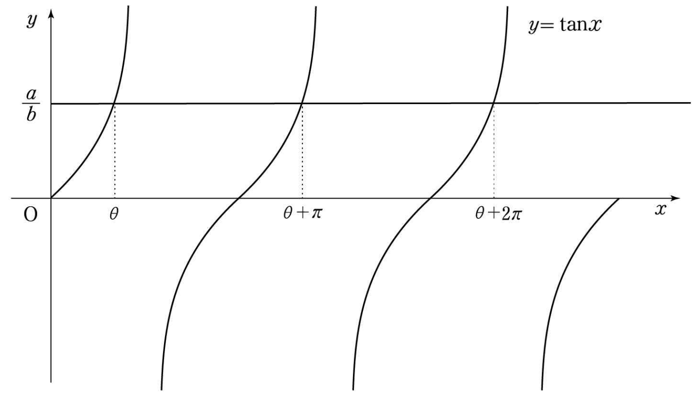
$1 \le x \le 4$ 에서 $f'(x) \le 0$ 이려면 $a \ge 4$ 또는 $a=-2$ 이어야 한다.
이때, $a \ge 4$ 이면 $b \ge 10$ 이므로 $ab<0$ 에 모순이다.

따라서 $a=-2$, $b=4$ 이고,
$f(x)=(x+2)^2(x-4)^2$ 이므로 $f(3)=25$ 이다.

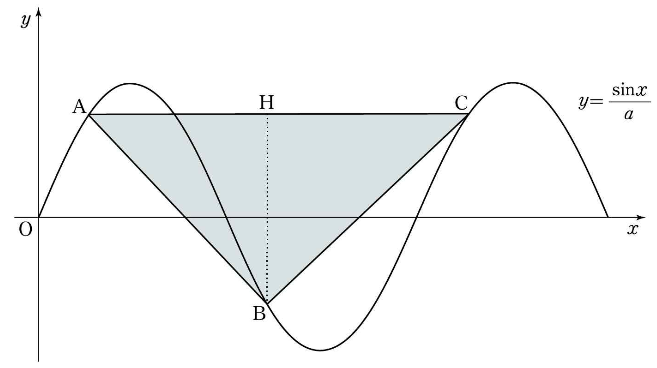
11) [정답] ③ (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 원하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]
방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 주어진 삼각형의 세 꼭짓점의 x 좌표와 같다.
$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)일 때, $\cos x=0$ 이고 $\sin x \ne 0$ 이므로
방정식 $f(x)=g(x)$ 를 만족시키는 실근이 존재하지 않는다.
즉, 방정식 $f(x)=g(x)$ 를 만족시키는 x 에 대하여 $\cos x \ne 0$ 이므로
방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 $\tan x=\frac{a}{b}$ 의 실근과 같다.
방정식 $\tan x=\frac{a}{b}$ 는 닫힌구간 $[0,3\pi]$ 에서 3 개의 실근을 갖는다.



세 실근의 x 좌표를 각각 θ, $\theta+\pi$, $\theta+2\pi$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고
세 점 A, B, C를 각각 $\mathrm{A}\left(\theta, \frac{\sin\theta}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(\theta+\pi, \frac{-\sin\theta}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(\theta+2\pi, \frac{\sin\theta}{a}\right)$라 하자.



점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HC}}$ 이므로 선분 BH는 선분 AC를 수직이등분한다.
또한, $\overline{\mathrm{BH}}$ 는 공통, $\angle\mathrm{BHA}=\angle\mathrm{BHC}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}$ 이므로
삼각형 BHA 와 삼각형 BHC 는 합동이다. (SAS 합동)
따라서 삼각형 ABC 는 직각이등변삼각형이다. $\left(\because \angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}\right)$

점 H의 좌표가 $\left(\theta+\pi, \frac{\sin\theta}{a}\right)$이고 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}$ 이므로
$(\theta+\pi)-\theta=\frac{\sin\theta}{a}-\left(-\frac{\sin\theta}{a}\right)$에서 $\sin\theta=\frac{\pi a}{2}$ 이다.
또한, $\frac{\sin\theta}{a}=\frac{\cos\theta}{b}$ 이므로 $\cos\theta=\frac{b\sin\theta}{a}=\frac{\pi b}{2}$ 이다.
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에서 $\frac{\pi^2}{4}(a^2+b^2)=1$, $a^2+b^2=\frac{4}{\pi^2}$ 이다.

주어진 조건에서 $ab=\frac{1}{\pi^2}$ 이므로

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 = \frac{4}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2} = \frac{6}{\pi^2}$$ 이다.

a, b가 양수이므로 $a+b=\frac{\sqrt{6}}{\pi}$ 이다.

12) [정답] ⑤ (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 위치와 속도 사이의 관계를 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

ㄱ.

$$\int_0^{2\alpha} v_1(t)\,dt = \int_0^{2\alpha} t(t-\alpha)(t-2\alpha)\,dt$$
$$= \int_0^{2\alpha}(t^3-3\alpha t^2+2\alpha^2 t)\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{4}t^4-\alpha t^3+\alpha^2t^2\right]_0^{2\alpha}$$
$= 0$ 이고

$$\int_0^{2\alpha} v_2(t)\,dt = \int_0^{2\alpha} 2(\alpha-t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\alpha}(-2t+2\alpha)\,dt$$
$$= \left[-t^2+2\alpha t\right]_0^{2\alpha}$$
$= 0$ 이다.

따라서 $\int_0^{2\alpha} v_1(t)\,dt = \int_0^{2\alpha} v_2(t)\,dt = 0$ 이다. (참)

ㄴ.

점 P가 움직이는 방향이 바뀐 수직선 위의 서로 다른 두 점은 점 P의 속도의
부호가 변화한 수직선 위의 서로 다른 두 점이다.

점 P의 속도의 부호가 변화한 점, 즉 $v_1(t) = t(t-\alpha)(t-2\alpha)$ 의 부호가 변화한 점은 $t=\alpha$ 일 때와 $t=2\alpha$ 일 때의 점 P의 위치이다.

그러므로 점 P의 시각 t 에서의 위치를 $s_1(t)$ 라 하면 점 P가 운동 방향을 바꾼 수직선 위의 서로 다른 두 점은 $s_1(\alpha)$, $s_1(2\alpha)$ 이다.

두 점 A, B를 각각 $\mathrm{A}(s_1(\alpha))$, $\mathrm{B}(s_1(2\alpha))$ 라 하자.

한편, $s_1(t) = \int_0^t v_1(u)\,du$
$$= \int_0^t (u^3-3\alpha u^2+2\alpha^2u)\,du$$
$= \frac{1}{4}t^2(t-2\alpha)^2$ 이고 $s_1(2\alpha) = s_1(0) = 0$ 이다.

따라서 점 B는 B(0) 이고

$\overline{\mathrm{AB}} = |s_1(\alpha)-0| = |s_1(\alpha)|$
$= \left|\int_0^\alpha v_1(t)\,dt\right|$ 이고

$0 \le t \le \alpha$ 에서 $v_1(t) \ge 0$ 이므로 $\left|\int_0^\alpha v_1(t)\,dt\right| = \int_0^\alpha v_1(t)\,dt$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \int_0^\alpha v_1(t)\,dt$ 이다. (참)

ㄷ.

점 Q의 시각 t 에서의 위치를 $s_2(t)$ 라 하면

$t \ge 0$ 에서 두 점 P와 Q의 위치가 같아지는 횟수는

$t \ge 0$ 에서 두 함수 $s_1(t)$ 와 $s_2(t)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$s_2(t) = \int_0^t v_2(u)\,du = -t(t-2\alpha)$ 이고

$t \ge 0$ 에서 두 함수 $s_1(t)$ 와 $s_2(t)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 t 에 대한 방정식 $\frac{1}{4}t^2(t-2\alpha)^2 = -t(t-2\alpha)$

즉, 방정식 $\frac{1}{4}t^2(t-\alpha)^2 + t(t-2\alpha) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

한편, $\overline{\mathrm{AB}} = s_1(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^4$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}\alpha^4 > 4$ 이면 $\alpha > 2$ 이다. ($\because \alpha > 0$)

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} > 4$ 일 때, $t \ge 0$ 에서 두 함수 $s_1(t)$ 와 $s_2(t)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 $\alpha > 2$ 일 때 방정식

$\frac{1}{4}t^2(t-\alpha)^2 + t(t-2\alpha) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

위의 방정식을 정리하면 $\frac{1}{4}t(t-2\alpha)(t^2-2\alpha t+4) = 0$ 이므로

이 방정식의 실근의 개수는 방정식 $t^2-2\alpha t+4 = 0$ 의 실근의 개수에 따라 결정된다.

방정식 $t^2-2\alpha t+4=0$ 의 실근은 $t = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4}$ 이고 $\alpha > 2$ 에서

방정식 $t^2-2\alpha t+4=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.

그러므로 $\alpha > 2$ 에서 방정식 $\frac{1}{4}t(t-2\alpha)(t^2-2\alpha t+4) = 0$ 은 서로 다른 네 실근을 가진다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} > 4$ 일 때 $t \ge 0$ 에서 두 함수 $s_1(t)$ 와 $s_2(t)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수, 즉 $\alpha > 2$ 일 때 $t \ge 0$ 에서 두 점 P와 Q가 만나는 횟수는 4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13) [정답] ④ (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 파악할 수 있는가?

[해설]

함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(x) = tx - t\ (t \ne 0)$ 라 하자.

$x=1$ 에서

$$\lim_{x\to1+}\frac{|g(x)|-|g(1)|}{x-1} = \lim_{x\to1+}\frac{|tx-t|}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1+}\frac{|t|(x-1)}{x-1}$$
$= |t|$ 이고

$$\lim_{x\to1-}\frac{|g(x)|-|g(1)|}{x-1} = \lim_{x\to1-}\frac{|tx-t|}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1+}\frac{-|t|(x-1)}{x-1}$$
$= -|t|$ 이므로

함수 $|g(x)|$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

또한, 함수 $|g(x)|$ 는 $x>1$ 에서 $|t|(x-1)$ 이고 $x<1$ 에서 $-|t|(x-1)$ 이므로 1이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

즉, 함수 $|g(x)|$ 는 $x=1$ 에서만 미분가능하지 않으므로

함수 $|f(x)|-|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 우선 $x=1$ 에서 미분가능해야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|f(x)|-|g(x)|}{x-1}$ 에서 $x\to1$ 일 때, (분모)$\to0$ 이고

극한값이 존재하려면 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}(|f(x)|-|g(x)|)=0$ 에서 $|f(1)|=0$, $f(1)=0$ 이므로

$f(x)=(x-1)(x^2+px+q)$ (단, p, q는 상수)라 하자.

함수 $|f(x)|-|g(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{|f(x)|-|g(x)|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{|f(x)|-|g(x)|}{x-1}$ 을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|-|g(x)|}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)(x^2+px+q)|-|t||x-1|}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}(|x^2+px+q|-|t|)\\&=|1+p+q|-|t| \text{ 이고,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|-|g(x)|}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)(x^2+px+q)|-|t||x-1|}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(-|x^2+px+q|+|t|)\\&=-|1+p+q|+|t| \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$|1+p+q|-|t|=-|1+p+q|+|t|$ 에서

$|1+p+q|=|t|$ 이다.

주어진 조건에 의하여 $t=a$와 $t=a^2$가 방정식 $|1+p+q|=|t|$를

만족시켜야 하므로 $|a^2|=|a|$ 이다.

$a<0$ 이므로 $a^2=-a$, $a=-1$ 이다.

함수 $h(x)$에 대하여 $h(x)=x^2+px+q$라 할 때,

$f(x)=(x-1)h(x)$ 이므로 방정식 $h(x)=0$의 실근에 따라 함수

$|f(x)|$가 1이 아닌 모든 실수 x에 대하여 미분가능한지 살펴보자.

i) 방정식 $h(x)=0$의 실근이 1, α $(\alpha\neq1)$인 경우

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$ 이므로 $|f(x)|=(x-1)^2|x-\alpha|$ 가

1이 아닌 모든 실수 x에 대하여 미분가능하려면

$\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}$ 를 만족시켜야 한다.

$x=\alpha$ 에서

$\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|(x-1)^2(x-\alpha)|}{x-\alpha}=(\alpha-1)^2$ 이고

$\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|(x-1)^2(x-\alpha)|}{x-\alpha}=-(\alpha-1)^2$

이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않는다.

이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

ii) 방정식 $h(x)=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는 경우

$f(x)=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로

$|f(x)|=|(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)|$가 1이 아닌 모든 실수 x에 대하여

미분가능하려면

$\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}$,

$\lim\limits_{x\to\beta+}\dfrac{|f(x)|-|f(\beta)|}{x-\beta}=\lim\limits_{x\to\beta-}\dfrac{|f(x)|-|f(\beta)|}{x-\beta}$ 를 만족해야 한다.

$x=\alpha$ 에서

$\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)|}{x-\alpha}$

$\lim\limits_{x\to\alpha+}|(x-1)(x-\beta)|=|(\alpha-1)(\alpha-\beta)|$ 이고

$\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)|}{x-\alpha}$

$\lim\limits_{x\to\alpha-}-|(x-1)(x-\beta)|=-|(\alpha-1)(\alpha-\beta)|$ 이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

위와 비슷하게 함수 $|f(x)|$는 $x=\beta$에서도 미분가능하지 않다.

따라서 $|f(x)|$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하지 않으므로 주어진

조건을 만족시키지 않는다.

iii) 방정식 $h(x)=0$이 1이 아닌 중근 α를 갖는 경우

$f(x)=(x-1)(x-\alpha)^2$ 이므로 $|f(x)|=|x-1|(x-\alpha)^2$ 가

1이 아닌 모든 실수 x에 대하여 미분가능하려면

$\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}$ 를 만족해야 한다.

$x=\alpha$ 에서

$\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{|(x-1)(x-\alpha)^2|}{x-\alpha}=0$ 이고

$\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha-}\dfrac{|(x-1)(x-\alpha)^2|}{x-\alpha}=0$ 이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하다. 이는 문제의 조건을 만족시킨다.

iv) 방정식 $h(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

$f(x)=(x-1)(x^2+px+q)$ 이고 모든 실수 x에 대하여

$x^2+px+q>0$ 이므로

함수 $|f(x)|=|x-1|(x^2+px+q)$는 1이 아닌 모든 실수 x에 대하여

미분가능하다.

위의 i) ~ iv) 에 의해 함수 $h(x)$가 1이 아닌 중근을 갖거나 실근을

갖지 않는 경우 함수 $|f(x)|$는 1이 아닌 모든 실수 x에 대하여

미분가능하다.

방정식 $h(x)=0$의 판별식 D에 대하여 함수 $|f(x)|$가 1이 아닌 모든

실수 x에 대하여 미분가능하려면 $D\le0$ 이어야 하므로

$D=p^2-4q\le0$ 이다.

또한, $D\le0$ 이면 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\ge0$ 이므로

$h(1)=1+p+q\ge0$ 이다.

즉, $|1+p+q|=1$ 에서 $1+p+q=1$ 이므로 $q=-p$ 이다.

부등식 $p^2-4q\le0$에 $q=-p$를 대입하면 $p^2+4p\le0$,

$-4\le p\le0$ 이다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+px-p)$ 에서

$f(0)=(-1)(-p)=p$ 이고

$-4\le p\le0$ 에서 $-4\le f(0)\le0$ 이므로

$f(0)$의 최솟값은 -4 이다.

14) [정답] ① (출제자 : 22 박민수)

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

선분 AE가 선분 BC를 수직이등분하므로

삼각형 ACB는 $\overline{AC}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이다.

또한, 삼각형 ACE와 삼각형 ABE가 서로 합동이므로 (SAS 합동)

$\angle CAE = \angle BAE$이다.

따라서 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{FG}:\overline{GB}=\overline{AF}:\overline{AB}=3:5$이므로

$\overline{AF}=3k\ (k>0)$라 하면 $\overline{AB}=5k$이고,

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FC}$이므로 $5k=3k+\overline{FC}$에서 $\overline{FC}=2k$이다.

두 점 A, B 모두 호 CD 위의 점이므로 $\angle DAC=\angle DBC$이고,

각 AFD와 각 BFC는 맞꼭지각이므로 $\angle AFD=\angle BFC$이다.

따라서 삼각형 AFD와 삼각형 BFC는 서로 닮음이다. (AA 닮음)

두 삼각형 AFD, BFC의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면,

$S_1:S_2=1:4$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $1:2$이다.

따라서 $\overline{AF}:\overline{BF}=\overline{DF}:\overline{CF}=1:2$이므로,

$\overline{DF}=k$, $\overline{FB}=6k$이다.

삼각형 AFB에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle AFB)=\frac{\overline{AF}^2+\overline{BF}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AF}\times\overline{BF}}=\frac{9k^2+36k^2-25k^2}{2\times3k\times6k}=\frac{20k^2}{36k^2}=\frac{5}{9}$$ 이다.

한편, $\angle AFD=\pi-\angle AFB$이므로

$\cos(\angle AFD)=\cos(\pi-\angle AFB)=-\cos(\angle AFB)=-\frac{5}{9}$이다.

