출제 및 해설 : 양민석, 김한웅, 인어진, 이호연, 장민준

모든 문항의 저작권은 '2023 수능 대비 Promotion 모의고사' 의 출제자 5인에게 있으며 허락 없이 문항을 상업적으로 이용하는 행위, 문제를 수정하거나 편집하여 2차 창작물로 만드는 행위 등을 금합니다.

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	②	12	①	23	②	23	③	23	③
2	④	13	①	24	①	24	③	24	②
3	⑤	14	④	25	⑤	25	④	25	③
4	①	15	②	26	③	26	②	26	②
5	④	16	3	27	④	27	①	27	③
6	④	17	21	28	③	28	①	28	④
7	②	18	18	29	47	29	6	29	18
8	②	19	72	30	86	30	8	30	37
9	②	20	20						
10	④	21	722						
11	②	22	65						

공통과목

1. 정답) ② 〔수학Ⅰ 지수함수와 로그함수〕 (출제자 : 양민석)

해설 : $\dfrac{4^{\sqrt{3}}}{2^{1+2\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$이다.

2. 정답) ④ 〔수학Ⅱ 미분〕 (출제자 : 양민석)

해설 : $f(x)=2x^3-x^2+2$의 도함수는 $f'(x)=6x^2-2x$이고

$f'(1)=6-2=4$이다.

3. 정답) ⑤ 〔수학Ⅰ 수열〕 (출제자 : 양민석)

해설 : 등비중항의 성질에 따라 $a_2a_6=(a_4)^2=4=a_5$이고

등비수열의 공비는 $\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{4}{2}=2$이다.

$a_3+a_6=\dfrac{a_4}{2}+a_5\times2=1+8=9$

4. 정답) ① 〔수학Ⅱ 함수의 극한과 연속〕 (출제자 : 양민석)

해설 : $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$이고

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=-1+2=1$이다.

5. 정답) ④ 〔수학Ⅰ 수열〕 (출제자 : 장민준)

해설 : $a_1=1$이므로 $a_2=-3$, $a_3=9$, $a_4=5$, $a_5=1=a_1$이다.

$\sum\limits_{k=1}^{7}a_k=(1-3+9+5)+(1-3+9)=12+7=19$이다.

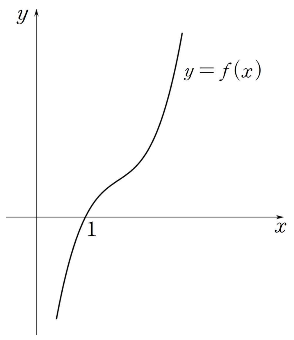
6. 정답) ④ 〔수학Ⅱ 미분〕 (출제자 : 김한웅)

해설 : $f(x)=x^3-5x^2+9x-5$

$=(x-1)(x^2-4x-5)$

$f'(x)=3x^2-10x+9$

$=3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$



이때, 주어진 부등식을 만족시키기 위해서는

$y=g(x)$가 $(1,\ 0)$을 지나야 한다.

$g(x)=f'(k)(x-k)+f(k)$

$=(3k^2-10k+9)(x-k)+k^3-5k^2+9k-5$

$g(1)=0$이므로

$k^3-4k^2+5k-2=0$

$(k-1)^2(k-2)=0$에서 $k=1$ 또는 $k=2$이다.

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 3이다.

7. 정답) ② 〔수학Ⅰ 삼각함수〕 (출제자 : 장민준)

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

해설 : $\sin\theta\tan\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=-3$

$\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0$

$\left(\cos\theta-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=0$

$-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\cos\theta=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$이다.

8. 정답) ② [수학Ⅱ 적분] (출제자 : 이호연)

해설 : $f(1)=a$라고 하고, 양변에 1을 대입하면,

$a=-2\int_k^{f(1)}f(t)dt+3a$

따라서 $\int_k^{f(1)}f(t)dt=a$이고, $f(x)=-2ax+3a$

$a=\int_k^{f(1)}f(t)dt=[-ax^2+3ax]_k^{f(1)}=-a^3+3a^2+ak^2-3ak$

식을 정리하면, $a^3-3a^2-(k^2-3k-1)a=0$이고, $f(x)$는

일차함수이므로 a는 0이 아니다.

방정식 $a^2-3a-(k^2-3k-1)=0$의 실근이 하나여야하므로

$k^2-3k-1=0$일 때, $a^2-3a=0$에서 $a=3$으로 하나이고

이를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은 -1이다.

$k^2-3k-1\neq0$일 때, 방정식이 중근을 가져야하므로

판별식을 사용하면, $D=4k^2-12k+5=0$를

만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은 $\frac{5}{4}$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은 $-\frac{5}{4}$이다.

9. 정답) ② [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수] (출제자 : 양민석)

해설 : 두 곡선을 연립하면 $n^{2x}-3=-n^x+9$에서

$n^{2x}+n^x-12=(n^x-3)(n^x+4)=0$

에서 $x=\log_n3$ 이다.

이 x의 값이 $\frac{1}{2}$보다 커야 하므로

$\log_n3>\frac{1}{2}$에서 $\log_3n<2=\log_39$이고

가능한 n은 $2\le n<9$인 자연수이다.

모든 n의 값의 합은 $2+3+4+5+6+7+8=35$이다.

10. 정답 : ④ [수학Ⅱ 미분] (출제자 : 김한웅)

해설 : 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하자.

(ⅰ) $\alpha>\beta\ge0$인 경우

함수 $|f(x)|$의 극댓값은 α이고, 극솟값은 0 또는 β로 모순이다.

(ⅱ) $\alpha>0>\beta$인 경우

함수 $|f(x)|$의 극댓값은 α 또는 $-\beta$이고,

극솟값은 0으로 모순이다.

(ⅲ) $\alpha=0>\beta$인 경우

함수 $|f(x)|$의 극댓값은 $-\beta$이고,

극솟값은 0으로 조건 (가)를 만족시킨다.