$\sin^2(\angle AFD)=1-\cos^2(\angle AFD)$이고 $\sin(\angle AFD)>0$이므로,

$\sin(\angle AFD)=\frac{2\sqrt{14}}{9}$이다.

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{DF}\times\sin(\angle AFD)=\frac{1}{2}\times3k\times k\times\frac{2\sqrt{14}}{9}=\frac{\sqrt{14}}{3}k^2$$ 이고,

주어진 조건에 의하여 $S_1=3\sqrt{14}$이므로 $k=3$이다.

따라서 $\overline{BD}=\overline{DF}+\overline{FB}=k+6k=7k=21$이다.

15) [정답] ② (출제자 : 22 박민수)

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용할 수 있는가?

[해설]

$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$이므로, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}\ge0$이다.

주어진 조건에서 $a_6=a_7$이므로 $a_6=a_7=k\ (k\ge0)$라 하자.

만약 $k=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=0$이므로 $S_n=0$이다.

즉, $S_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 값이 존재하지 않으므로 주어진 조건에 모순이다. 따라서 $k>0$이다.

$a_7=|a_6-a_5|$에서 $k=|k-a_5|$이므로 $a_5=0$ 또는 $a_5=2k$이다.

$a_5=0$이면 $S_4=S_5$이고, $S_5>0$일 때 항상 $S_4>0$이므로

$S_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5일 수 없다.

따라서 $a_5=2k$이다.

$a_5=2k$일 때 $a_6=|a_5-a_4|$에서

$k=|2k-a_4|$이므로 $a_4=k$ 또는 $a_4=3k$이다.

i) $a_4=k$일 때

$a_5=|a_4-a_3|$에서 $2k=|k-a_3|$이므로 $a_3=3k$이고, $(\because a_3\ge0)$

$a_4=|a_3-a_2|$에서 $k=|3k-a_2|$이므로 $a_2=4k$ 또는 $a_2=2k$이다.

i) − (1) $a_2=4k$일 때

$a_3=|a_2-a_1|$에서 $3k=|4k-a_1|$이므로 $a_1=7k$ 또는 $a_1=k$이다.

$a_1=7k$이면 $S_1=7k>0$이고,

$a_1=k$이면 $S_1=k>0$이다.

즉, $a_2=4k$이면 $S_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 5가 아니므로 모순이다.

i) − (2) $a_2=2k$일 때

$a_3=|a_2-a_1|$에서 $3k=|2k-a_1|$이므로

$a_1=5k$ 또는 $a_1=-k$이다.

$a_1=5k$이면 $S_1=5k>0$이고,

$a_1=-k$이면 $S_2=-k+2k>0$이다.

즉, $a_2=2k$이면 $S_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 5가 아니므로 모순이다.

따라서 $a_4=k$이면 수열 $\{a_n\}$이 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $a_4=3k$이다.

ii) $a_4=3k$일 때

$a_5=|a_4-a_3|$에서 $2k=|3k-a_3|$이므로

$a_3=5k$ 또는 $a_3=k$이다.

ii) − (1) $a_3=5k$일 때

$a_4=|a_3-a_2|$에서 $3k=|5k-a_1|$이므로

$a_2=8k$ 또는 $a_2=2k$이다.

ii) − (1) − ① $a_2=8k$일 때

$a_3=|a_2-a_1|$에서 $5k=|8k-a_1|$이므로

$a_1=13k$ 또는 $a_1=3k$이다.

$a_1=13k$이면 $S_1=13k>0$이고,

$a_1=3k$이면 $S_1=3k>0$이다.

즉, $a_2=8k$이면 $S_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 5가 아니므로 모순이다.

ii) - (1) - ② $a_2 = 2k$ 일 때

$a_3 = |a_2 - a_1|$ 에서 $5k = |2k - a_1|$ 이므로

$a_1 = 7k$ 또는 $a_1 = -3k$ 이다.

$a_1 = 7k$ 이면 $S_1 = 7k > 0$ 이고,

$a_1 = -3k$ 이면 $S_3 = -3k + 2k + 5k > 0$ 이다.

즉, $a_2 = 2k$ 이면 $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 5 가 아니므로 모순이다.

ii) - (2) $a_3 = k$ 일 때

$a_4 = |a_3 - a_2|$ 에서 $3k = |k - a_2|$ 이므로

$a_2 = 4k$ 또는 $a_2 = -2k$ 이다.

ii) - (2) - ① $a_2 = 4k$ 일 때

$a_3 = |a_2 - a_1|$ 에서 $k = |4k - a_1|$ 이므로 $a_1 = 5k$ 또는 $a_1 = 3k$ 이다.

$a_1 = 5k$ 이면 $S_1 = 5k > 0$ 이고,

$a_1 = 3k$ 이면 $S_1 = 3k > 0$ 이다.

즉, $a_2 = 4k$ 이면 $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 5 가 아니므로 모순이다.

ii) - (2) - ② $a_2 = -2k$ 일 때

$a_3 = |a_2 - a_1|$ 에서 $k = |-2k - a_1|$ 이므로

$a_1 = -k$ 또는 $a_1 = -3k$ 이다.

$a_1 = -k$ 이면 $S_4 = -k - 2k + k + 3k > 0$ 이고,

$a_1 = -3k$ 이면 S_1, S_2, S_3, $S_4 < 0$ 이고

$S_5 = -3k - 2k + k + 3k + 2k > 0$ 이다.

즉, $a_2 = -2k$ 이면 $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 5 가 되는 경우가 유일하게 존재한다.

따라서, $a_1 = -3k$, $a_2 = -2k$, $a_3 = k$, $a_4 = 3k$, $a_5 = 2k$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 항을 구하는 과정을 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><th>n</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td rowspan="12">a_n</td><td>$7k$</td><td rowspan="2">$4k$</td><td rowspan="4">$3k$</td><td rowspan="4">k</td><td rowspan="12">$2k$</td><td rowspan="12">k</td><td rowspan="12">k</td></tr>
<tr><td>k</td></tr>
<tr><td>$5k$</td><td rowspan="2">$2k$</td></tr>
<tr><td>$-k$</td></tr>
<tr><td>$13k$</td><td rowspan="2">$8k$</td><td rowspan="4">$5k$</td><td rowspan="8">$3k$</td></tr>
<tr><td>$3k$</td></tr>
<tr><td>$7k$</td><td rowspan="2">$2k$</td></tr>
<tr><td>$-3k$</td></tr>
<tr><td>$5k$</td><td rowspan="2">$4k$</td><td rowspan="4">k</td></tr>
<tr><td>$3k$</td></tr>
<tr><td>$-k$</td><td rowspan="2">$-2k$</td></tr>
<tr><td>$-3k$</td></tr>
</table>

$a_8 = |a_7 - a_6|$ 에서 $a_8 = |k - k|$ 이므로 $a_8 = 0$ 이다.

$a_9 = |a_8 - a_7|$ 에서 $a_9 = |0 - k|$ 이므로 $a_9 = k$ 이다.

$a_{10} = |a_9 - a_8|$ 에서 $a_{10} = |k - 0|$ 이므로 $a_{10} = k$ 이다.

따라서 $S_{10} = 5k = 10$ 이므로 $k = 2$ 이다.

한편, 어떤 자연수 m 에 대하여 $a_{m+2} = a_{m+1} = \alpha$ $(\alpha \geq 0)$ 라 하자.

$a_{m+3} = |a_{m+2} - a_{m+1}|$ 이므로 $a_{m+3} = 0$ 이다.

$a_{m+2} = \alpha$, $a_{m+3} = 0$ 이므로

$a_{m+4} = |a_{m+3} - a_{m+2}| = \alpha$ 이고, 마찬가지로 $a_{m+5} = \alpha$ 이다.

즉, $a_{m+2} = a_{m+1} = \alpha$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 $m+1$ 번째 항부터 순서대로 α, α, 0 이 반복된다.

따라서 $a_{11} = a_{14} = a_{17} = a_{20} = 0$ 이고,

$a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = a_{18} = a_{19} = k$ 이다.

$S_{20} = S_{10} + 6k$ 이므로

$S_{20} = 10 + 12$

$= 22$ 이다.

16) [정답] 9 (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$
\begin{aligned}
(\log_2 54 - 1) \times \log_3 8 &= (\log_2 54 - \log_2 2) \times \log_3 8 \\
&= \log_2 27 \times \log_3 8 \\
&= 3\log_2 3 \times 3\log_3 2 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

17) [정답] 16 (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 곱의 미분법을 통해 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 조건에 의하여 $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$ 이다.

$g(x) = 2x^2 f(x)$ 이므로 $g'(x) = 4xf(x) + 2x^2 f'(x)$ 이다.

$g'(1) = 4f(1) + 2f'(1)$ 이므로

$g'(1) = 4 \times 3 + 2 \times 2 = 16$ 이다.

18) [정답] 19 (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 다항함수의 증가와 감소를 파악할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = 2x^3 + 3(a+1)x^2 + 6ax + 5$ 이므로

$f'(x) = 6x^2 + 6(a+1)x + 6a$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식

$D/4 = 9(a+1)^2 - 36a = 9(a-1)^2 \leq 0$ 에서 $a = 1$ 이다.

따라서 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ 이므로

$f(1) = 19$ 이다.

19) [정답] 127 (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계를 이용해 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 라 하자.

$S_n - S_{n-1} = a_n b_n \quad (n \ge 2)$ 이므로

$a_n b_n = \left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right\} - \left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\right\} = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \; (n \ge 2)$ 이다.

$S_1 = a_1 b_1 = -1$ 이므로

$a_n b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \; (n \ge 1)$ 이고,

$b_1 = 1$ 이므로 $a_1 = -1$ 이다.

수열 $\{a_n b_n\}$ 과 수열 $\{b_n\}$ 이 모두 등비수열이고 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n \ne 0$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 도 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r_a, r_b 라 하면

$a_n = -(r_a)^{n-1}$, $b_n = (r_b)^{n-1}$ 이다.

$a_n b_n = -(r_a r_b)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 에서 $r_a r_b = \frac{1}{2}$ 이고

$a_{2n}(b_{2n})^2 = -(r_a)^{2n-1}(r_b)^{4n-2} = 1$ 에서 $r_a(r_b)^2 = -1$ 이므로

$r_a = -\frac{1}{4}$, $r_b = -2$ 이다.

따라서 $16(a_3 - b_4) = 16\left\{-\frac{1}{16} - (-8)\right\} = -1 + 128 = 127$ 이다.

20) [정답] 6 (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 다항함수의 정적분을 구할 수 있는가?

[해설]

극한 $\lim_{x \to 2}\left\{\frac{1}{x-2}\int_{|g(a)|}^{x} f'(t)dt\right\} = \lim_{x \to 2}\frac{f(x) - f(|g(a)|)}{x-2}$ 에서

$x \to 2$ 일 때, (분모) $\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로 $\lim_{x \to 2}(f(x) - f(|g(a)|)) = 0$ 에서

$f(2) = f(|g(a)|)$ 이다.

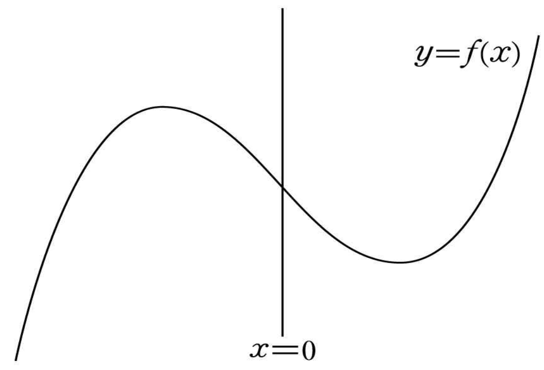
$f(2) = f(|g(a)|)$ 이므로

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x) - f(|g(a)|)}{x-2} = \lim_{x \to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = f'(-2)$ 이다.

$f'(2) = f'(-2)$ 이고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로

$f'(x) - f'(2) = 3(x+2)(x-2)$ 이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



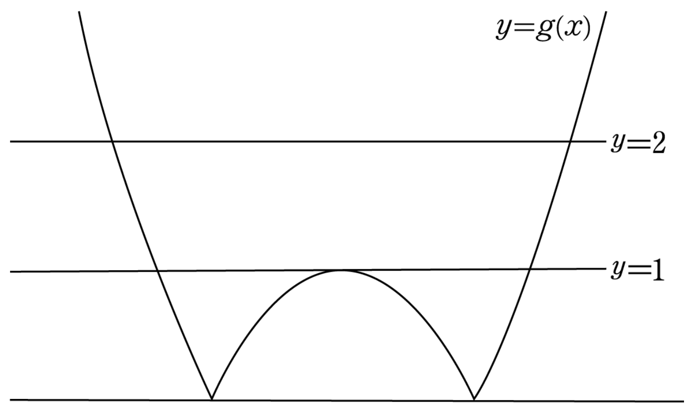
음이 아닌 실수 t 에 대하여 $t = |g(a)|$ 라 하면

$f(|g(a)|) = f(t)$ 이다.

방정식 $f(t) = f(2)$ 를 만족시키는 음이 아닌 실수 t 의 값의 개수에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

i) 방정식 $f(t) = f(2)$ 를 만족시키는 음이 아닌 실수 t 의 값의 개수가 1 인 경우

방정식 $f(t) = f(2)$ 를 만족시키는 음이 아닌 실수 t 의 값은 $t = 2$ 뿐이다. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 -1 이므로 방정식 $|g(a)| = 2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값의 개수는 2 이다. 이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



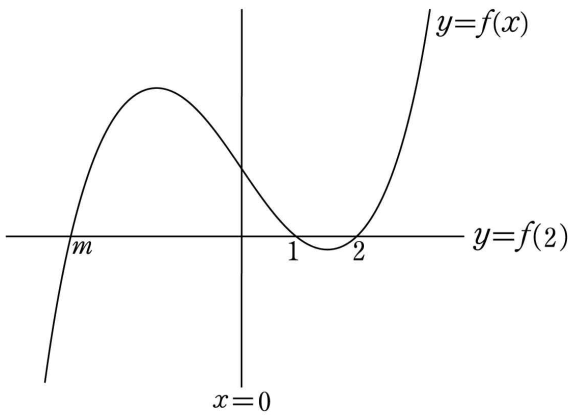
ii) 방정식 $f(t) = f(2)$ 를 만족시키는 음이 아닌 실수 t 의 값의 개수가 2 인 경우

방정식 $f(t) = f(2)$ 을 만족시키는 2 가 아닌 실근을 α 라 하자.

$t = 2$ 일 때 i) 에 의해 방정식 $|g(a)| = 2$ 를 만족시키는 a 의 값의 개수는 2 이다.

$g(a) = 2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값의 개수가 5 가 되기 위해서는 $t = \alpha$ 일 때, 방정식 $|g(a)| = \alpha$ 를 만족시키는 a 의 값의 개수가 3 이 되어야 한다. 함수 $g(x)$ 의 극솟값이 -1 이므로 방정식 $|g(x)| = 1$ 의 실근의 개수는 3 이다.

따라서 $\alpha = 1$ 이다.



ii) 에 의해 $f(1)=f(2)$ 이고 위의 그림에서 방정식 $f(x)=0$ 은 1 과 2 가 아닌 실근 $m\ (m<0)$ 을 가지므로 $f(x)-f(2)=(x-1)(x-2)(x-m)$ 라 하자.

$f'(x)=(x-2)(x-m)+(x-1)(x-m)+(x-1)(x-2)$ 이고,
$f'(2)=f'(-2)$ 이므로
$f'(-2)=7m+26$, $f'(2)=-m+2$ 에서
$7m+26=-m+2$, $m=-3$ 이다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)+f(2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 f'(x)\,dx &= f(3)-f(0)\\ &=\{12+f(2)\}-\{6+f(2)\}\\ &=6\end{aligned}$$ 이다.

21) [정답] 240 (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
방정식 $f(x)=0$ 이 $x=\alpha$ 에서 실근을 가지면 자연수 n 에 대하여 방정식 $f(x^n)=0$ 은 방정식 $x^n=\alpha$ 를 만족시키는 x 의 값을 실근으로 갖는다.

i) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 0 인 경우
방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 갖지 않기 때문에 방정식 $f(x^n)=0$ 도 실근을 갖지 않는다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=0$ 이므로 조건 (가)에 모순이다.

ii) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 1 인 경우
방정식 $f(x)=0$ 이 $x=\alpha$ 에서 실근을 갖는다고 하자.
방정식 $x^{2n-1}=\alpha$ 를 만족시키는 x 값의 개수는 α 의 값에 관계없이 항상 1 이기 때문에 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n-1}=1$ 이다.

방정식 $x^{2n}=\alpha$ 를 만족시키는 x 값의 개수는 $\alpha>0$ 일 때 2 , $\alpha=0$ 일 때 1 , $\alpha<0$ 일 때 0 이므로 a_{2n} 의 값은 α 의 값의 범위에 따라 달라진다.

이를 표로 나타내면 다음과 같다.

	a_{2n-1}	a_{2n}	$\sum_{n=1}^{10} a_n$
$\alpha>0$	1	2	15
$\alpha=0$	1	1	10
$\alpha<0$	1	0	5

이 중 어느 경우도 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 모순이다.

iii) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 2 인 경우
방정식 $f(x)=0$ 이 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 에서 실근을 갖는다고 하자.

방정식 $x^{2n-1}=\alpha$ 를 만족시키는 x 값의 개수는 α 의 값에 관계없이 항상 1 이고, 마찬가지로 $x^{2n-1}=\beta$ 를 만족시키는 x 의 값의 개수는 β 의 값에 관계없이 항상 1 이기 때문에 둘을 더한 값은 α , β 의 값에 관계없이 항상 2 이다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n-1}=2$ 이다.

방정식 $x^{2n}=\alpha$ 를 만족시키는 x 의 값의 개수와 $x^{2n}=\beta$ 를 만족시키는 x 의 값의 개수를 더한 값은 ii)에 의하여 $0<\alpha<\beta$ 일 때 4 , $\alpha=0<\beta$ 일 때 3 , $\alpha<0<\beta$ 일 때 2 , $\alpha<\beta=0$ 일 때 1 , $\alpha<\beta<0$ 일 때 0 이므로 a_{2n} 의 값은 α 와 β 의 값에 따라 달라진다.

이를 표로 나타내면 다음과 같다.

	a_{2n-1}	a_{2n}	$\sum_{n=1}^{10} a_n$
$0<\alpha<\beta$	2	4	30
$\alpha=0<\beta$	2	3	25
$\alpha<0<\beta$	2	2	20
$\alpha<\beta=0$	2	1	15
$\alpha<\beta<0$	2	0	10

이 중 $\sum_{n=1}^{10} a_n=25$ 를 만족시키는 경우는 $\alpha=0<\beta$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 두 실근 0 , $\beta\ (\beta>0)$ 을 갖는다.

주어진 조건에 의해 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이므로 함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x(x-\beta)$ 라 하자.

2 이상의 자연수 k 에 대하여 $f(k)$ 의 k 제곱근 중 실수인 것의 개수가 0 인 경우는 $f(k)<0$ 이고 k 가 짝수인 경우이다.

$0<x<\beta$ 에서 $f(x)<0$ 이기 때문에 조건 (나)에 의해 $0<x<\beta$ 에 속한 짝수의 개수는 3 이다.

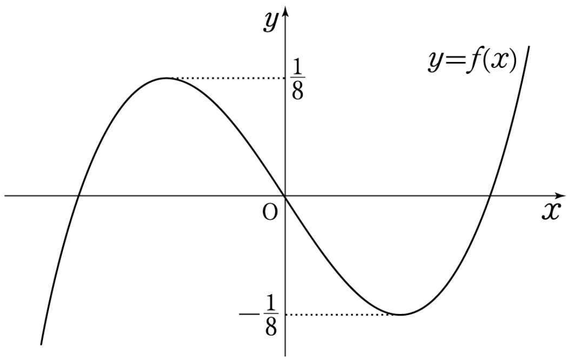
즉, $0<x<\beta$ 의 범위에 속한 짝수는 2 , 4 , 6 이고 이를 만족하는 β 의 값의 범위는 $6<\beta\le 8$ 이다.

따라서 $f(-12)=12(12+\beta)$ 의 값의 범위는 $216<12(12+\beta)\le 240$ 이므로 $f(-12)$ 의 최댓값은 240 이다.

22) [정답] 17 (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수의 개형을 추론하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
최고차항의 계수가 1 보다 크고 극댓값이 $\frac{1}{8}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $-f(x)=f(-x)$ 를 만족시키므로, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



집합 A, B를 각각 $A=\{x|f(x)=\{f(t)\}^3\}$, $B=\{x|x=f(t)\}$라 하면
x에 대한 방정식 $\{f(x)-\{f(t)\}^3\}\{x-f(t)\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$이므로

$$\begin{aligned} g(t) &= n(A\cup B) \\ &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \end{aligned}$$ 이다.

$n(A)$와 $n(A\cap B)$를 각각 $g_1(t)=n(A)$, $g_2(t)=n(A\cap B)$라 하면,

$$g_2(t)=\begin{cases} 1 & \left(f(f(t))=\{f(t)\}^3\right) \\ 0 & \left(f(f(t))\neq\{f(t)\}^3\right) \end{cases}$$

이고
$g(t)=g_1(t)+1-g_2(t)$ 이다.

최고차항의 계수가 1보다 크고 극댓값이 존재하는 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $-f(x)=f(-x)$를 만족시키므로, 방정식 $f(x)=x^3$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
방정식 $f(x)=x^3$의 양의 실근과 음의 실근을 각각 α, $-\alpha$라 하면 두 함수 $g_1(t)$와 $g_2(t)$는 각각 다음과 같다.

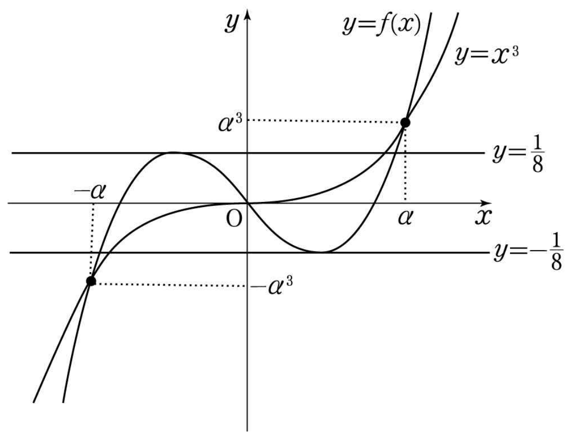
$$g_1(t)=\begin{cases} 1 & \left(\{f(t)\}^3<-\frac{1}{8},\ \{f(t)\}^3>\frac{1}{8}\right) \\ 2 & \left(\{f(t)\}^3=\pm\frac{1}{8}\right) \\ 3 & \left(-\frac{1}{8}<\{f(t)\}^3<\frac{1}{8}\right) \end{cases}$$

$$g_2(t)=\begin{cases} 1 & (f(t)=0,\ \pm\alpha) \\ 0 & (f(t)\neq 0,\ \pm\alpha) \end{cases}$$

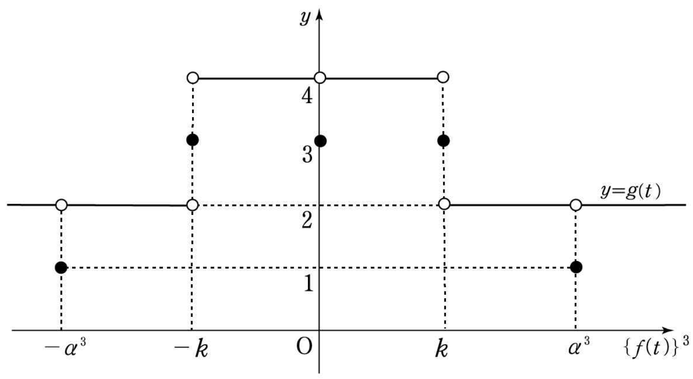
함수 $f(x)$는 점 (α, α^3)을 지나므로, α^3와 극댓값 $\frac{1}{8}$의 대소관계에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

i) $\alpha^3>\frac{1}{8}$인 경우

두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

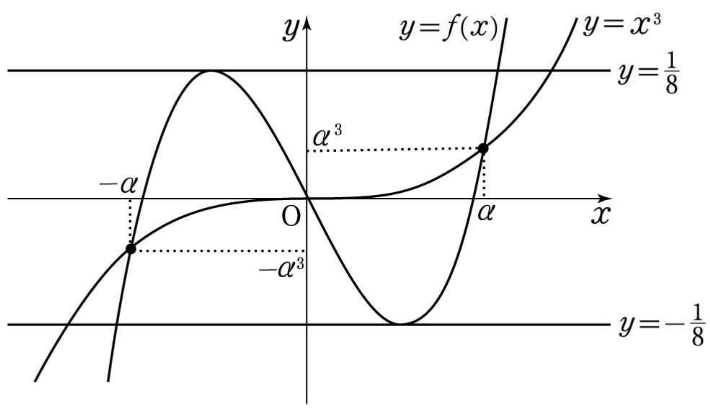


즉, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $\{f(a)\}^3=0$, $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\alpha^3$이다.
이때, 방정식 $f(a)=0$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\alpha$의 실근의 개수는 각각 3, 2, 2이다.

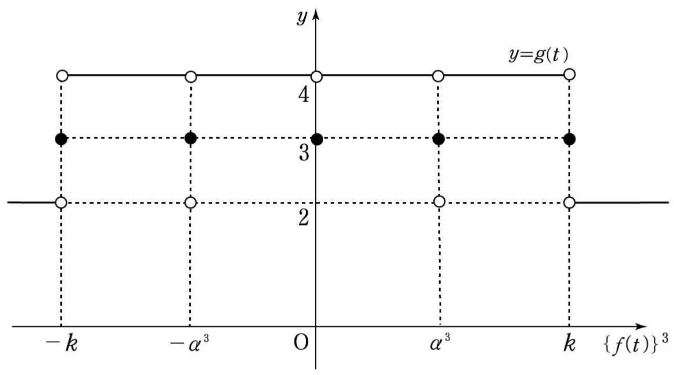
따라서 $\alpha^3>\frac{1}{8}$이면 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되도록 하는 실수 a의 값의 개수가 7이므로 주어진 조건에 모순이다.

ii) $\alpha^3<\frac{1}{8}$인 경우

두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



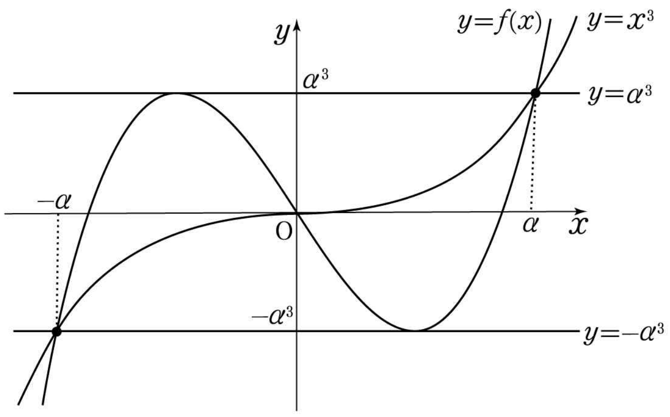
즉, 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속이 되도록 하는 실수 a 에 대하여 $\{f(a)\}^3=0$, $\pm\alpha^3$, $\pm\frac{1}{8}$ 이다.

이때, 두 방정식 $f(a)=0$, $\pm\frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 각각 3 , 2 이고, 방정식 $f(a)=\pm\alpha$ 의 실근의 개수는 $1\left(\alpha>\frac{1}{8}\right)$ 또는 $2\left(\alpha=\frac{1}{8}\right)$ 또는 $3\left(0<\alpha<\frac{1}{8}\right)$ 이다.

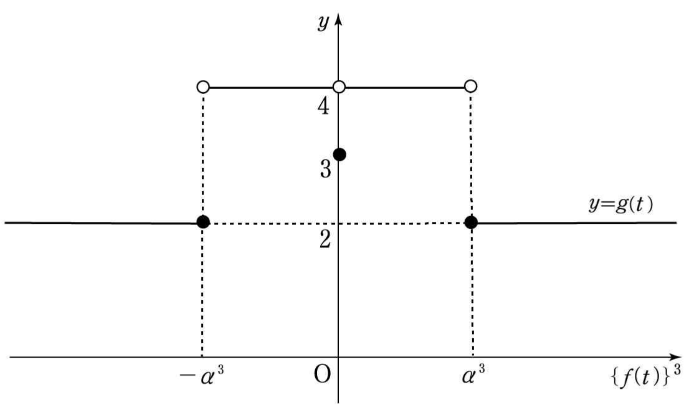
따라서 $\alpha^3<\frac{1}{8}$ 이면 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속이 되도록 하는 실수 a 의 값의 개수가 6 또는 7 또는 8 이므로 주어진 조건에 모순이다.

iii) $\alpha^3=\frac{1}{8}$ 인 경우

두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x^3$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$ 의 그래프는 다음과 그림과 같다.



즉, 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속이 되도록 하는 실수 a 에 대하여 $\{f(a)\}^3=0$, $\pm\frac{1}{8}$ 이다.

이때, 방정식 $f(a)=0$, $\pm\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 실수 a 의 값의 개수는 각각 3 , 2 이다.

따라서 $\alpha^3=\frac{1}{8}$ 이면 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속이 되도록 하는 실수 a 의 값의 개수가 5 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $m\ (m>1)$ 이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{8}$ 의 접점의 x 좌표를 $-n\ (n>0)$ 라 하면, 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x)-\frac{1}{8}=m(x+n)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$f(0)=0$ 이므로

$-\frac{1}{8}=m\times n^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ 에서

$$mn^2=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(n)=-\frac{1}{8}$ 이므로

$-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=m\times(2n)^2\times\left(n-\frac{1}{2}\right)$ 에서

$$mn^2\left(n-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $m=4$, $n=\frac{1}{4}$ 이다.

즉, $f(x)=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}$ 이다.

따라서 $f(1)=4\times\left(\frac{5}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$=\frac{13}{4}$ 이므로

$p+q=4+13$

$=17$ 이다.

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ⑤ (출제자 : 21 이유경)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$(2x+3)^4$ 의 전개식의 일반항은 ${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}3^r$ 이다.

$r=1$ 일 때 ${}_4\mathrm{C}_1 \times (2x)^3 \times 3^1 = 96x^3$ 에서

x^3 의 계수는 96 이다.

24) [정답] ⑤ (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X 가 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르고

$\mathrm{E}(X) = 36 \times \frac{1}{3} = 12$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2\right)\\ &= \{\mathrm{E}(X)\}^2\\ &= 12^2\\ &= 144\end{aligned}$$

이다.

25) [정답] ④ (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$A = \{x \mid (x-a)(x-1) = 0\}$ 이므로

$a=1$ 일 때 $A = \{x \mid (x-1)^2 = 0\} = \{1\}$ 이고,

$a \neq 1$ 일 때 $A = \{x \mid (x-1)(x-a) = 0\} = \{1, a\}$ 이다.

i) $a=1$ 인 경우

$A = \{1\}$ 이므로

$A \cap B = \varnothing$ 이려면 $b \neq 1$ 이어야 한다.

$a=1$ 인 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1$ 이고,

$b \neq 1$ 인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$ 이므로

구하는 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 이다.

ii) $a \neq 1$ 인 경우

$A = \{1, a\}$ 이므로

$A \cap B = \varnothing$ 이려면 $b \neq 1$ 이고 $b \neq a$ 이어야 한다.

$a \neq 1$ 인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$ 이고,

$b \neq 1$ 이고 $b \neq a$ 인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$ 이므로

구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 6$ 이다.

전체 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 16$ 이므로

$A \cap B = \varnothing$ 일 확률은 $\frac{3+6}{16} = \frac{9}{16}$ 이다.

26) [정답] ② (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 계산할 수 있는가?

[해설]

$(x+y+z^2-10)(x+y+z^2-24) \geq 0$ 이므로

$x+y+z^2-10 \geq 0$ 이고 $x+y+z^2-24 \geq 0$ 이거나,

$x+y+z^2-10 \leq 0$ 이고 $x+y+z^2-24 \leq 0$ 이어야 한다.

즉, $x+y+z^2 \geq 24$ 이거나 $x+y+z^2 \leq 10$ 이어야 한다.

i) $x+y+z^2 \geq 24$ 일 때

만약 $z<4$ 이면 $z^2<16$ 이므로 $x+y>8$ 이어야 한다.

하지만 조건 (가)에 의해 $x \leq y < 4$ 이므로 $x+y<8$ 이다.

따라서 $x+y+z^2 \geq 24$ 이려면 $z \geq 4$ 이어야 한다.

i) - ① $z=4$ 일 때

$1 \leq x \leq y \leq 4$ 와 $x+y \geq 8$ 을 동시에 만족시키는 자연수 x, y 는

$x=y=4$ 뿐이므로 자연수 x, y 의 모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는 1 이다.

i) - ② $z=5$ 일 때

$1 \leq x \leq y \leq 5$ 와 $x+y \geq -1$ 을 동시에 만족시키는 자연수 x, y 의

모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_2 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 이다.

i) - ①, i) - ②에 의해 $x+y+z^2 \geq 24$ 를 만족시키는 자연수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 16 이다.

ii) $x+y+z^2 \leq 10$ 일 때

만약 $z>3$ 이면 $z^2>9$ 이므로 $x+y<1$ 이어야 한다.

하지만 조건에 의해 $1 \leq x \leq y$ 이므로 $x+y \geq 2$ 이다.