(ⅳ) $0>\alpha>\beta$인 경우

함수 $|f(x)|$의 극댓값은 $-\beta$이고,

극솟값은 $-\alpha$ 또는 0으로 모순이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $\alpha=0$, $\beta<0$이므로

$f(x)=(x-a)^2(x-b)$ (a, b는 $a<b$인 실수)로 나타낼 수 있다.

조건 (나)에서 $x=0$에서 극대이므로 $a=0$이고,

$f(0)=f(2)$이므로 $b=2$이다.

따라서 $f(x)=x^2(x-2)$에서 $f(4)=32$

11. 정답) ② [수학Ⅰ 삼각함수] (출제자 : 이호연)

해설 : $y=\sin ax$가 세 점을 지나려면, $y=\sin ax$가

① $(\frac{3\pi}{2},0)$ 대칭, ② $(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2})$을 지나야 함.

① $(\frac{3\pi}{2},0)$ 대칭을 만족시키려면

$\frac{1}{a}2n\pi=3\pi$에서 $4n-2=3a$, $a=\frac{2n}{3}$

16이하이고, ①을 만족시키는 실수 a는 $\frac{2n}{3}$.

(n은 1이상 48 이하의 자연수.)

②를 만족시키려면 $\sin\frac{a\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{a\pi}{6}=2(m-1)\pi+\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{a\pi}{6}=2(m-1)\pi+\frac{2\pi}{3}$에서

$a=12(m-1)+2$ 또는 $a=12(m-1)+4$

①, ②를 만족시키는 16 이하의 양수 a는 2, 4, 14, 16

따라서 16 이하의 모든 양수 a의 값의 합은 36

12. 정답) ① [수학Ⅱ 함수의 극한과 연속] (출제자 : 장민준)

해설 : $f(x)$가 일차함수. (나)의 극한값이 존재하지 않거나 1

$f(x)$가 이차함수. $f(x)=x^2+a$, $f'(x)=2x$이므로 (나)의

극한값은 $2a$이다. $a=-1$. $f(0)\neq f(1)$이므로 불가능.

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

$f(x)$가 삼차함수. $f(x)=x^3+ax^2+c$이고

$f'(x)=3x^2+2ax$이거나 $f(x)=x^3+ax^2+bx$이고

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이다.

각각 (나)의 극한값은 $2ac$, b^2인데 -2가 나오려면

$ac=-1$이다. $f(0)=f(1)$이므로 $1+a+c=c$이고 $a=-1$,

$c=1$이다. $f(x)=x^3-x^2+1$이므로 $f(2)=5$이다.

13. 정답) ① 〔수학Ⅰ 지수함수와 로그함수〕 (출제자 : 인어진)

해설 : 점 C의 x좌표를 s라 할 때, 점 B의 x좌표를 $s-\frac{3}{2}$이다.

두 점 B, C의 y좌표가 같으므로 $-\log_a(s-1)=\log_a(s-\frac{5}{2})$으로

$\log_a(s-1)+\log_a(s-\frac{5}{2})=0$이다.

$(s-1)(s-\frac{5}{2})=1$을 계산해주면 $s=\frac{1}{2}$또는 $s=3$이다. $(\because s>2)$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ABH에서 피타고라스 공식을 통해 선분 BH의 길이를 구하면 $k=\sqrt{2}$이다.

점 C$(3,\sqrt{2})$은 $y=\left|\log_a(x-1)\right|$위의 점이므로 대입하면

$\sqrt{2}=\log_a 2$이므로 $a^{\sqrt{2}}=2$이다.

그러므로 구하는 $ka^{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이다.

14. 정답) ④ 〔수학Ⅱ 적분〕 (출제자 : 양민석)

해설 : 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로 $x=a$에서도 연속이어야 한다.

(가)에 의해 $\lim_{x\to a-}g(x)=g(a)=\int_a^a\{f(t+a)-f(a)\}dt=0$이고

(나)에 의해 $\lim_{x\to 0+}\{g(x)-2\}=\lim_{x\to 0+}g(x+a)=\lim_{x\to a+}g(x)$에서

$\lim_{x\to a+}g(x)=g(0)-2$이므로

연속이려면 $g(0)-2=0$에서 $g(0)=2$이다.

같은 방식으로 모든 정수 n에 대하여 $x=na$에서의 연속성을 확인하면 $g(na)=2-2n$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=\frac{3}{2}a$이므로

함수 $y=f(x+a)$의 그래프의 대칭축은 $x=\frac{a}{2}$이다.

닫힌구간 $[0,a]$에서 $g'(x)=f(x+a)-f(a)$이므로

$g'(0)=f(a)-f(a)=0$에서 $g'(0)=g'(a)=0$이다.

인수정리에 의해 $f(x+a)-f(a)=kx(x-a)$이라 둘 수 있고

$$g(0)=\int_a^0\{f(t+a)-f(a)\}dt=\int_a^0 kt(t-a)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}kt^3-\frac{1}{2}kat^2\right]_a^0=\frac{1}{6}ka^3=2$$

에서 $ka^3=12$이다. 이 때, $a>0$이므로 $k>0$이다.

(나)에서 $g(x)=g(x+a)+2$을 통해 함수 $y=g(x)$의 그래프는 닫힌구간 $[0,a]$에서의 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 평행이동한 것이므로 그래프의 개형이 동일함을 알 수 있고 도함수 $g'(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=g'(x+a)$임을 알 수 있다.

ㄱ. 모든 실수 x에서 $g'(x)=g'(x+a)$이고,

닫힌구간 $[0,a]$에서 $g'(x)=kx(x-a)\le 0$이므로

모든 실수 x에서 $g'(x)\le 0$이다.

즉, 도함수 $g'(x)$의 부호변화가 없으므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하고 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $a=1$일 때, $g(x)=g(x+1)+2$이고 $ka^3=k=12$이다.