따라서 $x+y+z^2 \leq 10$ 이려면 $z \leq 3$ 이어야 한다.

ii) - ① $z=3$ 일 때

$1 \leq x \leq y \leq 3$ 와 $x+y \leq 1$ 을 동시에 만족시키는 자연수 x, y 의

순서쌍 (x, y)는 존재하지 않는다.

ii) − ② $z=2$일 때

$1 \le x \le y \le 2$와 $x+y \le 6$을 동시에 만족시키는 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2 = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$이다.

ii) − ③ $z=1$일 때

$1 \le x \le y \le 1$와 $x+y \le 9$를 동시에 만족시키는 자연수 x, y는 $x=y=1$뿐이므로 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 1이다.

ii) − ① ~ ii) − ③에 의해 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 4이다.

i), ii)에 의해 주어진 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 20이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 신뢰구간을 통해 모평균을 추정할 수 있는가?

[해설]

학생 n명을 임의추출하여 얻은 공부 시간의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1} - 1.96 \times \dfrac{n}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \dfrac{n}{\sqrt{n}}$,

즉, $\overline{x_1} - 1.96 \times \sqrt{n} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \sqrt{n}$이므로

$a = \overline{x_1} - 1.96 \times \sqrt{n}$이고 $b = \overline{x_1} + 1.96 \times \sqrt{n}$이다.

학생 $4n$명을 임의추출하여 얻은 공부 시간의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2} - 2.58 \times \dfrac{n}{\sqrt{4n}} \le m \le \overline{x_2} + 2.58 \times \dfrac{n}{\sqrt{4n}}$,

즉, $\overline{x_2} - 1.29 \times \sqrt{n} \le m \le \overline{x_2} + 1.29 \times \sqrt{n}$이므로

$a + 1.35 = \overline{x_2} - 1.29 \times \sqrt{n}$이고

$b - 5.35 = \overline{x_2} + 1.29 \times \sqrt{n}$이다.

이때,

$b - a = \left(\overline{x_1} + 1.96 \times \sqrt{n}\right) - \left(\overline{x_1} - 1.96 \times \sqrt{n}\right)$

$\quad = \left(5.35 + \overline{x_2} + 1.29 \times \sqrt{n}\right) - \left(-1.35 + \overline{x_2} - 1.29 \times \sqrt{n}\right)$이고

$3.92 \times \sqrt{n} = 6.7 + 2.58 \times \sqrt{n}$에서

$n = 25$이다.

$\overline{x_1} - \overline{x_2} = (a + 1.96 \times \sqrt{n}) - (a + 1.35 + 1.29 \times \sqrt{n}) = 2$이므로

$n\left(\overline{x_1} - \overline{x_2}\right) = 50$이다.

28) [정답] ① (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

한 개의 동전을 사용하여 점 A와 원점 사이의 거리가 4 이상이 될 때까지 시행을 반복하므로, 이 시행을 마칠 확률은 1이다.

그러므로 동전을 4번 던졌을 때 이 시행을 마쳤을 확률을 구하면 된다.

동전을 4번 던졌을 때 가능한 점 A의 좌표는 다음과 같다.
$(0, 8)$, $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 0)$

각 좌표에 따라 확률을 구하면 다음과 같다.

i) 동전을 4번 던져 시행을 마쳤을 때 점 A의 좌표가 $(0, 8)$일 확률

점 A의 좌표가 $(0, 8)$이려면
동전을 4번 던졌을 때 뒷면이 4번 나와야 한다.

그러나, 뒷면이 2번 나왔을 때 점 A의 좌표는 $(0, 4)$이고,
이때 점 A와 원점 사이의 거리가 4이다.
즉, 뒷면이 2번 나오면 이 시행을 마치므로
점 A의 좌표가 $(0, 8)$일 확률은 0이다.

ii) 동전을 4번 던져 시행을 마쳤을 때 점 A의 좌표가 $(1, 6)$일 확률

점 A의 좌표가 $(1, 6)$이려면
동전을 4번 던졌을 때 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나와야 한다.

그러나, 뒷면이 2번 나왔을 때 점 A의 좌표는 $(0, 4)$ 또는 $(1, 4)$이고,
이때 두 점 모두 점 A와 원점 사이의 거리가 4 이상이다.
즉, 뒷면이 2번 나오면 이 시행을 마치므로
점 A의 좌표가 $(1, 6)$일 확률은 0이다.

iii) 동전을 4번 던져 시행을 마쳤을 때 점 A의 좌표가 $(2, 4)$일 확률

동전을 3번 던졌을 때 점 A의 좌표가 $(1, 4)$ 또는 $(2, 2)$이다.
동전을 3번 던졌을 때 점 A의 좌표가 $(1, 4)$이면 점 A와 원점 사이의 거리가 4 이상이므로 이 시행을 마친다.

그러므로 시행을 동전을 3번 던졌을 때 점 A의 좌표는 $(2, 2)$이어야 한다.
점 A의 좌표가 $(2, 2)$이려면
동전을 3번 던졌을 때 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나와야 한다.
그러므로 동전을 3번 던졌을 때 점 A의 좌표는 $(2, 2)$일 확률은

${}_3\mathrm{C}_2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{3}{8}$이다.

동전을 4번 던졌을 때 점 A의 좌표가 $(2, 4)$이려면
4번째 시행에서 뒷면이 나와야 하므로 구하는 확률은
$\dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{16}$이다.

iv) 동전을 4번 던져 시행을 마쳤을 때 점 A의 좌표가 $(3, 2)$일 확률

동전을 4번 던졌을 때 점 A의 좌표가 $(3, 2)$이면 점 A와 원점 사이의 거리가 4 미만이므로 이 시행을 마치지 않는다.
그러므로 점 A의 좌표가 $(3, 2)$일 확률은 0이다.

v) 동전을 4번 던져 시행을 마쳤을 때 점 A의 좌표가 $(4, 0)$일 확률

동전을 3번 던졌을 때 점 A의 좌표가 $(3, 0)$이어야 한다.
점 A의 좌표가 $(3, 0)$이려면
동전을 3번 던졌을 때 앞면만 3번 나와야 한다.
그러므로 동전을 3번 던졌을 때 점 A의 좌표가 $(3, 0)$일 확률은

${}_3\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$ 이다.

동전을 4 번 던졌을 때 점 A 의 좌표가 $(4, 0)$ 이려면
4 번째 시행에서 앞면이 나와야 하므로 구하는 확률은
$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 이다.

따라서 동전을 던지는 시행을 마쳤을 때, 동전을 4 번 던졌을 확률은
$\frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ 이다.

29) [정답] 44 (출제자 : 22 고명준)
[출제의도] 이산확률변수를 이용하여 그래프의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]
함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = n$ 이 만나는 점의 개수가 0, 1, 2 인 경우의 수를 각각 p', q', r' 이라 하자. (p', q', r' 은 자연수)
n 은 1 부터 6 까지의 자연수 값을 가지므로
$p = \frac{p'}{6}$, $q = \frac{q'}{6}$, $r = \frac{r'}{6}$ 이고
$p + q + r = 1$ 에서 $p' + q' + r' = 6$ 이다.

$\mathrm{E}(X) = 0 \times p + 1 \times q + 2 \times r = \frac{q'}{6} + \frac{r'}{3} = \frac{4}{3}$ 이므로
$q' + 2r' = 8$ 이고,
이때 가능한 순서쌍 (q', r') 은 $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(6, 1)$ 이다.

$q' = 2$, $r' = 3$ 일 때, $p' + q' + r' = 6$ 에서 $p' = 1$ 이다.
$q' = 4$, $r' = 2$ 일 때, $p' + q' + r' = 6$ 에서 $p' = 0$ 이므로
p' 이 자연수라는 조건에 모순이다.
$q' = 6$, $r' = 1$ 일 때, $p' + q' + r' = 6$ 에서 $p' = -1$ 이므로
p' 이 자연수라는 조건에 모순이다.
따라서 가능한 순서쌍 (p', q', r') 은 $(1, 2, 3)$ 뿐이다.

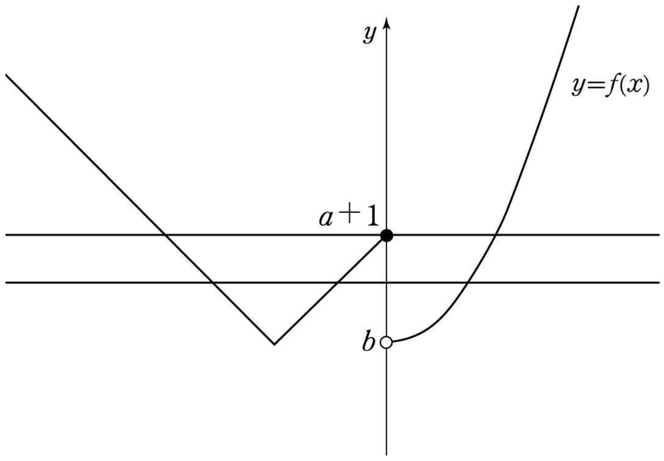
따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = n$ 이 만나는 점의 개수는
0, 1, 2 뿐이고, 각각의 경우의 수는 1, 2, 3 이다.

만약 $a > 5$ 이면 $r' = 0$ 또는 $r' = 1$ 이므로 $r' = 3$ 이라는 조건에 모순이다.
따라서 $a \le 5$ 이다.

이때, 자연수 b 에 대하여 $b < a + 1$ 이면 다음 그림과 같이 $n = a + 1$ 일 때, 다음 그림과 같이 $X = 3$ 인 경우가 생기므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

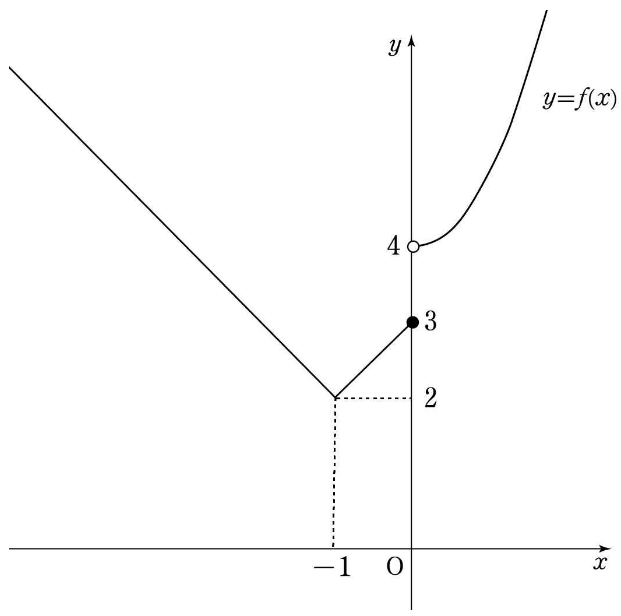


따라서 $b \ge a + 1$ 이다.

또한, 함수 $y = f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값 a 를 가지므로 $X = 0$ 이기 위해서는 $n < a$ 이어야 한다.
$p' = 1$ 이므로 $n < a$ 를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 1 이다.
따라서 $a = 2$ 이다.

또한, $n = a + 1$ 또는 $n > b$ 일 때 $X = 2$ 이고, $r' = 3$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 3 이다.
따라서 $n = 3$, $n = 5$, $n = 6$ 일 때, $X = 2$ 이고 $b = 4$ 이다.

이를 그림으로 나타내보면 다음과 같다.



$a = 2$, $b = 4$ 이므로 $f(-3) + f(6) = 4 + 40 = 44$ 이다.

30) [정답] 808 (출제자 : 22 문희성)
[출제의도] 중복순열과 여사건을 활용한 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 집합을 A 라 하고 조건 (나)를 만족시키는 함수 f 의 집합을 B 라 하자.

조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는
조건 (나)를 만족시키는 함수 f 의 개수에서 조건 (나)를 만족시키면서
조건 (가)를 만족시키지 않는 함수 f 의 개수를 뺀 값과 같다.
즉, $n(A \cap B) = n(B \cap A) = n(B) - n(B \cap A^C)$ 이다.

또한 조건 (가)를 만족시키지 않는 함수는 f 의 역함수가 존재하는 함수, 즉 일대일대응 함수이다.
따라서 구하는 값은 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 f 의 개수에서 조건 (나)를 만족시키는 일대일대응 함수 f 의 개수를 뺀 값이다.

그리고 조건 (나)에서 $f(n)-f(6-n)=3$ 을 만족시키려면 3 이 아닌 자연수 n 에 대하여 $f(n)=4$, $f(6-n)=1$ 이거나 $f(n)=5$, $f(6-n)=2$ 여야 하고, 이를 만족시키는 4 이하의 자연수 n 의 개수는 1 이다.

이제 n 의 값이 1 , 2 , 4 , 5 일 때를 나눈 뒤, 각 n 의 값에 대하여 $n(B)-n(B\cap A^C)$ 를 구해보자.

ⅰ) $n=1$ 일 때
조건 (나)에 의해 $f(1)=4$, $f(5)=1$ 이거나 $f(1)=5$, $f(5)=2$ 이고 $f(n)-f(6-n)=3$ 을 만족시키는 4 이하의 자연수 n 의 개수가 1 이므로 $n\neq1$ 일 때 조건 (나)를 만족시키지 않아야 한다.

따라서 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 조건 (나)와 상관없이 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 의 값을 정해주는 모든 경우의 수에서 $n=2$, $n=4$ 일 때 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수를 뺀 값과 같다.

ⅰ) - ① $f(1)=4$, $f(5)=1$ 일 때
조건 (나)와 상관없이 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 의 값을 정해주는 모든 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=125$ 이다.

$n=2$ 일 때 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 $f(2)=4$, $f(4)=1$ 이거나 $f(2)=5$, $f(4)=2$ 인 함수이므로 $2\times5=10$ 이다.

$n=4$ 일 때 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 $f(4)=4$, $f(2)=1$ 이거나 $f(4)=5$, $f(2)=2$ 인 함수이므로 $2\times5=10$ 이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는
$n(B)=125-10-10=105$ 이다.

또한 조건 (나)를 만족시키는 일대일대응 함수의 개수는
$n(B\cap A^C)=n(A^C)-n(A^C\cap B^C)$ 이고
$n(A^C)=3!=6$ 이다.

또한 $A^C\cap B^C$, 즉 조건 (나)를 만족시키지 않는 일대일대응 함수는
$f(1)=4$, $f(2)=5$, $f(3)=3$, $f(4)=2$, $f(5)=1$ 인 경우와
$f(1)=4$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=5$, $f(5)=1$ 인 경우이므로
$n(A^C\cap B^C)=2$ 이다.

따라서 $n(B\cap A^C)=n(A^C)-n(A^C\cap B^C)=4$ 이고
$n(B)-n(B\cap A^C)=105-4=101$ 이다.

ⅰ) - ② $f(1)=5$, $f(2)=2$ 일 때
$f(1)=4$, $f(5)=1$ 일 때와 $f(1)=5$, $f(5)=2$ 일 때의 각각의 경우의 수를 구할 때 함숫값의 차이만 생길 뿐, 경우의 수를 구하는 과정은 서로 같으므로 경우의 수 역시 같다.

따라서 $n(B)-n(B\cap A^C)=101$ 이다.

따라서 $n=1$ 일 때 조건 (가)와 (나)를 동시에 만족시키는 함수의 개수는 $101+101=202$ 이다.

ⅱ) $n=2$ 일 때
조건 (나)에 의해 $f(2)=4$, $f(4)=1$ 이거나 $f(2)=5$, $f(4)=2$ 이고 $f(n)-f(6-n)=3$ 을 만족시키는 4 이하의 자연수 n 의 개수가 1 이므로 $n\neq2$ 일 때 조건 (나)를 만족시키지 않아야 한다.

따라서 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 조건 (나)와 상관없이 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 의 값을 정해주는 모든 경우의 수에서 $n=1$, $n=5$ 일 때 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수를 뺀 값과 같다.

이때, $n=1$ 일 때와 $n=2$ 일 때를 살펴보면 n 의 값에 따른 함숫값의 차이만 생길 뿐, 경우의 수를 구하는 과정은 서로 같고 그에 따른 경우의 수 역시 같다.

따라서 $n=2$ 일 때 조건 (가)와 (나)를 동시에 만족시키는 함수의 개수는 $101+101=202$ 이다.

따라서 $n=4$, $n=5$ 일 때의 경우의 수를 구하는 과정 역시 $n=1$, $n=2$ 일 때와 같고 그에 따른 경우의 수 역시 같다.

즉, $n=4$ 일 때와 $n=5$ 일 때 조건 (가)와 (나)를 동시에 만족시키는 함수의 개수는 각각 202 이다.

따라서 조건 (가)와 (나)를 동시에 만족시키는 모든 함수의 개수는 $202\times4=808$ 이다.

2023학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ④ (출제자 : 22 임지훈)

[출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 4^{n+1}+2}{3\times 2^{2n}+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 4+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3+\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{9\times 4}{3}=12$$ 이다.

24) [정답] ② (출제자 : 21 박창수)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

등식 $4\ln(3-y)+xy^3=8$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$-\frac{4}{3-y}\frac{dy}{dx}+y^3+3xy^2\frac{dy}{dx}=0$ 이다.