닫힌구간 $[0,1]$에서 $g(x)=\int_1^x\{f(t+1)-f(1)\}dt=\int_1^x 12t(t-1)dt$

$$=\left[4t^3-6t^2\right]_1^x=4x^3-6x^2+2$$

이다.

$$\int_{-1}^2 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx \text{ 이고}$$

$g(x)=g(x+1)+2$에서

$$\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0\{g(x+1)+2\}dx$$

$$=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 2dx=\int_0^1 g(x)dx+2$$

$g(x-1)-2=g(x)$에서

$$\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2\{g(x-1)-2\}dx$$

$$=\int_0^1 g(x)dx-\int_0^1 2dx=\int_0^1 g(x)dx-2$$

이므로

$$\int_{-1}^2 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$$

$$=3\int_0^1 g(x)dx$$

이다.

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1(4x^3-6x^2+2)dx=\left[x^4-2x^3+2x\right]_0^1=1$이므로

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

$\int_{-1}^{2} g(x)dx = 3\int_{0}^{1} g(x)dx = 3$이다. (참)

*별해 : 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려본 후 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에 대하여 대칭임을 확인한다면, 곡선 $y=g(x)$, 직선 $x=-1$, 직선 $x=2$, x축으로 둘러싸인 넓이의 대한 해석만으로 적분 값을 계산하지 않고 $\int_{-1}^{2} g(x)dx = 3$임을 알 수 있다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 ㄱ에서 구한대로 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다. 이 때, $g(a)=0$이므로
구간 $[a, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 $g(x) \le g(a)=0$이고
$t \ge a$인 모든 실수 t에서 함수 $\int_{a}^{t} g(x)dx$는 감소한다. ⋯ (1)

$\int_{0}^{\alpha} g(x)dx = 0$을 만족시키는 0이 아닌 실수 α는

$$\int_{0}^{\alpha} g(x)dx = \int_{0}^{\alpha}\left(\frac{1}{3}kx^3 - \frac{1}{2}kax^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}kx^4 - \frac{1}{6}kax^3\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{12}k\alpha^3(\alpha - 2a) = 0$$

에서 $\alpha = 2a$이다. ⋯ (2)

(1), (2)에 의해 두 부등식
$\int_{0}^{t} g(x)dx \le 0$과 $t \ge 2a$는 서로 필요충분조건이다.

즉, $\int_{0}^{4} g(x)dx \le 0$에서 $4 \ge 2a$, $a \le 2$이다.

$f(x+a) - f(a) = kx(x-a)$에서 $f(3a) - f(a) = 2ka^2$이고

ㄷ에서의 평균변화율은 $\frac{f(3a)-f(a)}{3a-a} = ka$이다.

$ka^3 = 12$에서 $\frac{f(3a)-f(a)}{3a-a} = ka = \frac{12}{a^2}$이고

$a \le 2$에서 $\frac{f(3a)-f(a)}{3a-a} = \frac{12}{a^2} \ge 3$이다. (참)

*별해 : 닫힌구간 $[0, 2a]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려본 후 점 $(a, 0)$에 대하여 대칭임을 확인했다면, 적분 식 없이 눈만으로도 $\int_{0}^{2a} g(x)dx = 0$이고 $\int_{0}^{4} g(x)dx \le 0$가 $a \le 2$를 의미함을 알 수 있다. 첨언하자면 출제의도는 당연히 그래프를 그려본 후 둘러싸인 부분의 넓이를 관찰하는 것이며 해설지 풀이보다 훨씬 명쾌히 이해가 갈 것이다. 해설지는 '식으로도' 풀 수 있음을 보여주는 역할이다.

15. 정답 : ② 〔수학 I 삼각함수〕 (출제자 : 인어진)

해설 : $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로 (사인법칙에 의하여) 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 같다.

$\overline{AB} = 2k$라 할 때, $\overline{AD} = 4\sqrt{2}k$이므로 $\overline{BD} = \overline{DE} = 6k$이고,

($\overline{AD}$는 공통이고, $\angle BAC = \angle EAD = \frac{\pi}{2}$이므로) 삼각형 ABD와 삼각형 AED는 합동이다.

$\angle AO_1D = \theta$이므로 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\theta}{2}$이다. 따라서

($\angle EAC = \theta$이고) $\angle BDE = \boxed{\pi - \theta}$이다.

삼각형 AO_1D에서 $\overline{AO_1} = \overline{O_1D} = 3k$, $\overline{AD} = 4\sqrt{2}k$이므로

코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = -\boxed{\frac{7}{9}}$이다.

($S_1 = \frac{9}{2}k^2\sin\theta$이고

$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{O_1D} \times \overline{DE} \times \sin(\pi - \theta) = \boxed{9k^2\sin\theta}$이다)

따라서 $S_1 : S_2 = \frac{9}{2}k^2\sin\theta : \boxed{9k^2\sin\theta}$이다.

그러므로 $f(\theta) = \pi - \theta$, $g(k) = 9k^2\sin\theta$ 이고 $p = \frac{7}{9}$이다.

따라서 구하는

$f(\pi - \frac{1}{p}) \times g(p) = \frac{9}{7} \times 9 \times (\frac{7}{9})^2 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{28\sqrt{2}}{9}$ 이다.

16. 정답) 3 〔수학 I 지수함수와 로그함수〕 (출제자 : 양민석)

해설 : $\log_2 72 - \frac{2}{\log_3 2} = \log_2 72 - 2\log_2 3 = \log_2 \frac{72}{3^2} = \log_2 8 = 3$

17. 정답) 21 〔수학II 적분〕 (출제자 : 김한웅)

해설 : $f(x) = \int f'(x)dx$

$= \int (4x^3 + 2x)dx$

$= x^4 + x^2 + C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(1) = 3$이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = x^4 + x^2 + 1$에서 $f(2) = 21$

18. 정답) 18 〔수학 I 수열〕 (출제자 : 이호연)

해설 : $S_k = ka_1 + (k-1)a_2 + (k-2)a_3 \cdots - (k-2)a_{2k-1} - (k-1)a_{2k}$

$= ka_1 - (k-1)(a_{2k} - a_2) - (k-2)(a_{2k-1} - a_3) \cdots = ka_1 - \frac{1}{9} \times \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{3}$

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

$S_{10}=10a_1-\frac{190}{3}=S_9=9a_1-\frac{136}{3}$ 에서 $a_1=18$이다.

$|a_1|=18$이다.

19. 정답) 72 〔수학Ⅱ 적분〕(출제자 : 김한웅)

해설 : 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위해서는

$f'(x)=|x|(x-4)(x-a)\ge 0$이어야 하므로

$a=4$

$$\begin{aligned} f(2)-f(-2) &= \int_{-2}^{2}|t|(t-4)^2dt \\ &= \int_{-2}^{2}|t|(t^2-8t+16)dt \\ &= 2\times\int_{0}^{2}(t^3+16t)dt \\ &= 2\times\left[\frac{1}{4}t^4+8t^2\right]_0^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$

20. 정답 : 20 [수학Ⅱ 함수의 극한과 연속] (출제자 : 김한웅)

해설 : 주어진 식의 극한값이 존재하면

(분모) → 0 이므로 (분자) → 0 이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x+t)-f(t)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\times\frac{x}{f(x+t)-f(t)}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$는 $x=0$에서의 미분계수이고

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+t)-f(t)}{x}$는 $x=t$에서의 미분계수이다.

이때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$와 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+t)-f(t)}{x}$의 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+t)-f(t)}{x}\ne 0$이면 주어진 식의 극한값은 $\frac{f'(0)}{f'(t)}$이다.

$t=1$ 또는 $t=3$인 경우 극한값이 존재하지 않으므로

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$이어야 한다.

즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x$

따라서 $f(5)=20$

21. 정답) 722 〔수학Ⅰ 수열〕(출제자 : 이호연)

해설 : $f(x)$의 최솟값이 양수이므로 $m>0$이고, $3-\frac{m}{4}>0$에서

$m<12$이다.

$\sum_{k=1}^{a_2}a_k=f(1)=3$에서

($a_2=1$이면 (나)조건에 위배됨)

$a_2=2$일 때, $\sum_{k=1}^{2}a_k=3$이며, $a_1=1$이고, $a_2=3$일 때,

$\sum_{k=1}^{3}a_k=3$이며 (나)조건에 위배. 따라서 $a_1=1$, $a_2=2$이다.

$\sum_{k=1}^{a_3}a_k=2m+3$, $\sum_{k=1}^{a_4}a_k=6m+3$

$a_3=3$일 때, $2m=3$, $m=\frac{3}{2}$이며, $\sum_{k=4}^{a_4}a_k=6$

$a_4=4$일 때 서로소 조건에 모순, $a_4=5$이상 일 때, (나)조건에 모순.

$a_3=4$일 때 서로소 조건에 모순

$a_3=5$일 때, $a_3+a_4+a_5=2m<24$

이때 가능한 순서쌍 (a_3,a_4,a_5)은

$(5,7,9)$, $(5,7,11)$이며 각각의 경우에 m의 값은 $\frac{21}{2}$, $\frac{23}{2}$

$m=\frac{21}{2}$일 때, $\sum_{k=1}^{a_4}a_k=\sum_{k=1}^{7}a_k=6m+3$이고,

$\sum_{k=6}^{7}a_k=a_6+a_7=4m=42$

가능한 순서쌍 (a_6,a_7)은 $(11,31)$, $(13,29)$, $(19,23)$.

이 때 구하는 값의 최댓값은 (a_6,a_7)이 $(19,23)$일 때 608.

$m=\frac{23}{2}$일 때, $\sum_{k=6}^{7}a_k=a_6+a_7=4m=46$

가능한 순서쌍 (a_6,a_7)은 $(17,29)$, $(19,27)$이고

이 때 구하는 값의 최댓값은 722.

$a_3=6$일 때, $a_3+a_4+a_5+a_6=2m<24$ 이는 (나)조건과 모순임.

따라서 최댓값은 722이다.

22. 정답 : 65 [수학Ⅱ 적분] (출제자 : 김한웅)

조건 (나)에서 $g'(3)=0$이고 $g(\alpha)=g(3)=g(\beta)$이다.

롤의 정리에 의하여 $g'(x)=0$이 되는 x가

열린구간 $(\alpha,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

같은 방식으로 $g'(x)=0$이 되는 x가

열린구간 $(3,\ \beta)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, $g'(x)=|f(x)|-2x$에서

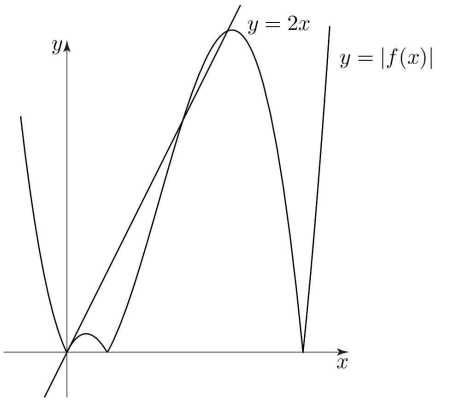
두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=2x$의 교점의 개수가 3 이상이어야 한

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

다.

(i) 두 함수 $y=|f(x)|$ 와 $y=2x$ 의 교점의 개수가 4인 경우

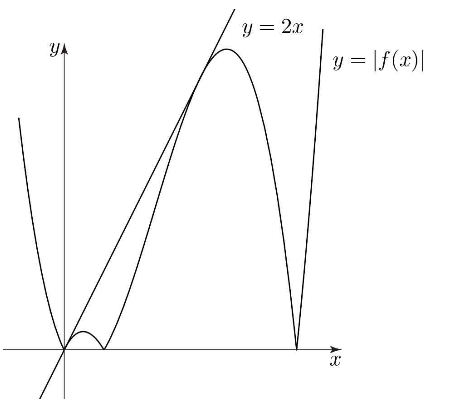
두 함수 $y=|f(x)|$ 와 $y=2x$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, $g(x)$의 그래프는 극댓값과 극솟값을 각각 2개씩 갖는 형태이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(3)$의 교점 중 극점이 아닌 점의 개수는 홀수 개이고, (나) 조건에 모순이다.