이 식을 $\frac{dy}{dx}$ 에 대하여 정리하면

$-4\frac{dy}{dx}+(3-y)y^3+3xy^2(3-y)\frac{dy}{dx}=0$,

$\frac{dy}{dx}=\frac{(3-y)y^3}{4-3xy^2(3-y)}$ 이다. (단, $4-3xy^2(3-y)\neq 0$)

따라서 곡선 위의 점 $(1,2)$ 에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{8}{4-12}=-1$ 이다.

25) [정답] ⑤ (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 주어진 곡선의 변곡점에서의 접선을 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=e^x(1-x)$ 이므로

$f'(x)=-xe^x$ 이고 $f''(x)=-(x+1)e^x$ 이다.

$f''(-1)=0$ 이고 $x=-1$ 에서 $f''(x)$ 의 함숫값의 부호가 변하므로

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은 $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$ 이다.

$f'(-1)=\frac{1}{e}$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,f(-1))$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y&=f'(-1)(x+1)+f(-1)\\&=\frac{1}{e}(x+1)+\frac{2}{e}\\&=\frac{1}{e}x+\frac{3}{e}\end{aligned}$$ 이다.

이 접선의 x 절편은 -3 이고 y 절편은 $\frac{3}{e}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{e}=\frac{9}{2e}$ 이다.

26) [정답] ③ (출제자 : 22 윤성준)

[출제의도] 등비급수를 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외접원의 반지름의 길이는 1 이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\sin(\angle A_1B_1C_1)}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=2$$ 에서 $\overline{A_1C_1}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

$\angle A_1E_1O=\frac{\pi}{2}$, $\angle A_1D_1O=\frac{\pi}{2}$ 이고,

점 O 는 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 세 변의 수직이등분선의 교점이므로

$\overline{A_1E_1}=\overline{C_1E_1}$, $\overline{A_1D_1}=\overline{B_1D_1}$ 이다.

따라서 $\overline{A_1E_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이고, $\overline{A_1O}=1$ 이므로

삼각형 A_1OE_1 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{OE_1}&=\sqrt{\overline{A_1O}^2-\overline{A_1E_1}^2}\\&=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$ 이고, 원 C_1 의 넓이는 $\frac{1}{3}\pi$ 이다.

원 C_1 이 선분 A_1B_1 과 선분 A_1C_1 에 접하므로

이때 삼각형 A_1OD_1 과 삼각형 A_1OE_1 에서 $\overline{OD_1}=\overline{OE_1}$,

$\angle A_1D_1O=\angle A_1E_1O=\frac{\pi}{2}$ 이고 선분 A_1O 는 공통 변이므로

삼각형 A_1OD_1 과 삼각형 A_1OE_1 는 서로 합동이다. (RHS 합동)

따라서 $\overline{A_1D_1}=\overline{A_1E_1}$ 이다.

$\cos^2(\angle A_1B_1C_1)=1-\sin^2(\angle A_1B_1C_1)=1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$ 이고

$\angle A_1B_1C_1<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos(\angle A_1B_1C_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$$\begin{aligned}\overline{B_1C_1}&=\overline{A_1B_1}\times\cos(\angle A_1B_1C_1)+\overline{A_1C_1}\times\cos(\angle A_1C_1B_1)\\&=2\times\overline{A_1B_1}\times\cos(\angle A_1B_1C_1)\\&=2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\\&=\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$ 이다.

삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{A_1B_1} \times \overline{B_1C_1} \times \sin(\angle A_1B_1C_1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3}$$
$= \dfrac{8\sqrt{2}}{9}$ 이므로

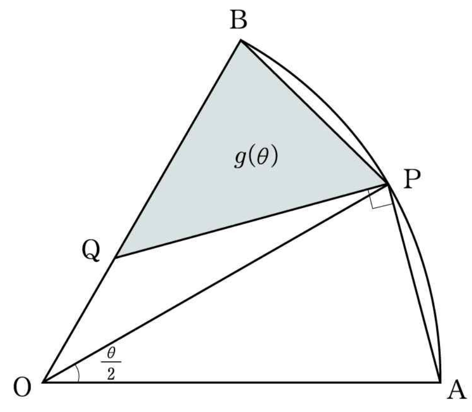
$S_1 =$ (삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이) $-$ (원 C_1 의 넓이)
$= \dfrac{8\sqrt{2}}{9} - \dfrac{1}{3}\pi$ 이다.

$\sin(\angle A_1B_1C_1) = \sin(\angle A_1C_1B_1)$ 이고
$\sin(\angle A_2B_2C_2) = \sin(\angle A_2C_2B_2)$ 이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 와
삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 닮음이다. (AA 닮음)
삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외접원과 원 C_1 의 넓이의 비가 $1 : \dfrac{1}{3}$ 이므로
수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{8\sqrt{2}}{9} - \dfrac{1}{3}\pi$ 이고, 공비가 $\dfrac{1}{3}$ 인 등비수열의 합이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{3}\pi}{1 - \frac{1}{3}}$
$= \dfrac{8\sqrt{2} - 3\pi}{6}$ 이다.

27) [정답] ① (출제자 : 22 고명준)
[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]



삼각형 BOP 와 삼각형 AOP 에서 $\overline{BP} = \overline{AP}$, $\overline{OB} = \overline{OA}$ 이고
선분 OP 는 공통 변이므로 삼각형 BOP 와 삼각형 AOP 는 서로 합동이다.
따라서 $\angle BOP = \angle AOP = \dfrac{\theta}{2}$ 이다.

삼각형 POA 는 $\overline{OP} = \overline{OA}$ 인 이등변삼각형이므로
$\angle OPA = \dfrac{2\pi - \theta}{4}$ 이고
$\angle QPO = \angle QPA - \angle OPA = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi-\theta}{4} = \dfrac{\theta}{4}$ 이다.

삼각형 QOP 에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{QO}}{\sin(\angle QPO)} = \dfrac{\overline{PO}}{\sin(\angle OQP)}$ 이고
$\angle OQP = \pi - \angle QOP - \angle QPO = \pi - \dfrac{3}{4}\theta$ 이므로

$$\overline{QO} = \frac{\overline{PO} \times \sin(\angle QPO)}{\sin(\angle OQP)}$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\left(\pi - \frac{3}{4}\theta\right)}$$
$= \dfrac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta}$ 이다.

따라서 $f(\theta) = \dfrac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta}$ 이다.

삼각형 BQP 의 넓이는 삼각형 BOP 의 넓이에서 삼각형 QOP 의 넓이를 뺀 것과 같다.

삼각형 BOP 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OP} \times \sin(\angle BOP)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\frac{1}{2}\theta$$
$= \dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{2}$ 이고

삼각형 QOP 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OP} \times \sin(\angle QOP)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta} \times 1 \times \sin\frac{1}{2}\theta$$
$= \dfrac{\sin\frac{1}{4}\theta \times \sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{3}{4}\theta}$ 이다.

그러므로 삼각형 BQP 의 넓이

$$g(\theta) = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{2} - \frac{\sin\frac{1}{4}\theta \times \sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{3}{4}\theta}$$
$= \dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{2}\left(1 - \dfrac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta}\right)$ 이다.

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta} \times \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{2} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta}\right)}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+} \left\{\frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\sin\frac{3}{4}\theta}\right) \times \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right\}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+} \left\{\frac{1}{2} \times \frac{\frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\theta}}{\frac{\sin\frac{3}{4}\theta}{\theta}} \times \left(1 - \frac{\frac{\sin\frac{1}{4}\theta}{\theta}}{\frac{\sin\frac{3}{4}\theta}{\theta}}\right) \times \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \times \left(1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right) \times \frac{1}{2}$$

$= \dfrac{1}{18}$ 이다.

28) [정답] ② (출제자 : 22 김건우)

[출제의도] 정적분을 활용하여 주어진 조건을 만족하는 수열을 추론할 수 있는가?

[해설]

수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n = \int_{2^{n-1}}^{2^n} f(x)\,dx$ 라 하자.

$$\int_{2^{n-1}}^{2^n} f(x)\,dx$$
$$= \int_{2^{n-1}}^{2^n} \{a_n \times \sin(2^{1-n}\pi x)\}\,dx$$
$$= \left[-\frac{a_n \times 2^{n-1}}{\pi}\cos(2^{1-n}\pi x)\right]_{2^{n-1}}^{2^n}$$
$$= -\frac{a_n \times 2^n}{\pi}$$

$\int_1^{2^n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k \times 2^k}{\pi}\right)$ 이므로

조건 (나)에 의하여 $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k \times 2^k}{\pi}\right)$ 의 값의 개수는 2 이다.

만약 등비수열 $\{|a_n|\}$의 공비가 0 이면 $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k \times 2^k}{\pi}\right) = -\frac{2a_1}{\pi}$ 으로 $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k \times 2^k}{\pi}\right)$ 의 값의 개수는 1 이다.

또한, 등비수열 $\{|a_n|\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이 아니라면,

$-\frac{a_n \times 2^n}{\pi} = p \times q^n$ (단, $q < 0$ 또는 $0 < q < 1$ 또는 $q > 1$ 이고, $p \neq 0$) 꼴로 표현된다.

이때 어떤 경우이든 $\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k \times 2^k}{\pi}\right)$ 의 값의 개수는 2 보다 크다.

따라서 등비수열 $\{|a_n|\}$의 공비는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또한 집합 $\left\{\int_1^{2^n} f(x)\,dx \,\middle|\, n \text{은 자연수}\right\}$ 의 원소의 개수가 2 이기 위해서는 아래와 같은 경우를 만족시켜야 한다.

	$1 \le x \le 2$	$2 \le x \le 2^2$	$2^2 \le x \le 2^3$	$2^3 \le x \le 2^4$	$2^4 \le x \le 2^5$	$\cdots$
A	$f(x) \le 0$	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$\cdots$
B	$f(x) \ge 0$	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$\cdots$
C	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$\cdots$
D	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$f(x) \le 0$	$f(x) \ge 0$	$\cdots$

i) 첫째항을 제외하고 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 일 때 (A 또는 B)

$\{a_n\}$: $a_1,\ \frac{1}{2}a_1,\ -\frac{1}{4}a_1,\ \frac{1}{8}a_1,\ -\frac{1}{16}a_1,\ \cdots$ 이고

$a_2 = \frac{1}{2}a_1 = 8$ 이므로 $a_1 = 16$ 이다.

ii) 첫째항부터 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 일 때 (C 또는 D)

$\{a_n\}$: $a_1,\ -\frac{1}{2}a_1,\ \frac{1}{4}a_1,\ -\frac{1}{8}a_1,\ \frac{1}{16}a_1,\ \cdots$ 이고

$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 = 8$ 이므로 $a_1 = -16$ 이고, 이는 $a_1 > 0$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_1 = 16$ 이고, 이때 $a_5 = -1$ 이므로

$a_1 + a_5 = 16 + (-1) = 15$ 이다.

29) [정답] 4 (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 주어진 함수를 해석하여 극대와 극소를 파악할 수 있는가? 수열의 극한을 이해하고 계산할 수 있는가?

[해설]

함수 $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ 라 하면 $g(x) = \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ 에서

$g(x) = h(f(x))$ 이다.

함수 $f(x)$는 0 이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키므로 $g(-x) = h(f(-x)) = h(-f(x)) = h(f(x)) = g(x)$ 이다.

즉, 함수 $g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$x \neq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이고

함수 $f(x)$는 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 미분가능하다.

$g'(x) = h'(f(x))f'(x) = \frac{f'(x)\{f(x)\cos f(x) - \sin f(x)\}}{\{f(x)\}^2}$

이므로 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 될 수 있는 x의 값은

방정식 $g'(x) = 0$ 의 실근, 즉 방정식 $f'(x) = 0$ 과 방정식

$f(x)\cos f(x) - \sin f(x) = 0$ 의 실근이다.

만약 $f(x) = p\pi + \frac{\pi}{2}$ (p는 정수)이면

$f(x) \times \cos f(x) = 0$ 이지만 $\sin f(x) \neq 0$ 이므로

방정식 $f(x)\cos f(x) - \sin f(x) = 0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)\cos f(x) - \sin f(x) = 0$ 의 실근은

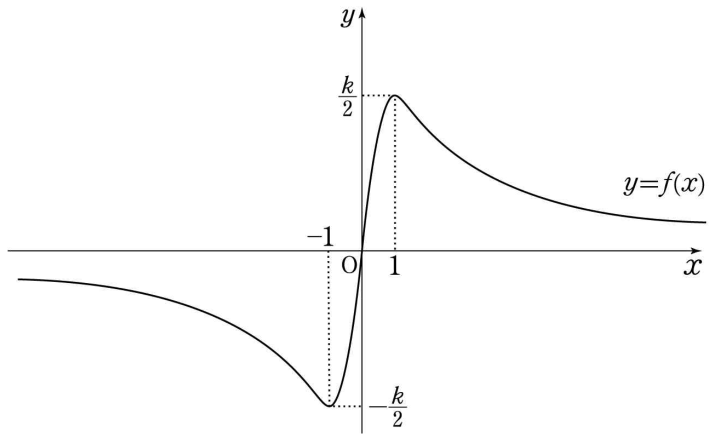
방정식 $f(x) - \tan f(x) = 0$ 의 실근과 같다.

$f(x) = \frac{kx}{x^2+1}$ 를 미분하면

$f'(x) = \frac{k \times (x^2+1) - kx \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{k(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x = 1$ 에서 극대, $x = -1$ 에서 극소이다. ($\because k > 0$)

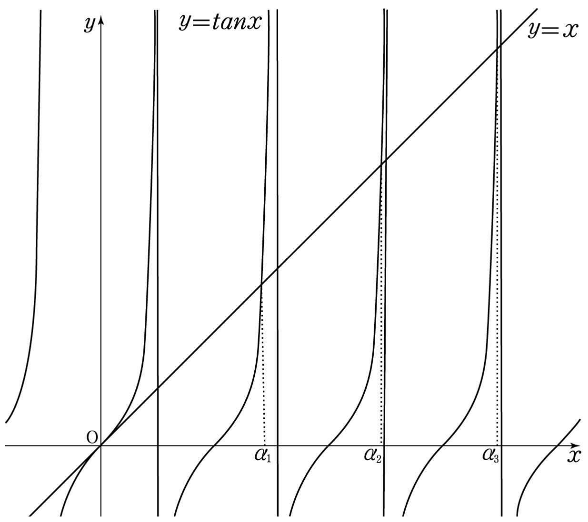
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $f(x)$의 값의 범위는 $-\frac{k}{2} \le f(x) < 0$,

$0 < f(x) \le \frac{k}{2}$이다.

다음 그림과 같이 방정식 $x - \tan x = 0$의 양의 실근을 작은 것부터 크기순으로 α_1, α_2, α_3, $\cdots$ 이라 하자.



$y = f(x) - \tan f(x)$에 대하여

$f(x) - \tan f(x) = (x - \tan x) \circ f(x)$ 이므로

만약 함수 $f(x)$의 최댓값 $\frac{k}{2}$가 α_1보다 작으면

방정식 $f(x) - \tan f(x) = 0$의 실근은 존재하지 않는다.

이처럼 $\frac{k}{2}$의 값의 범위에 따라 방정식 $f(x) - \tan f(x) = 0$의 실근이 결정되므로 $\frac{k}{2}$의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

i) $\frac{k}{2} < \alpha_1$인 경우

$0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$일 때, $\tan f(x) - f(x) < 0$이고 $\cos f(x) > 0$이므로

$f(x)\cos f(x) - \sin f(x) < 0$이다.

$f(x) = \frac{\pi}{2}$일 때,

$f(x)\cos f(x) - \sin f(x) = \frac{\pi}{2} \times 0 - \sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$ 이다.

$\frac{\pi}{2} < f(x) < \alpha_1$일 때, $\tan f(x) - f(x) > 0$이고 $\cos f(x) < 0$이므로

$f(x)\cos f(x) - \sin f(x) < 0$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{k}{2}$	↘
$h'(f(x))$	$-$	$-$	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$g(1)$	↗

따라서 $x > 0$일 때, 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극소이다.

함수 $g(x) = \frac{\sin f(x)}{f(x)}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$는 $x = -1$에서 극소이다.

그러므로 $x < 0$일 때, 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

따라서 $\frac{k}{2} < \alpha_1$일 때,

함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 2이다.

ii) $\frac{k}{2} = \alpha_1$인 경우

$x > 0$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{k}{2}$	↘
$h'(f(x))$	$-$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$g(1)$	↗

따라서 $x > 0$일 때, 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극소이다.

함수 $g(x) = \frac{\sin f(x)}{f(x)}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$x < 0$일 때, 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

따라서 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 2이다.

iii) $\alpha_1 < \frac{k}{2} < \alpha_2$인 경우

방정식 $f(x) = \alpha_1$을 만족시키는 x의 값을 각각 β_1, β_2 $(\beta_1 < \beta_2)$라 하면 $x > 0$일 때 함수 $g(x)$의 그래프의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	β_1	$\cdots$	1	$\cdots$	β_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	α_1	↗	$\frac{k}{2}$	↘	α_1	↘
$h'(f(x))$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$g(\beta_1)$	↗	$g(1)$	↘	$g(\beta_2)$	↗

따라서 $x > 0$일 때, 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

함수 $g(x) = \frac{\sin f(x)}{f(x)}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$x < 0$일 때, 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이다.