(ii) 두 함수 $y=|f(x)|$ 와 $y=2x$ 의 교점의 개수가 3인 경우

두 함수 $y=|f(x)|$ 와 $y=2x$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, $g(x)$의 그래프는 극댓값과 극솟값을 각각 하나씩 가지고 두 극점 사이에 극값을 가지지 않고 미분계수가 0인 점이 존재하는 형태이고 이 점의 x좌표가 3이면 조건 (나)를 만족시킨다.

$f'(0)=-2$에서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이고

두 함수 $y=f(x)$와 $y=2x$의 교점은 0과 3이므로

$f(x)-2x=kx(x-3)^2$ (단, $k<0$)으로 나타낼 수 있다.

$f'(0)-2=9k$이고 $f'(0)=-2$이므로 $k=-\dfrac{4}{9}$이다.

따라서 $f(4)=\dfrac{56}{9}$, $p+q=65$

확률과 통계

23. 정답) ② [확률과 통계 경우의 수] (출제자 : 김한웅)

해설 : 이항정리에 의하여 전개식에서 x^4의 계수는

${}_5C_4\times 3^1=15$이다.

24. 정답) ① [확률과 통계 통계] (출제자 : 장민준)

해설 : $V(X)=n\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}n$

$V(4X)=16V(X)=3n=48$, $n=16$

25. 정답) ⑤ [확률과 통계 확률] (출제자 : 장민준)

해설 : 앞면이 나오는 횟수가 0 이나 1일 확률

${}_6C_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^6+{}_6C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{7}{64}$

앞면이 나오는 횟수가 2 이상일 확률

$1-\dfrac{7}{64}=\dfrac{57}{64}$이다.

26. 정답) ③ [확률과 통계 확률] (출제자 : 김한웅)

해설 : 18을 소인수분해하면 $18=2\times 3^2$이므로 3의 배수가 최소 두 번 나와야 한다.

(i) 3의 배수가 두 번만 나오는 경우

가능한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 나타내면

(3, 3, 2)	2의 배수 최소 하나 필요	3
(3, 3, 4)	2의 배수 최소 하나 필요	3
(6, 3, α)	($\alpha=1,\ 2,\ 4,\ 5$ 중 하나)	$3!\times 4$
(6, 6, α)	($\alpha=1,\ 2,\ 4,\ 5$ 중 하나)	3×4

이때 가능한 경우의 수는 42이다.

(ii) 3의 배수가 세 번 나오는 경우

가능한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 나타내면

(3, 3, 6)	3
(3, 6, 6)	3
(6, 6, 6)	1

이때 가능한 경우의 수는 7이다.

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 경우의 수는 $42+7=49$이고 전체 경우의 수는 $6^3=216$이므로 구하는 확률은 $\frac{49}{216}$이다.

27. 정답) ④ [확률과 통계 통계] (출제자 : 양민석)

해설 : 확률변수 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(m, \frac{4^2}{n}\right)$을 따르고 정규화하면

$\mathrm{P}\left(\overline{X} \le \frac{3}{2}m\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{\frac{3}{2}m - m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{m}{8}\sqrt{n}\right)$이고

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 2) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{2-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{2-m}{4}\sqrt{n}\right)$이다.

$\mathrm{P}\left(\overline{X} \le \frac{3}{2}m\right) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge 2)$에서

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{m}{8}\sqrt{n}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{2-m}{4}\sqrt{n}\right)$이려면

Z가 $\mathrm{N}(0, 1^2)$을 따르므로 $\frac{m}{8}\sqrt{n} = \frac{m-2}{4}\sqrt{n}$이어야 하고

$m=4$이다.

즉, $\mathrm{P}\left(Z \le \frac{m}{8}\sqrt{n}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.9332$이고

오른쪽 표준정규분포표에 의해

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{3}{2}\right) = \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.5 + 0.4332 = 0.9332$

이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{3}{2}$, $n=9$이다.

$m+n=4+9=13$이다.

28. 정답) ③ [확률과 통계 경우의 수] (출제자 : 장민준)

해설 : 1, 2, 3을 X라고 치환하자.

X, 1, 1, 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우의 수$=\frac{7!}{2!\,2!\,2!}=630$

X, X, 1, 2, 3을 나열하는 경우의 수$=\frac{5!}{2!}=60$

X, X, X를 나열하는 경우의 수$=1$

처음 X와 두 번째 X를 나누는 경우의 수 2가지

세 번째 X까지 나누는 경우의 수 3가지

총 경우의 수$=630-2\times60+3\times1=513$이다.

29. 정답) 47 [확률과 통계 통계] (출제자 : 양민석)

해설 : (가) 조건에서

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{P}(Y=1) + 2\mathrm{P}(Y=2) + 3\mathrm{P}(Y=3) + 4\mathrm{P}(Y=3) = 3$이다.

(나) 조건에서 $k=1, 2, 3$를 대입한 값을 다 더하면

좌변은 확률의 정의에 의해 $\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$이고

우변은 (가) 조건에 의해

$\mathrm{P}(Y=1)+2\mathrm{P}(Y=2)+3\mathrm{P}(Y=3)=3-4\mathrm{P}(Y=4)$이다.

즉, $3-4\mathrm{P}(Y=4)=1$이므로 $\mathrm{P}(Y=4)=\frac{1}{2}$이다.

확률의 정의에 의해

$\mathrm{P}(Y=1)+\mathrm{P}(Y=2)+\mathrm{P}(Y=3)+\mathrm{P}(Y=4)=1$이고

$\mathrm{P}(Y=4)=\frac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}(Y=1)+\mathrm{P}(Y=2)+\mathrm{P}(Y=3)=\frac{1}{2}$이다.

또, $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{P}(Y=1)+2\mathrm{P}(Y=2)+3\mathrm{P}(Y=3)+4\mathrm{P}(Y=3)=3$에서

$\mathrm{P}(Y=1)+2\mathrm{P}(Y=2)+3\mathrm{P}(Y=3)=1$이고 두 식을 연립하면

$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(Y=3)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(Y=2)=\frac{1}{3}$이다.

(나) 조건에 의해 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{4}$이고

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{12}\times1+\frac{2}{3}\times2+\frac{1}{4}\times3=\frac{13}{6}$,

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{12}\times1^2+\frac{2}{3}\times2^2+\frac{1}{4}\times3^2=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-\frac{169}{36}=\frac{11}{36}$, $p+q=47$이다.

30. 정답) 86 [확률과 통계 확률] (출제자 : 김한웅)

해설 : $a \le b$인 경우는

$a=2$, $b=5$ 또는 $a=3$, $b=4$인 경우 뿐이다.

가능한 모든 경우를 나타내면

(ⅰ)

	0 회	1 회	2 회	3 회
흰 공	2	2	2	2
검은 공	2	3	4	5

이때 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{16}{75}$

(ⅱ)

	0 회	1 회	2 회	3 회
흰 공	2	3	3	3
검은 공	2	2	3	4

이때 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{25}$

(ⅲ)

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

	0 회	1 회	2 회	3 회
흰 공	2	2	2	3
검은 공	2	3	4	4

이때 확률은 $\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2 + {}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{14}{75}$

(ⅳ)

	0 회	1 회	2 회	3 회
흰 공	2	2	3	3
검은 공	2	3	3	4

이때 확률은 $\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_2 + {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{25}$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{3}{25}+\frac{14}{75}+\frac{4}{25}}{\frac{16}{75}+\frac{3}{25}+\frac{14}{75}+\frac{4}{25}} = \frac{35}{51}$

따라서 $q=35$, $p=51$이므로 $p+q=86$

미적분

23. 정답) ③ 〔미적분 적분법〕(출제자 : 인어진)

해설 : $\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx$

$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$

24. 정답) ③ 〔미적분 수열의 극한〕(출제자 : 인어진)

해설 : $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+2n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(\sqrt{n^2+4n} + \sqrt{n^2+2n}\right)}{2n} = 3$

25. 정답) ④ 〔미적분 미분법〕(출제자 : 인어진)

해설 : $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 1+\cos t$

속력 $v = \sqrt{(-\sin t)^2 + (1+\cos t)^2} = \sqrt{2+2\cos t}$ 이다.

$t>0$일 때, $-1 \le \cos t \le 1$이므로 $\cos t = 1$일 때, 속력은 최댓값 2를 갖는다.

26. 정답) ② 〔미적분 수열의 극한〕(출제자 : 이호연)

해설 : $\overline{A_0D_1} = \frac{3}{2}$, $\overline{D_1C_1} = \frac{1}{2}$, $\overline{A_0C_1} = 2\overline{B_1C_1}$,

$\angle A_0C_1B_1 = \frac{\pi}{3}$에서 $\angle A_0B_1C_1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A_0B_1} = \sqrt{3}$

$\triangle A_1E_1B_1 \backsim \triangle D_1E_1A_0$. $\overline{A_1B_1} : \overline{D_1A_0} = 2:3$

$\therefore \overline{E_1B_1} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, $\triangle A_1E_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{10}$

$\overline{B_1D_1} \perp \overline{A_0C_1}$에서 $\overline{A_1D_1} = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$이고, $\overline{A_1E_1} = \frac{\sqrt{7}}{5}$

$\therefore$ 공비 $= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{5} = \frac{\sqrt{7}}{5}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{10} \times \frac{1}{1-\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{10} \times \frac{25}{18} = \frac{5\sqrt{3}}{36}$

27. 정답) ① 〔미적분 적분법〕(출제자 : 장민준)

해설 : $f(x) = \int x^2 \ln(x^2)dx = 2\int x^2 \ln x\, dx$

$= 2\left\{\frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx\right\} = 2\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) + C$

$f(1) = -\frac{2}{9} + C = 1$, $C = \frac{11}{9}$

$f(2) = \frac{1}{3}\left(16\ln 2 - \frac{5}{3}\right)$

28. 정답) ① 〔미적분 미분법〕(출제자 : 이호연)

해설 : $\frac{\pi}{3} - \theta = \alpha$라고 하면 $\overline{CD} = \overline{BC}$, $\angle DOC = \theta$에서

$\angle AOD = 2\alpha$, $\overline{AD} = 2\sin\alpha$

C_1의 반지름$= 2\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{AC} = 2\sin(\alpha + \frac{\theta}{2})$, $\angle ADC = \pi - \alpha - \frac{\theta}{2}$

$f(\theta) = \frac{1}{2} \times 2\sin\alpha \times 2\sin\frac{\theta}{2} \times \sin(\alpha + \frac{\theta}{2})$이고,

$f(\alpha) = 2\sin\alpha \times \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}) \times \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2})$

$\overline{OF} \times \overline{OB} = (\overline{OC} - 2\sin\frac{\theta}{2})(\overline{OC} + 2\sin\frac{\theta}{2})$

$\overline{OF} = 1 - 4\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\overline{FB} = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\overline{OH} = 1 - 2\sin\frac{\theta}{2}$

$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - 2\sin\frac{\theta}{2}) \times 4\sin^2\frac{\theta}{2} \times \sin\theta$이고,

$g(\alpha) = 2(1 - 2\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}))\sin^2(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$

$\therefore \lim_{\alpha\to 0+} \frac{f(\theta)g(\theta)}{\overline{AD}^2} = \frac{3}{64}$

29. 정답) 6 〔미적분 적분법〕(출제자 : 장민준)

해설 : $f'(x) = \sqrt{\{f(x)\}^2 + 3}$의 양변을 미분하면

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

$f''(x)=\dfrac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{\{f(x)\}^2+3}}=f(x)$이다.

$f(x)+f'(x)=f'(x)+f''(x)$임을 이용하여 $\dfrac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=1$의

양변을 부정적분하면 $\ln\{f(x)+f'(x)\}=x+C$이고

$f(x)+f'(x)=e^{x+C}\cdots$①이다. (C는 적분상수)

$f(0)=-1$이므로 $f'(0)=\sqrt{\{f(0)\}^2+3}=2$이다.

$f(0)+f'(0)=1=e^{0+C}$이므로 $C=0$이다.