따라서 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 6이다.

iv) $\alpha_1 < \frac{k}{2} = \alpha_2$ 인 경우

방정식 $f(x) = \alpha_1$ 을 만족시키는 x 의 값을 각각 β_1, $\beta_2 (\beta_1 < \beta_2)$ 라 하자. 방정식 $f(x) = \alpha_2$ 를 만족시키는 x 의 값은 1 뿐이므로 $x > 0$ 일 때 함수 $g(x)$의 그래프의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	β_1	$\cdots$	1	$\cdots$	β_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	α_1	$\nearrow$	$\frac{k}{2}$	$\searrow$	α_1	$\searrow$
$h'(f(x))$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(\beta_1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(\beta_2)$	$\nearrow$

따라서 $x > 0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 3 이다.

함수 $g(x) = \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 $x < 0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 3 이다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 6 이다.

위의 ⅰ) ~ iv) 에서

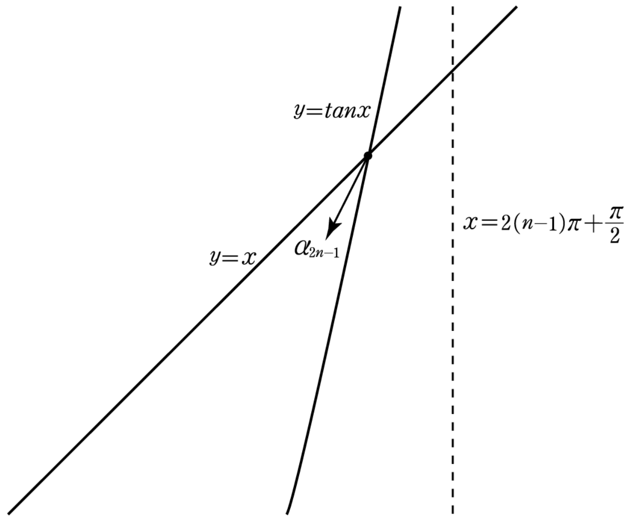
$0 < \frac{k}{2} \le \alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 2 이고

$\alpha_1 < \frac{k}{2} \le \alpha_2$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 6 이다.

$\alpha_2 < \frac{k}{2} \le \alpha_3$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 10 이다.

함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수가 $8n-6$ 이 되도록 하는 가장 큰 실수 k 의 값이 k_n 이므로
$k_1 = 2\alpha_1$, $k_2 = 2\alpha_3$, $\cdots$, $k_n = 2\alpha_{2n-1}$ 이다.

$\alpha_1 + 2\pi < \alpha_3$
$\alpha_3 + 2\pi < \alpha_5$
$\cdots$
$\alpha_{2n-3} + 2\pi < \alpha_{2n-1}$ 이므로
위의 식을 변끼리 더하여 정리하면
$\alpha_1 + 2(n-1)\pi < \alpha_{2n-1}$ 이다.



또한 위의 그림과 같이 $\alpha_{2n-1} < 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$ 이므로
$\alpha_1 + 2(n-1)\pi < \alpha_{2n-1} < 2n\pi - \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\frac{\alpha_1 + 2(n-1)\pi}{n} < \frac{\alpha_{2n-1}}{n} < \frac{2n\pi - \frac{\pi}{2}}{n}$ 에서
수열의 극한의 대소관계에 의해

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + 2(n-1)\pi}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{2n-1}}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{2n\pi - \frac{\pi}{2}}{n}$ 이고

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + 2(n-1)\pi}{n} = 2\pi$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n\pi - \frac{\pi}{2}}{n} = 2\pi$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{2n-1}}{n} = 2\pi$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\alpha_{2n-1}}{n\pi} = 4$ 이다.

[추가해설]
y 축에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 극소라 하자. 이때 절댓값이 충분히 작은 $h\ (h \ne 0)$에 대하여 $g(a+h) \ge g(a)$ 이다.
$g(a) = g(-a)$ 에서 $g(-a-h) \ge g(-a)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = -a$ 에서 극소이다.

30) [정답] 11 (출제자 : 22 김건우)
[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용할 수 있는가?

[해설]
$g(h(x)) = x$ 이므로
$g'(h(x))h'(x) = 1\,(g'(h(x)) \ne 0)$, $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$ 이다.
이때 $g'(x) = e^x |f(e^x)|$ 이므로 $g'(h(x)) \ne 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 에 대하여 $g'(h(x)) > 0$ 이다.
만약 $m \le 0$ 이면 $x = 0$, a 일 때 $g'(h(x))h'(x) = 1$ 을 만족시키지 않으므로 $m > 0$ 이다.

함수 $h(x)$ 는 역함수 $g(x)$ 가 존재하므로 함수 $h(x)$ 는 일대일대응이다.
$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$ 이므로 함수 $\frac{1}{g'(x)}$ 는 $x = h(0)$ 과 $x = h(a)$ 에서 동일한 극솟값 m 을 가진다.

절댓값이 충분히 작은 $s\ (s \ne 0)$에 대하여

$\dfrac{1}{g'(h(0)+s)} \geq \dfrac{1}{g'(h(0))}$ 이다.

$m>0$ 이므로 $g'(h(0)+s) \leq g'(h(0))$ 이다.

따라서 함수 $g'(x)$ 는 $x=h(0)$ 에서 극댓값 $\dfrac{1}{m}$ 을 가진다.

같은 방법으로 함수 $g'(x)$ 는 $x=h(a)$ 에서 극댓값 $\dfrac{1}{m}$ 을 가진다.

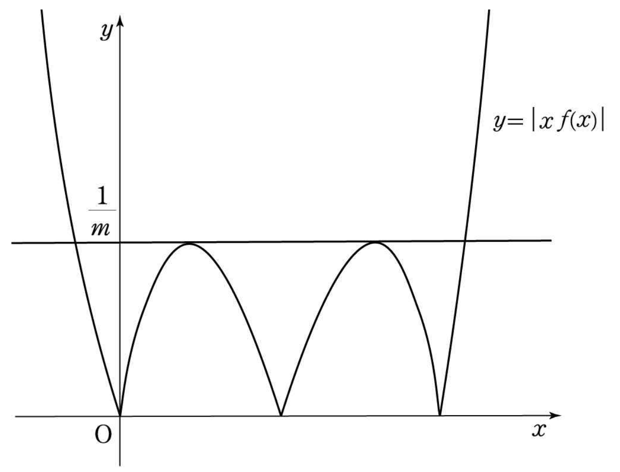
그러므로 함수 $g'(x)$ 는 $x=h(0)$ 과 $x=h(a)$ 에서 동일한 극댓값 $\dfrac{1}{m}$ 을 가진다.

$g'(x)=e^x \times |f(e^x)| = |e^x \times f(e^x)|$ 이므로
$g'(x)=x|f(x)| \circ e^x$ 또는 $g'(x)=|xf(x)| \circ e^x$ 이다.
함수 $y=e^x$ 의 치역이 $\{y|y>0\}$ 이므로 함수 $x|f(x)|$ 는 $x>0$ 에서만 다루어진다.
따라서 $x|f(x)|=|xf(x)|$ 이므로 $g'(x)=|xf(x)| \circ e^x$ 라 하자.

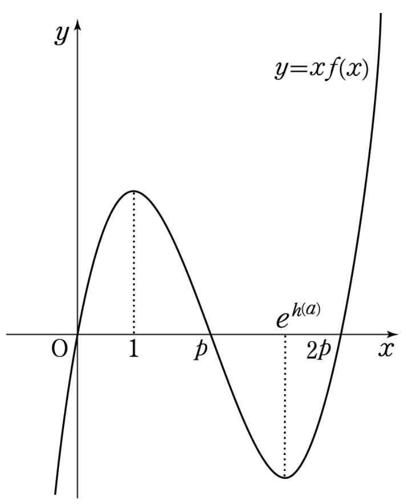
함수 $y=e^x$ 는 일대일대응이고, 함수 $g'(x)=|xf(x)| \circ e^x$ 는 $x=h(0)$ 과 $x=h(a)$ 에서 동일한 극댓값 $\dfrac{1}{m}$ 을 가지므로
함수 $|xf(x)|$ 는 $x=e^{h(0)}$ 과 $x=e^{h(a)}$ 에서 동일한 극댓값 $\dfrac{1}{m}$ 을 가진다.

$g(0)=0$ 이므로 $h(0)=0$ 이고, $e^{h(0)}=1$ 이다.
a 는 양수이므로 $h(a)>0$ 이고, $e^{h(a)}>1$ 이다.
그러므로 함수 $|xf(x)|$ 는 $x=1$ 과 $x=e^{h(a)}$ ($e^{h(a)}>1$)에서 동일한 극댓값 $\dfrac{1}{m}$ 을 가진다.

함수 $xf(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이다.
이때 가능한 함수 $|xf(x)|$ 의 개형은 아래와 같은 경우뿐이다.



따라서 가능한 삼차함수 $xf(x)$ 의 개형은 아래와 같은 경우뿐이다.



어떤 양수 p 에 대하여
$xf(x)=x(x-p)(x-2p)=x^3-3px^2+2p^2x$ 라 하자.

$\{xf(x)\}'=3x^2-6px+2p^2$ 에 $x=1$ 을 대입하면
$2p^2-6p+3=0$ 이므로 $p=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ ($\because p>1$)이다.

따라서 $xf(x)=x\left(x-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)(x-(3+\sqrt{3}))$ 이다.

이때 $\dfrac{1}{m}=1\times f(1)=\dfrac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$ 이므로
$m=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$ 이다.

또한
$\{xf(x)\}'$
$=3x^2-6px+2p^2$
$=3x^2-3(3+\sqrt{3})x+(6+3\sqrt{3})$
$=3(x-1)(x-2-\sqrt{3})$
에서 $e^{h(a)}=2+\sqrt{3}$ 이다.

그러므로 $3e^{h(a)}-m=3(2+\sqrt{3})-(3\sqrt{3}-5)=11$ 이다.

2023학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(기하) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ② (출제자 : 22 임지훈)

[출제의도] 좌표공간에서의 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

점 A를 원점에 대하여 대칭이동한

점 B의 좌표는 $(-2, 1, 0)$이므로 선분 BC의 길이는

$\sqrt{\{-2-(-1)\}^2+(1-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$ 이다.

24) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 평면벡터의 성분을 이용하여 평행한 벡터를 구할 수 있는가?

[해설]

$\overrightarrow{AB}=(3, 6)$ 이고

$\overrightarrow{OB}=(2, 3)$, $\overrightarrow{OC}=(a, a)$이므로

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(a+2, a+3)$ 이다.

$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$가 평행하므로

$3:6=a+2:a+3$ 에서

$3(a+3)=6(a+2)$ 이므로

$a=-1$ 이다.

25) [정답] ② (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 의 두 초점은 각각 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ 이다.

타원 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 이 y축과 만나는 점은 점 $(0, 2)$, 점 $(0, -2)$ 이므로

점 A의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

삼각형 AFP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P는 직선 AF와 기울기가 같은 직선이 타원과 접하는 점 중 제1사분면 위의 점이므로

점 P에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$ 이다.

그러므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{20\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4}$$
$$=-\frac{1}{2}x+3 \text{ 이다.}$$

직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 과 직선 AF 사이의 거리는

점 $A(0, 2)$와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2-3|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이고

$\overline{AF}=2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 AFP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times2\sqrt{5}=2$ 이다.

26) [정답] ③ (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 위치벡터를 이해하고 벡터로 직선을 표현할 수 있는가?

[해설1] 위치벡터를 이용한다.

주어진 식을 모두 시점이 A인 벡터들로 표현하면

$-\overrightarrow{AX}+(t+1)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AX})+(t+1)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AX})=2t(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AX})$

이다.

이를 정리하면

$\overrightarrow{AX}=\dfrac{t+1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t+1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2t}{3}\overrightarrow{AD}$ 이고

정사각형 ABCD에 대해 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 이므로

$$\overrightarrow{AX}=\frac{t+1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{t+1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\frac{2t}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{2t+2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1-t}{3}\overrightarrow{AD} \text{ 이다.}$$

이를 다시 정리하면

$\overrightarrow{AX}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)+t\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$ 이므로

$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ 의 종점을 지나고

방향벡터가 $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ 인 직선을 l이라 할 때,

점 X는 직선 l 위의 점이다.

그러므로 $|\overrightarrow{AX}|$ 의 값은 $\overrightarrow{AX}$와 직선 l이 수직일 때,

즉 $\overrightarrow{AX}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=0$ 일 때 최소이다.

$$\overrightarrow{AX}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$$
$$=\left\{\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)+t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\right\}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$$
$$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$$
$$=\frac{1}{3}\left(4|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2\right)+\frac{t}{3}\left(4|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2\right)$$
$$=225+\frac{5\times225}{3}t=0 \text{ 에서}$$

$t=-\dfrac{3}{5}$ 이다.

$t=-\dfrac{3}{5}$ 일 때, $\overrightarrow{AX}=\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AB}-\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AD}$ 이므로

$$|\overrightarrow{AX}|=\sqrt{\frac{16}{225}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{64}{225}|\overrightarrow{AD}|^2}$$
$$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

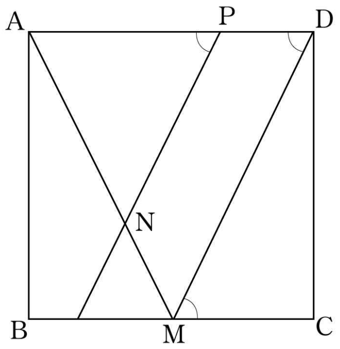
따라서 $|\overrightarrow{AX}|$ 의 최솟값은 $4\sqrt{5}$ 이다.

[해설2] 내분점을 이용한다.
선분 BC 의 중점을 M 이라 하면
$\overrightarrow{XA} + (2t+2)\overrightarrow{XM} = 2t\overrightarrow{XD}$ 이다.
이를 정리하면 $\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XM} = 2t(\overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XM})$ 에서
$\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XM} = 2t\overrightarrow{MD}$ 이다.

선분 AM 의 $2:1$ 내분점을 N 이라 하면
$3\overrightarrow{XN} = 2t\overrightarrow{MD}$ 이다.
즉 점 N 을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{MD}$ 인 직선을 l 이라 할 때, 점 X 는 직선 l 위의 점이다.
그러므로 $|\overrightarrow{AX}|$ 의 최솟값은 점 A 에서 직선 l 까지의 거리이다.

직선 l 과 선분 AD 가 만나는 점을 P 라 하면 직선 NP 와 직선 MD 가 평행하므로 $\angle MDA = \angle NPA$ 이다.
삼각형 AMD 와 삼각형 ANP 에서 $\angle MDA = \angle NPA$ 이고 $\angle MAD$ 는 공통이므로 두 삼각형은 닮음이다. (AA 닮음)

$\overline{AN} : \overline{AM} = 2:3$ 이므로 닮음비는 $2:3$ 이다.
그러므로 $\overline{AP} : \overline{AD} = 2:3$ 에서 $\overline{AP} = 10$ 이다.



$\tan(\angle DMC) = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CM}} = 2$ 이므로 $\sin(\angle DMC) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.
각 DMC 와 각 MDA 는 엇각이므로 $\angle DMC = \angle MDA$ 이고,
$\angle MDA = \angle NPA$ 이므로 $\sin(\angle NPA) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

따라서 점 A 와 직선 NP 사이의 거리는
$\overline{AP}\sin(\angle NPA) = 4\sqrt{5}$ 이다.

[해설3] 성분을 이용한다.
점 A 의 좌표를 $(0, 0)$,
점 B 의 좌표를 $(15, 0)$,
점 C 의 좌표를 $(15, 15)$,
점 D 의 좌표를 $(0, 15)$,
점 X 의 좌표를 (x, y) 라 하자.

조건에 있는 벡터들을 성분으로 나타내면
$\overrightarrow{XA} = (-x, -y)$,
$\overrightarrow{XB} = (15-x, -y)$,
$\overrightarrow{XC} = (15-x, 15-y)$,
$\overrightarrow{XD} = (-x, 15-y)$ 이고 이를 주어진 조건에 대입하여 정리하면
$(-3x+30, -3y+15) = (-30t, 15t)$ 이다.

$t = \dfrac{x}{10} - 1$, $t = -\dfrac{y}{5} + 1$ 에서
$\dfrac{x}{10} - 1 = -\dfrac{y}{5} + 1$ 이고, 이를 정리하면
$x + 2y - 20 = 0$ 이므로 점 X 는 직선 $x + 2y - 20 = 0$ 위에 있다.

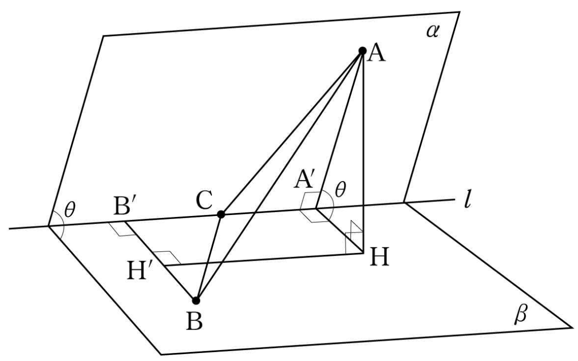
$|\overrightarrow{AX}|$ 의 최솟값은 점 A 로부터 직선 $x + 2y - 20 = 0$ 까지의 거리이므로
$\dfrac{|-20|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 4\sqrt{5}$ 이다.