①의 식에 $f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+3}$을 대입하면

$\sqrt{\{f(x)\}^2+3}=e^x-f(x)$이고 양변을 제곱하여 식을 정리하면

$f(x)=\dfrac{e^x-3e^{-x}}{2}$이다. $\{f(x)\}^2+3>0$이므로 모든 실수 x에서

$f'(x)>0$이다. 따라서 $f(x)$는 증가함수이고 $f(0)=-1$이므로

$x>0$인 x에서 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나 존재한다.

$(x-a)f(x)\geq 0$을 만족해야 하므로 $f(a)=0$이다.

$f(a)=\dfrac{e^a-3e^{-a}}{2}=0$이므로 $a=\dfrac{\ln 3}{2}$이고 $e^{2a}=3$이다.

부분적분법을 이용하여 계산하면

$$\int_0^{e^{2a}} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^3(xe^x-3xe^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^x(x-1)+3e^{-x}(x+1)\right]_0^3$$

$$=\frac{1}{2}\{e^3(3-1)+3e^{-3}(3+1)+1-3\}=e^3+6e^{-3}-1\text{이다.}$$

$p=1$, $q=6$, $r=-1$이므로 $p+q+r=1+6-1=6$이다.

30. 정답) 8 〔미적분 미분법〕 (출제자 : 인어진)

해설 : (가)조건에서 $\lim\limits_{t\to 0+}h(t)-\lim\limits_{t\to 0-}h(t)=3$을 통해 함수

$g(x)$는 x축에 접한다는 것을 알 수 있다. 이를 바탕으로

이차함수 $f(x)=(x-a)^2$으로 식을 작성할 수 있다.

(나) 조건식을 해석하면 함수 $f(x)$위의 점 $(x, g(x))$과

$(k, g(k))$를 이은 평균변화율과 $x=k$에서의 $g(x)$의 접선의

기울기를 비교하는 것이다. 접선과 평균변화율을 그리다 보면

k는 아래로 볼록인 구간에서 (나)조건이 성립함을 알 수 있다.

또는 식을 변형하여 $g(x)\geq g'(k)(x-k)+g(k)$꼴로 만들어주면

접선과 곡선으로 해석할 수 있다. 이때 또한 아래로 볼록일 때만

성립함을 알 수 있다.

따라서 k의 최솟값 $\sqrt{2}$는 위볼에서 아볼로 변하는 함수 $g(x)$의

변곡점의 x값임을 알 수 있다.

$g(x)=e^x(x^2-2ax+a^2)$, $g'(x)=e^x(x^2+(2-2a)x+a^2-2a)$이다.

$g''(x)=e^x(x^2+(4-2a)x+a^2-4a+2)$에 $x=\sqrt{2}$를 대입을 통해

계산하면

$a=2$ 또는 $a=2-2\sqrt{2}$이다.

함수 $g(x)$의 변곡점 중 x좌표가 가장 큰 변곡점이

$x=\sqrt{2}$이므로 $a=2$이어야 한다.

$g(x)=e^x(x-2)^2$이고 $g'(x)=e^x(x^2-2x)$이다. 따라서 함수

$g(x)$는 $x=0$에서 극댓값이 $g(0)=4$이다. 그러므로

$h(4)=2$이고, 구하는 $h(4)\times g(0)=2\times 4=8$이다.

기하

23. 정답) ③ 〔기하 공간도형〕 (출제자 : 인어진)

해설 : $\mathrm{Q}(4,2,-3)$, $\mathrm{R}(-4,2,3)$으로 삼각형 PQR은

$\angle\mathrm{RPQ}=\dfrac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{PR}}=8$, $\overline{\mathrm{PQ}}=6$으로 $\overline{\mathrm{QR}}=10$이다.

24. 정답) ② 〔기하 이차곡선〕 (출제자 : 인어진)

해설 : 쌍곡선의 접선공식에 따라서 $y=mx-\sqrt{4m^2-8}$이다.

접선의 y절편이 -2이므로

$\sqrt{4m^2-8}=2$이고 $m=\sqrt{3}\,(\because m>0)$이다.

25. 정답) ③ 〔기하 평면벡터〕 (출제자 : 인어진)

해설 : $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$; $4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$(점 Q은 선분

AB를 1:3 내분한점); $6\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$

(점 N′은 선분 QC를 1:2 내분한 점)

선분 BC를 2:1 내분한 점을 S라고 할 때,

점 R은 선분 AS를 1:1 내분한 점이다.

즉, 점 P,점 R은 같은 점이다.

그러므로 삼각형 ABP의 넓이를 $4S$라 할 때, 삼각형 BCP의

넓이를 $6S$, 삼각형 ACP의 넓이를 $2S$이므로 삼각형 ABC

넓이는 $12S$이다. $4S=4$였으므로 구하는 $12S=12$이다.

26. 정답) ② 〔기하 이차곡선〕 (출제자 : 이호연)

해설 : 두 번째 타원 (이하 E)의 두 초점 사이 거리$=\overline{\mathrm{OF}}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{25-a^2}$

E의 장축의 길이$=10-\overline{\mathrm{OF}}=10-\sqrt{25-a^2}$

$\therefore 36+25-a^2=(10-\sqrt{25-a^2})^2$를 정리하면

$20\sqrt{25-a^2}=64$

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

E의 장축의 길이$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{BF}}=10-\frac{16}{5}=\frac{34}{5}$

따라서 OAFB의 둘레의 길이는 $\frac{68}{5}$

27. 정답) ③ [기하 공간도형] (출제자 : 양민석)

해설 : 직선 DP가 삼각형 BCD의 넓이를 이등분하려면, 직선 DP와 선분 BC가 만나는 점을 M이라 할 때, M은 선분 BC의 중점이어야 한다.

삼각형 BCD의 무게중심을 G라 둘 때, 평면 BCD와 직선 AG는 수직이고 두 직각삼각형 AGM, AGP는 선분 AG가 공통이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$이므로 합동이다. 즉, $\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{GM}}$이고 무게중심 G가 선분 MD를 $2:1$로 내분하므로 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{GM}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

선분 AP의 평면 ABC 위로의 정사영은 선분 AP의 선분 AM 위로의 정사영과 같다.

삼각형 AMP는 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MP}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$인 이등변삼각형이고

점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 P′라 하면삼각형 AMP의 넓이가 $\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AP'}}$이므로

$\overline{\mathrm{PP'}}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$이다. $\overline{\mathrm{AP'}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{PP'}}^2=3-\frac{96}{81}=\frac{147}{81}=\frac{49}{27}$이고

$\overline{\mathrm{AP'}}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$이다.

28. 정답) ④ [기하 이차곡선] (출제자 : 인어진)

해설 : 포물선 위의 점 A에서 접선이 방정식이

$y(y-4\sqrt{3})=2(x-2a+9)$이므로 점 B의 좌표는 $(2a-9,0)$이다.

점 C는 지름에 대한 원주각이므로 $\angle\mathrm{BCF}=\frac{\pi}{2}$이다.

그리고 포물선의 접선의 성질에 의해서 점 C의 좌표는 포물선의 꼭짓점의 x좌표와 같으므로 $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{BA}}+1:2$이다. 따라서 점 C의 좌표는 $(a,2\sqrt{3})$이다.

$\mathrm{F}(p+a,0)$이고 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 CHF에서 $\overline{\mathrm{HF}}=p=2$이다.

삼각형 BCH와 삼각형 CHF의 닮음을 통해 식을 작성하면

$(2\sqrt{3})^2=p(9-a)$로 $a=3$이다. 따라서 구하는 $a^2+p^2=13$이다.

29. 정답) 18 [기하 평면벡터] (출제자 : 이호연)

해설 : 원 C와 직선 DB가 만나는 점 중 점 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{DP}}=k$라 둘 때, 할선 정리에 의해 $\overline{\mathrm{DP}}\times\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{DB}}\times\overline{\mathrm{DE}}$이고 $\overline{\mathrm{DB}}=1$, $\overline{\mathrm{DE}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{DP}}\times\overline{\mathrm{DQ}}=k\times\overline{\mathrm{DQ}}=1\times2=2$에서 $\overline{\mathrm{DQ}}=\frac{2}{k}$이다.

두 직선 CD, DQ가 이루는 각 중 예각인 것을 θ라 할 때,

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{DQ}}|\cos\theta$이다.

점 C의 좌표가 $(2,0)$이므로 삼각형 BCD는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{CD}}=1$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{DQ}}|\cos\theta=\frac{2}{k}\cos\theta$이고

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}+1=\frac{2}{k}\cos\theta+1=\frac{k+2\cos\theta}{k}$이다.

삼각형 CDP에 대하여 코사인 법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2-2\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{DP}}\cos(\pi-\theta)$

$=1+k^2+2k\cos\theta$

이고, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2-1=k^2+2k\cos\theta=k(k+2\cos\theta)$이다.

즉, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2-1}{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}+1}=\dfrac{k(k+2\cos\theta)}{\frac{k+2\cos\theta}{k}}=k^2=n$이다.

$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$이라 둘 때,

$\angle\mathrm{COD}=\frac{\pi}{6}$이고 $\angle\mathrm{AOP}+\angle\mathrm{POD}+\angle\mathrm{COD}=\pi$이므로

$\angle\mathrm{POD}=\frac{5\pi}{6}-\alpha$이다.

삼각형 POD에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{DP}}^2=\overline{\mathrm{OD}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2-2\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{OP}}\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$

$=3+1+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=4+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$

이므로 $k^2=4+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$이다.

점 P가 제2사분면 위의 점이므로 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고

$-\frac{1}{2}<\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

즉, $4-\sqrt{3}<4+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)<7$이고

$4-\sqrt{3}<k^2=n<7$을 만족시키는 정수 n은 3, 4, 5, 6이다.

모든 정수 n의 값의 합은 $3+4+5+6=18$이다.

30. 정답) 37 [기하 공간도형] (출제자 : 양민석)

해설 : 점 B의 평면 ABP 위로의 정사영을 H라 할 때,

조건 (가)를 만족시키기 위해서는

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.

$\overline{\mathrm{AH}}=a$, 직선 AH와 원 C의 중심 사이의 거리를 b라 할 때,

$\frac{1}{2}a(b+1)=6$, $\frac{1}{2}a(b-1)=3$에서 $a=3$, $b=3$이다.

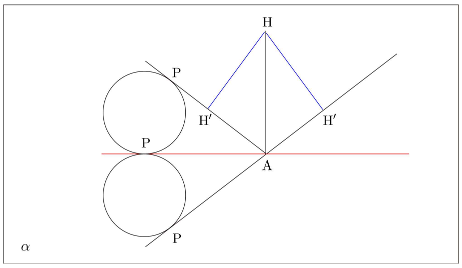
평면 α와 평면 ABP가 이루는 예각 θ에 대하여

점 B에서 직선 AP에 내리는 수선의 발을 H'라 할 때,

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{HH}'}}{\overline{\mathrm{BH}'}}$이고 $\overline{\mathrm{HH}'}=k$라 하면 $\cos\theta=\frac{k}{\sqrt{k^2+16}}$이다.

조건 (나)에서 $\cos\theta=\frac{3}{5}$인 상황은 $k=3$일 때이고,

점 P가 하나뿐이므로 원 C는 아래 그림과 같이 위치해야한다.



빨간 선에 접해있는 때의 접점 P가 $\cos\theta=\frac{3}{5}$일 때이다.

이 때, 수선의 발을 H'는 점 A에 위치한다.

이후 파란 선이 수선일 때, $\overline{\mathrm{HH}'}$의 값이 최소이므로

$\cos\theta$의 값이 최소이다. 이 때, 삼각비에 의해 $\overline{\mathrm{HH}'}=\frac{12}{5}$이다.

$k=\frac{12}{5}$를 대입해 $\cos\theta$의 최솟값을 계산해보면 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{34}}$이다.

구하는 정사영의 넓이는 $\pi\times\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{3}{34}\sqrt{34}\pi$이다.

$p+q=37$

이 문제지에 관한 저작권은 Promotion 출제자에 있습니다.