27) [정답] ① (출제자 : 22 이수훈)
[출제의도] 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

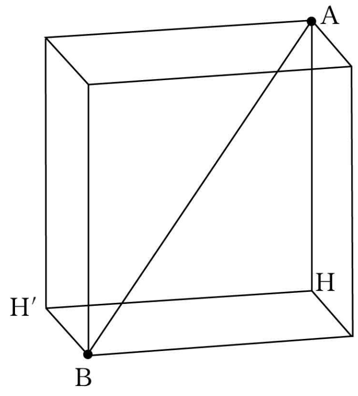
[해설1]
점 A 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 A′, 점 B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 B′ 라 하면 $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 3$ 이다.
피타고라스 정리에 의해 $\overline{CA'} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AA'}^2} = 1$ 이고
마찬가지로 $\overline{CB'} = 1$ 이다.

점 A 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼수선의 정리에 의해 직선 l 과 직선 HA′ 도 수직이다.
이때, 각 AA′H 의 크기는 이면각의 크기와 같으므로 $\angle AA'H = \theta$ 이다.
그러므로 $\overline{AH} = \overline{AA'}\sin\theta = 3\sin\theta$,
$\overline{HA'} = \overline{AA'}\cos\theta = 3\cos\theta$ 이다.

점 H 에서 직선 BB′ 에 내린 수선의 발을 H′ 이라 하면
사각형 HH′B′A′ 은 직사각형이므로 $\overline{HH'} = \overline{A'B'} = 2$,
$\overline{H'B'} = \overline{HA'} = 3\cos\theta$ 이다.
$\cos\theta \le 1$ 이므로 $\overline{H'B'} \le \overline{BB'}$ 이다.
그러므로 $\overline{BH'} = \overline{BB'} - \overline{H'B'} = 3 - 3\cos\theta$ 이다.



이때, 선분 AB 를 대각선으로 하는 아래와 같은 직육면체에서
가로, 세로, 높이는 각각 $\overline{HH'}$, $\overline{BH'}$, $\overline{AH}$ 이다.



따라서 $\overline{AB}^2 = \overline{HH'}^2 + \overline{BH'}^2 + \overline{AH}^2$ 이므로

$10 = 4 + (3 - 3\cos\theta)^2 + 9\sin^2\theta$

$\quad = 4 + 9 - 18\cos\theta + 9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta$ 에서

$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$ 이다.

[해설2]

점 A 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 A$'$, 점 B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 B$'$ 라 하면 $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 3$ 이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{CA'} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AA'}^2} = 1$ 이고

마찬가지로 $\overline{CB'} = 1$ 이다.

점 A 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼수선의 정리에 의해 직선 l 과 직선 HA$'$ 도 수직이다.

이때, 각 AA$'$H 의 크기는 이면각의 크기와 같으므로 $\angle AA'H = \theta$ 이다.

$\overline{HA'} = k$ 라 하면 $k = \overline{AA'}\cos\theta = 3\cos\theta$ 이고 $\cos\theta \le 1$ 이므로 $k \le 3$ 이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AA'}^2 - \overline{HA'}^2} = \sqrt{9 - k^2}$ 이고

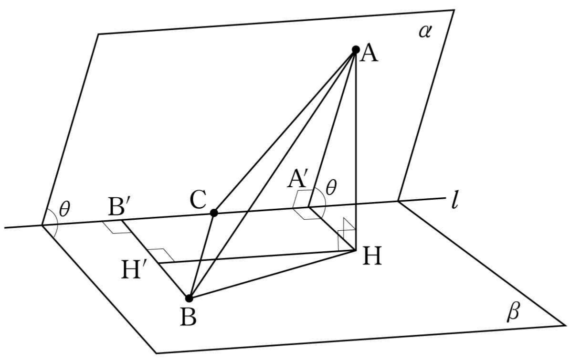
삼각형 AHB 에서 $\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{k^2 + 1}$ 이다.

점 H 에서 직선 BB$'$ 에 내린 수선의 발을 H$'$ 이라 하면

사각형 HH$'$B$'$A$'$ 은 직사각형이므로 $\overline{HH'} = \overline{A'B'} = 2$,

$\overline{H'B'} = \overline{HA'} = k$ 이다.

$k \le 3$ 이므로 $\overline{BH'} = \overline{BB'} - \overline{H'B'} = 3 - k$ 이다.



삼각형 BHH$'$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BH}^2 = \overline{BH'}^2 + \overline{HH'}^2$

$k^2 + 1 = (3 - k)^2 + 4$

$3(2k - 3) = 3$ 에서

$k = 2$ 이다.

따라서, $k = 3\cos\theta$ 이므로 $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$ 이다.

28) [정답] ③ (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 포물선의 성질을 이용해서 주어진 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

점 M 은 두 점 A, B 의 중점이므로 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이다.

$\overline{OM'} = \overline{B'O}$ 이고 $\overline{MM'} // \overline{BB'}$ 이므로 $\overline{MF} = \overline{BF}$ 이다.

그러므로 $\overline{AF} = \overline{AM} + \overline{MF} = \overline{BM} + \overline{BF} = 2\overline{BF} + \overline{BF} = 3\overline{BF}$ 에서

$\overline{BF} = \alpha\ (\alpha > 0)$ 라 하면 $\overline{AF} = 3\overline{BF} = 3\alpha$ 이다.

점 A, 점 B 에서 y 축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$ 이라 하고,

직선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 각각 A$''$, B$''$ 이라 하자.

포물선의 성질에 의해서 $\overline{AF} = \overline{AA''}$, $\overline{BF} = \overline{BB''}$ 이다.

$\overline{AA'} = \overline{AA''} - \overline{A'A''} = 3\alpha - p$, $\overline{BB'} = \overline{BB''} - \overline{B'B''} = \alpha - p$

$\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로

$\overline{MM'} = \dfrac{\overline{AA'} + \overline{BB'}}{2} = \dfrac{4\alpha - 2p}{2} = 2\alpha - p$ 이다.

$\overline{MF} = \overline{BF}$ 이므로 $\overline{OF} = \dfrac{\overline{MM'} + \overline{BB'}}{2}$ 이고

$\overline{OF} = p$ 이므로 $p = \dfrac{(2\alpha - p) + (\alpha - p)}{2} = \dfrac{3\alpha - 2p}{2}$, $p = \dfrac{3}{4}\alpha$ 이다.

그러므로 $\overline{MM'} = 2\alpha - p = \dfrac{5}{4}\alpha$ 이다.

점 B 에서 선분 AA$'$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

삼각형 ABH 에서

$\overline{AB} = 4\alpha$, $\overline{AH} = \overline{AA'} - \overline{BB'} = (3\alpha - p) - (\alpha - p) = 2\alpha$ 이다.

$\overline{BH}^2 = (4\alpha)^2 - (2\alpha)^2 = 12\alpha^2$, $\overline{BH} = 2\sqrt{3}\alpha$ 이다.

삼각형 ABM$'$ 의 넓이는 $20\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{삼각형 ABM}'\text{의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times \overline{MM'} \times \overline{BH} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\alpha \times 2\sqrt{3}\alpha \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{3}\alpha^2\end{aligned}$$

$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\alpha^2 = 20\sqrt{3}$, $\alpha = 4$ 이다.

$$\begin{aligned}\overline{FM'}^2 &= \overline{OM'}^2 + \overline{OF}^2 \\ &= \left(\frac{\overline{BH}}{4}\right)^2 + \overline{OF}^2 \\ &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\alpha\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2 \\ &= \frac{21}{16}\alpha^2 \\ &= 21\end{aligned}$$

따라서 선분 FM$'$ 의 길이는 $\sqrt{21}$ 이다.

29) [정답] 32 (출제자 : 21 김서원)

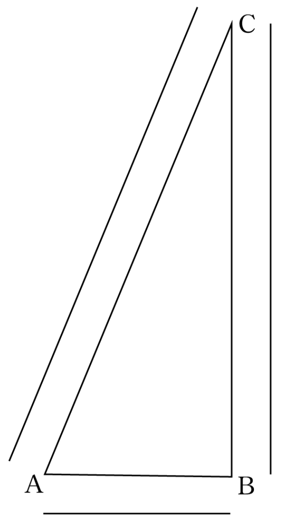
[출제의도] 벡터가 나타내는 점의 위치를 파악할 수 있는가?

[해설]

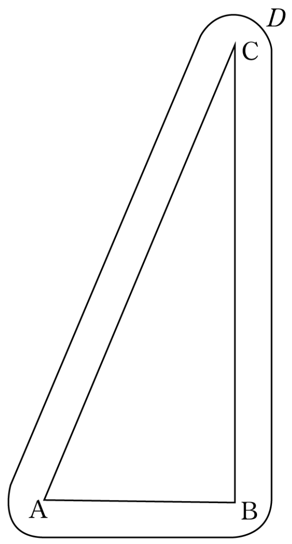
반지름의 길이가 1 이고 중심이 삼각형 ABC 의 외부에 있는 원이 삼각형 ABC 와 점 P 에서만 만나므로

도형 D 위의 모든 점은 삼각형 ABC 로부터 1 만큼 떨어져 있다.

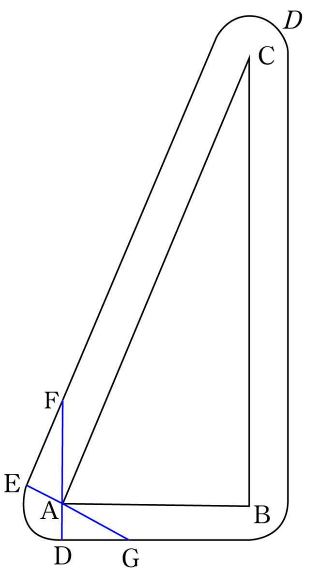
그러므로 도형 D 는 그림과 같이 세 변 AB, BC, CA 에서 각각 1만큼 떨어져 있는 선분을 포함한다.



또한 도형 D 는 세 점 A , B , C 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부를 포함한다.
그러므로 도형 D 는 다음과 같다.

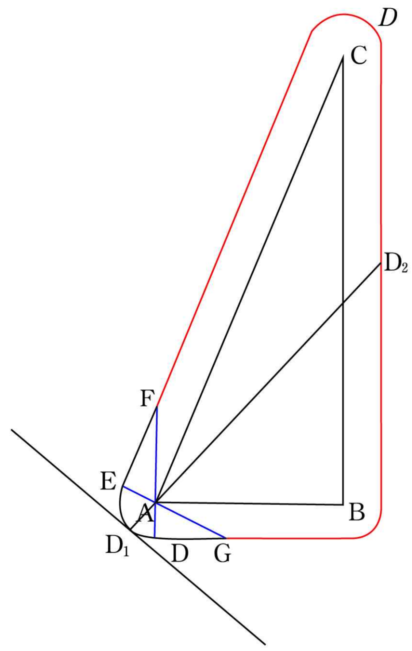


먼저 그림과 같이 점 A 를 중심으로 하는 호의 양 끝점을 각각 D , E 라 하고 선분 DA , EA 의 연장선이 도형 D 와 만나는 점 중 D , E 가 아닌 점을 각각 F , G 라 하자.



점 D_2 의 위치에 따라 $\overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 D_1 의 위치를 구할 수 있으므로 점 D_2 의 위치를 다음과 같이 나눌 수 있다.

ⅰ) 점 D_2 가 선분 EF , 선분 DG , 호 DE 를 제외한 영역에 있을 때



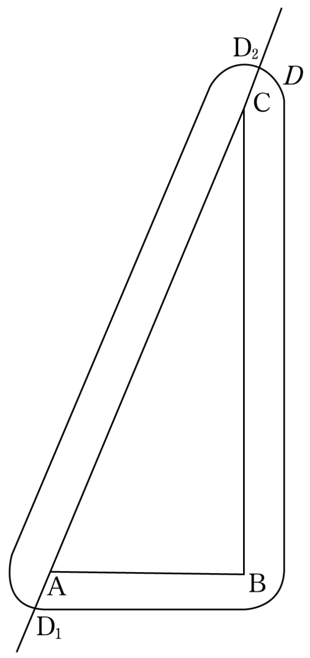
이때 점 D_1 은 점 A 를 중심으로 하는 호 위에 있다.

점 D_1 에서 직선 AD_2 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D}_1{}'$ 이라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}_1{}'} + \overrightarrow{\mathrm{D}_1{}'\mathrm{D}_1}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2}$
$= \overrightarrow{\mathrm{AD}_1{}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2} + \overrightarrow{\mathrm{D}_1{}'\mathrm{D}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2}$ 에서
$\overrightarrow{\mathrm{D}_1{}'\mathrm{D}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2} = 0$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2} = \overrightarrow{\mathrm{AD}_1{}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2}$ 이다.

두 점 $\mathrm{D}_1{}'$, D_2 가 직선 AD_2 위의 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}_1{}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2}$ 의 값이 최소이려면 $\overline{\mathrm{D}_1{}'\mathrm{D}_2}$ 의 값이 최대이어야 한다.
$\overline{\mathrm{D}_1{}'\mathrm{D}_2}$ 의 값이 최대이려면 점 $\mathrm{D}_1{}'$ 은 점 A 를 중심으로 하는 호와 직선 AD_2 가 만나는 점 위에 있어야 한다.

점 $\mathrm{D}_1{}'$ 이 점 A 를 중심으로 하는 호 위의 점이므로
호 위의 점 $\mathrm{D}_1{}'$ 에서의 접선은 직선 AD_2 와 수직이다.
점 D_1 은 점 $\mathrm{D}_1{}'$ 에서의 접선 위의 점이므로
점 D_1 의 위치는 점 $\mathrm{D}_1{}'$ 의 위치와 같다.

그러므로
$\overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}_1}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}_2}\right| \cos\theta$
$= 1 \times \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}_2}\right| \times (-1)$
$= -\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}_2}\right|$ 이다.
$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}_2}\right|$ 의 최댓값은 14 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}_2}$ 의 최솟값은 -14 이다.
그리고 이때 두 점 D_1, D_2 의 위치는 다음과 같다.



ii) D_2가 선분 EF 또는 선분 DG 위에 있을 때

이때 D_1은 선분 DG 또는 선분 EF 위에 있다.

$\angle FAE = \angle CAB$이고 $\angle AEF = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$이므로
삼각형 AEF와 삼각형 ABC는 닮음이다. (AA 닮음)
같은 방법으로 삼각형 ADG와 삼각형 ABC는 닮음이다. (AA 닮음)

그러므로 $\overline{AF} = \overline{AG} = \frac{13}{5}$이고
$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| \le \frac{13}{5}$, $\left|\overrightarrow{AD_2}\right| \le \frac{13}{5}$이다.

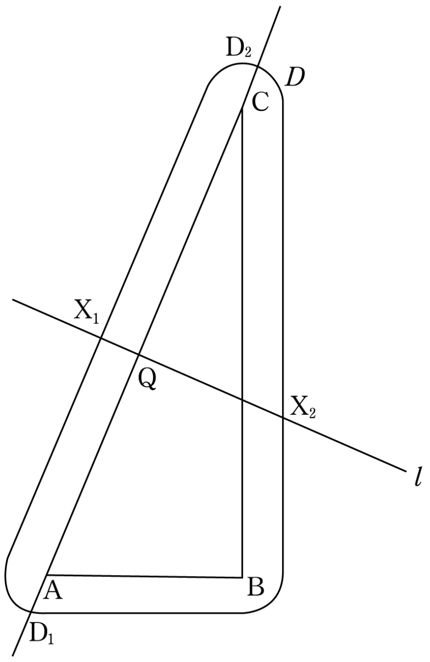
따라서 $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{AD_2} = \left|\overrightarrow{AD_1}\right|\left|\overrightarrow{AD_2}\right|\cos\theta$
$\ge \frac{13}{5} \times \frac{13}{5} \times (-1) = -\frac{169}{25} > -14$이므로
$\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{AD_2}$는 최소가 될 수 없다.

iii) D_2가 호 DE 위에 있을 때
$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| \ge \left|\overrightarrow{AD_2}\right| = 1$이므로 $\left|\overrightarrow{AD_1}\right| < \left|\overrightarrow{AD_2}\right|$임에 모순이다.

그러므로 두 점 D_1, D_2의 위치는 i)과 같다.

$\overline{D_1Q} = 7$이도록 선분 D_1D_2 위에 점 Q를 잡으면
점 Q를 지나고 직선 D_1D_2에 수직인 직선 l 위의 모든 점 X는
$\overrightarrow{D_1D_2} \cdot \overrightarrow{D_1X} = \overrightarrow{D_1D_2} \cdot \left(\overrightarrow{D_1Q} + \overrightarrow{QX}\right)$
$= \left|\overrightarrow{D_1D_2}\right|\left|\overrightarrow{D_1Q}\right|\cos 0 + \left|\overrightarrow{D_1D_2}\right|\left|\overrightarrow{QX}\right|\cos\frac{\pi}{2}$
$= 15 \times 7 = 105$를 만족시킨다.

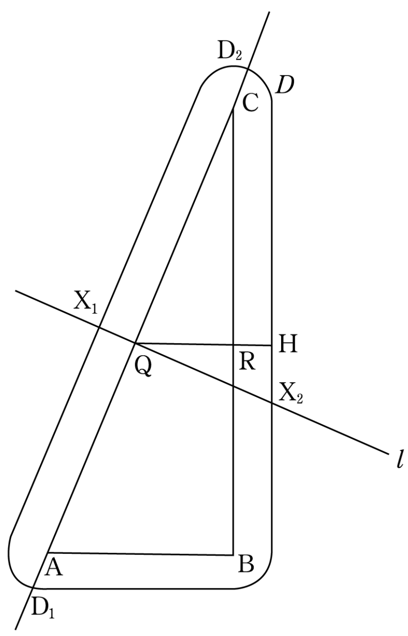
그러므로 두 점 X_1, X_2는 그림과 같이 직선 l 위에 있다.



(단 두 점 X_1, X_2의 위치는 서로 바뀔 수 있다.)

점 Q에서 도형 D의 직선 BC와 평행한 부분에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle ACB = \angle X_2QH$이고, $\angle ABC = \angle X_2HQ = \frac{\pi}{2}$이므로
삼각형 ABC와 삼각형 X_2HQ는 닮음이다. (AA 닮음)

따라서 선분 QH와 선분 BC가 만나는 점을 R라 하면
삼각형 ABC와 삼각형 QRC는 닮음이다. (AA 닮음)



$\overline{CQ} = 7$이므로 $\overline{CQ} : \overline{QR} = 13 : 5$에서 $\overline{QR} = \frac{35}{13}$이다.
그러므로 $\overline{QH} = \overline{QR} + 1 = \frac{48}{13}$이고,
$\overline{QX_2} : \overline{QH} = 13 : 12$에서 $\overline{QX_2} = 4$이다.

따라서
$\overrightarrow{AX_1} \cdot \overrightarrow{AX_2} = \left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QX_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QX_2}\right)$
$= \left|\overrightarrow{AQ}\right|^2 + \left(\left|\overrightarrow{AQ}\right|\left|\overrightarrow{QX_2}\right| + \left|\overrightarrow{AQ}\right|\left|\overrightarrow{QX_1}\right|\right)\cos\frac{\pi}{2}$
$+ \left|\overrightarrow{QX_1}\right|\left|\overrightarrow{QX_2}\right|\cos\pi$
$= 6^2 + 1 \times 4 \times (-1) = 32$이다.

30) [정답] 8 (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?
정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

직선 BD 를 평행이동하여 점 C 와 만나도록 한 직선을 l 이라 하자.
조건 (가)에서 $\overline{PC} \perp \overline{BD}$ 이므로 $\overline{PC} \perp l$ 이고, 선분 PH 는 평면 α 에 수직인 선분이므로 평면 α 위에 존재하는 모든 선분은 선분 PH 와 수직이다. 따라서 $\overline{PH} \perp \overline{HC}$ 이다.
삼수선의 정리에 의해 $\overline{PC} \perp l$ 이고 $\overline{PH} \perp \overline{HC}$ 이면 $\overline{HC} \perp l$ 이므로 $\overline{HC} \perp \overline{BD}$ 이다.

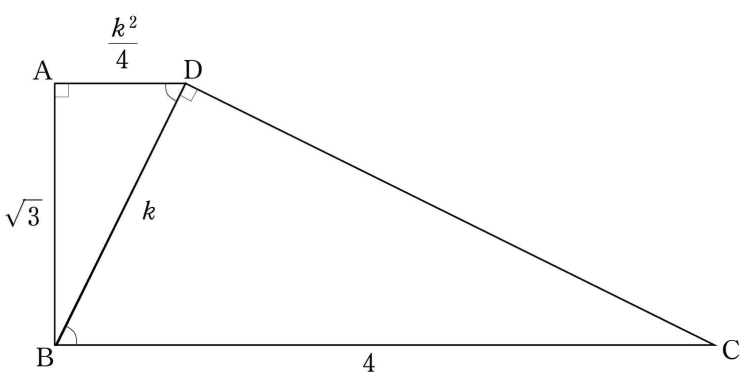
또한, 조건 (가)에서 $\overline{HD} \perp \overline{BD}$ 이므로 같은 평면 위에 존재하는 세 점 H, D, C 에 대하여 $\overline{HC} \perp \overline{BD}$ 이고 $\overline{HD} \perp \overline{BD}$ 이면 세 점 H, D, C 는 한 직선 위에 존재한다. …… ㉠

또한, 점 H 는 반지름의 길이가 2 이고 점 A 에서 평면 α 에 접하는 구 S 위의 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발이므로 중심이 점 A 이고 반지름의 길이가 2 인 평면 α 위의 원 내부에 존재한다. …… ㉡
따라서 ㉠과 ㉡에 의해 점 H 는 점 A 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2 인 평면 α 위의 원 내부에 존재하는 점이자 직선 CD 위의 점이다.

변 AD 와 변 BC 가 평행한 사다리꼴 ABCD 에 대하여
$\angle DAB = \angle BDC = \dfrac{\pi}{2}$ 이고 $\angle ADB = \angle DBC$ 이므로 ($\because \overline{AD} // \overline{BC}$)
삼각형 ABD 와 삼각형 CDB 는 서로 닮음이다. (AA 닮음)

따라서 $\overline{BD} = k$ $(k > 0)$ 라 하면
$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{AD}$ 이므로 $\overline{AD} = \dfrac{k^2}{4}$ 이고
직각삼각형 ABD 에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$ 이므로 $(\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{k^2}{4}\right)^2 = k^2$ 에서
$k = 2$ 이거나 $k = 2\sqrt{3}$ 이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



i) $k = 2\sqrt{3}$ 일 때
$\overline{BD} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\overline{AD} = 3$ 이다.
또한 조건 (나)에 의해 삼각형 ADH 는 $\overline{AD} = \overline{AH}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = 3$ 이다.

한편, 점 H 는 점 A 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 평면 α 위의 원 내부에 존재하는 점이다.

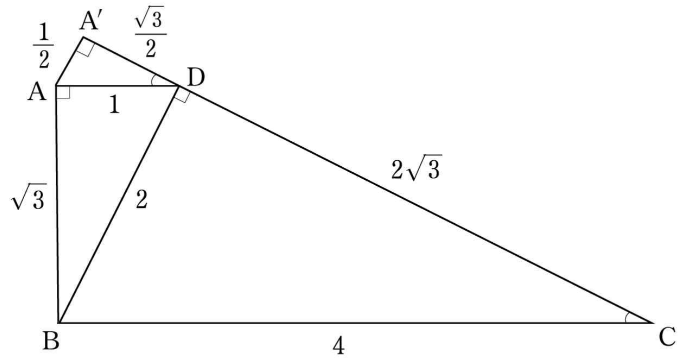
그러나 점 A 와 점 H 사이의 거리, 즉 선분 AH 의 길이는 3 이고, 이는 $\sqrt{3}$ 보다 크므로 조건에 모순이다.

ii) $k = 2$ 일 때
$\overline{BD} = 2$, $\overline{AD} = 1$ 이고 피타고라스 정리에 의해
$\overline{CD} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\angle BCD = \dfrac{\pi}{6}$ 이다.

점 A 에서 직선 CD 에 내린 수선의 발을 A′ 이라 하면
$\angle AA'D = \angle BDC = \dfrac{\pi}{2}$ 이고 $\angle ADA' = \angle BCD$ 이므로
($\because \overline{AD} /\!/ \overline{BC}$)
삼각형 A′AD 와 삼각형 DBC 는 닮음이다. (AA 닮음)

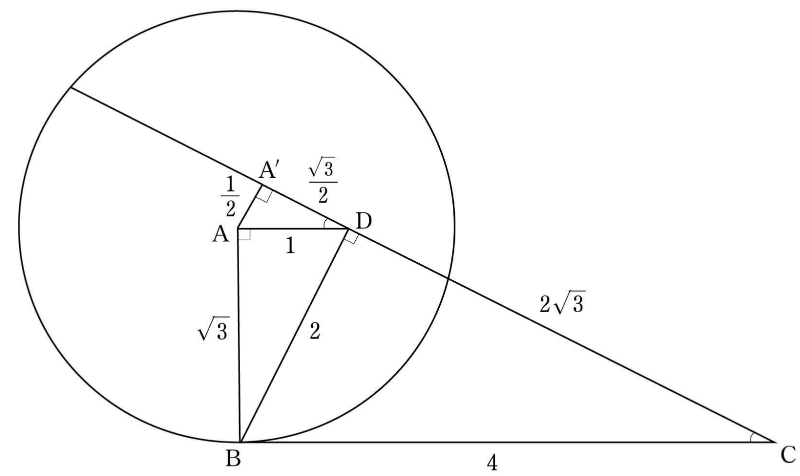
따라서 $\overline{BC} : \overline{AD} = \overline{BD} : \overline{AA'}$ 에서 $\overline{AA'} = \dfrac{1}{2}$ 이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



한편, 점 H 는 점 A 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 평면 α 위의 원 내부에 존재하는 점이자 직선 CD 위의 점이다.

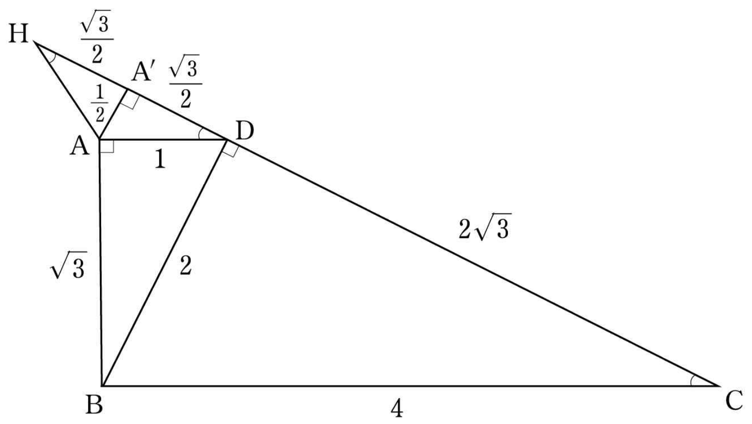
이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 점 H 는 직선 CD 가 원과 만나는 서로 다른 두 점을 이은 선분 위에 존재한다.

한편, 조건 (나)에 의해 삼각형 ADH 는 $\overline{AD} = \overline{AH}$ 인 이등변삼각형이므로 점 H 는 직선 CD 위의 점에서 점 A 까지의 거리가 1 인 두 점 중 점 D 가 아닌 점이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



한편, 점 P 는 점 H 를 지나고 평면 α 에 수직인 직선이
구 S 와 만나는 두 교점 중 하나이다.

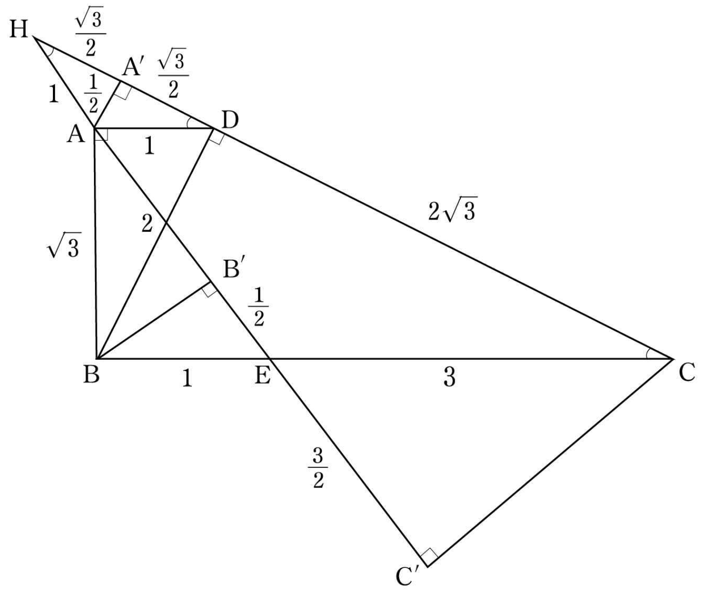
두 점 B, C 에서 직선 AH 에 내린 수선의 발을 각각 B′, C′ 이라 하면, 삼각형 PBC 의 평면 AHP 위로의 정사영의 넓이는 삼각형 PB′C′ 의 넓이이고, 이는 밑변이 $\overline{B'C'}$ 이고 높이가 $\overline{PH}$ 인 삼각형의 넓이이므로
$\frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{B'C'}$ 이다.

또, $\angle AHA' = \angle ADA' = \angle BCD = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{HD} = \sqrt{3}$ 이고
$\overline{CD} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{HC} = 3\sqrt{3}$ 이다.
또한 $\overline{CE} \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 에서 $\overline{CE} = 3$ 이고,
$\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{EC} = 1$ 이다.

한편, $\angle BEB' = \angle CEC'$ 이고 ($\because$맞꼭지각) 각 CEC′ 는
삼각형 HEC 에서 각 HEC 의 외각이므로
$\angle CEC' = \angle CHE + \angle HCE = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

또한 $\overline{B'E} = \overline{BE} \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 이고, $\overline{C'E} = \overline{CE} \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$ 이다.
따라서 $\overline{B'C'} = \overline{B'E} + \overline{C'E} = 2$ 이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



한편, 점 P 로 가능한 두 점 중 평면 α 와의 거리가 먼 점을 P_1, 평면 α 와의 거리가 가까운 점을 P_2 라 하면, 삼각형 PBC 의 평면 AHP 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{B'C'}$ 이므로 $P = P_1$ 일 때 최댓값 M 을 가지고 $P = P_2$ 일 때 최솟값 m 을 가진다.

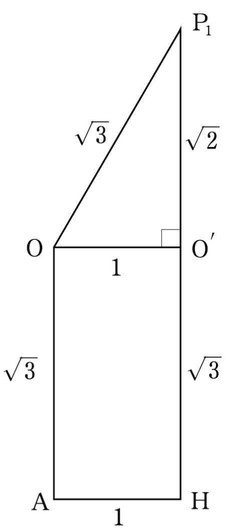
ⅰ) $P = P_1$ 일 때
구 S 의 중심을 O 라 하자.

직각 사다리꼴 $OAHP_1$ 의 점 O 에서 선분 P_1H 에 내린 수선의 발을 O′ 이라 하면 직각삼각형 OP_1O' 에서 $\overline{OO'} = \overline{AH} = 1$ 이고
$\overline{OP_1} = 2$ 이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{P_1O'} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{2}$ 이다.

$\overline{O'H} = \overline{OA} = \sqrt{3}$ 이고 $\overline{P_1H} = \overline{P_1O'} + \overline{O'H}$ 이므로
$\overline{P_1H} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 이다.

따라서 삼각형 $P_1B'C'$ 의 넓이는
$\frac{1}{2} \times \overline{P_1H} \times \overline{B'C'} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times 2$
$= \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 이다.
즉, $M = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



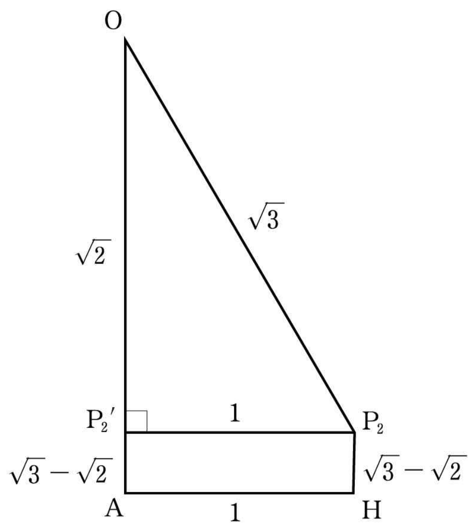
ⅱ) $P = P_2$ 일 때
구 S 의 중심을 O 라 하자.

직각 사다리꼴 $OAHP_2$ 의 점 P_2 에서 선분 OA 에 내린 수선의 발을 P_2' 이라 하면 직각삼각형 $OP_2'P_2$ 에서 $\overline{P_2'P_2} = \overline{AH} = 1$ 이고
$\overline{OP_2} = 2$ 이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{OP_2'} = \sqrt{\overline{OP_2}^2 - \overline{P_2P_2'}^2} = \sqrt{2}$ 이다.

$\overline{P_2'A} = \overline{OA} - \overline{OP_2'} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 이고 $\overline{P_2'A} = \overline{P_2H}$ 이므로
$\overline{P_2H} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 이다.

따라서 삼각형 $P_2B'C'$ 의 넓이는
$\frac{1}{2} \times \overline{P_2H} \times \overline{B'C'} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times 2$
$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 이다.
즉, $m = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서

$(M-m)^2 = \{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ 이다.