

수학 영역 (미적분)

성명	
----	--

수험번호																			
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(확률과 통계/미적분/기하)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

세상은 꿈꾸는 자의 것이라고

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2022년 10월 30일 시행 Epsilon 모의고사 2회 (미적분)

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

21학번 : 김민성, 김서원, 박창수, 서연수, 심현재

22학번 : 고명준, 김건우, 문희성, 박민수, 신요섭, 윤성준, 이수훈

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

21학번 : 박주원, 이유경

22학번 : 박민수, 임지훈

검토위원 :

이도윤 (성균관대학교 수학교육과 20)

정재훈 (성균관대학교 수학교육과 19)

황주영 (성균관대학교 수학교육과 19)

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 epsilon_skku@naver.com으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $2^{3\sqrt{2}-2} \times 8^{\frac{1}{3}-\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

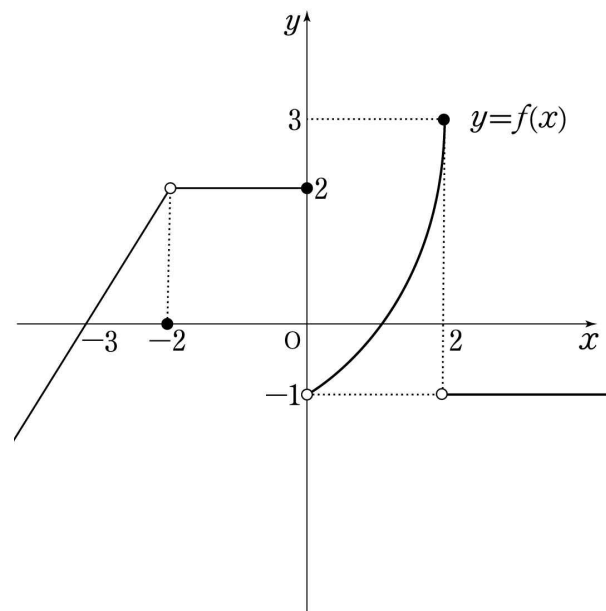
2. 함수 $f(x) = x^3 - 2x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 1}{h}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \frac{4}{5}$ 이고 $\tan\theta > 0$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 9$ 이고 $f(2) = 6$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k-1} a_k = 20, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = 30$$

일 때, $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

7. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3) = f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} 4x+a & (0 \leq x < 1) \\ ax^2+2x+b & (1 \leq x < 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 직선 $y=mx$ 와 곡선 $y=\log_4 x$ 가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 교점 중 x 좌표가 작은 것을 A, 큰 것을 B라 하자. 점 A에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 E라 하자. 사각형 ADOC와 사각형 ACEB의 넓이의 비가 2:3일 때, 사각형 ACEB의 넓이는? (단, m 은 상수이고 0는 원점이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) |a_1 + a_3 + a_5 + a_7| = 8$$

$$(나) |a_2| = a_4 + a_6$$

$\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① -9 ② -4 ③ -1 ④ 4 ⑤ 9

10. $ab < 0$ 인 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 \text{이라 할 때, } f'(a+3) = 0 \text{이다. 함수}$$

$$g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt \text{에 대하여 } f(1) - f(4) = g(4) - g(1) \text{일 때,}$$

$f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 9 ② 16 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

11. 두 양수 a, b 에 대하여 닫힌구간 $[0, 3\pi]$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 각각

$$f(x) = \frac{\sin x}{a}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{b}$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다. $ab = \frac{1}{\pi^2}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{2}{\pi}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{\pi}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

12. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 양수 α 에 대하여 각각

$$v_1(t) = t(t-\alpha)(t-2\alpha), \quad v_2(t) = 2(\alpha-t)$$

이다. 점 P가 움직이는 방향이 바뀐 수직선 위의 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

$$\neg. \int_0^{2\alpha} v_1(t) dt = \int_0^{2\alpha} v_2(t) dt$$

$$\sphericalangle. \int_0^{\alpha} v_1(t) dt = \overline{AB}$$

ㄷ. $\overline{AB} > 4$ 일 때, $t \geq 0$ 에서 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 4이다.

- ① \neg ② \neg, \sphericalangle ③ \neg, \sphericalangle
 ④ $\sphericalangle, \sphericalcup$ ⑤ $\neg, \sphericalangle, \sphericalcup$

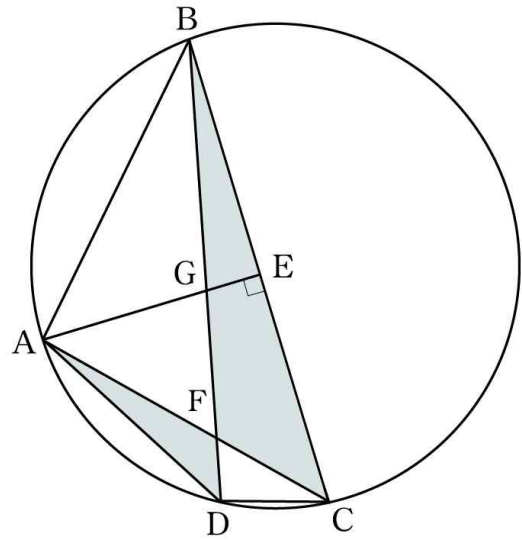
13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 최솟값은? [4점]

함수 $|f(x)| - |tx - t|$ ($t \neq 0$)이 실수 전체의 집합에서 미분 가능하도록 하는 실수 t 의 값은 a 또는 a^2 ($a < 0$)뿐이다.

- ① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

14. 그림과 같이 삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다.

점 B를 지나지 않는 호 AC 위의 한 점을 D, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AC와 선분 BD가 만나는 점을 F, 선분 AE와 선분 BD가 만나는 점을 G라 하자. 두 삼각형 ADF, BCF의 넓이는 각각 $3\sqrt{14}$, $12\sqrt{14}$ 이다. $\overline{BE} = \overline{EC}$ 이고 $\overline{FG} : \overline{GB} = 3 : 5$ 일 때, 선분 BD의 길이는? [4점]



- ① 21 ② $\frac{49}{2}$ ③ 28 ④ $\frac{63}{2}$ ⑤ 35

15. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면, $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 5이고 $S_{10} = 10$ 이다. $a_6 = a_7$ 일 때, S_{20} 의 값은? [4점]

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

단답형

16. $(\log_2 54 - 1) \times \log_3 8$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 2이다. $g(x) = 2x^2 f(x)$ 일 때, $g'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 함수 $f(x) = 2x^3 + 3(a+1)x^2 + 6ax + 5$ 가 실수 전체의 집합에서 증가할 때, $f(a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

19. 수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 1인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2, \quad a_{2n}(b_{2n})^2 = 1$$

을 만족시킬 때, $16(a_3 - b_4)$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최솟값이 -1 인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x-2} \int_{|g(a)|}^x f'(t) dt \right\} = f'(-2)$$

를 만족시키는 실수 a 의 값의 개수가 5일 때, $\int_0^3 f'(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x^n) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 과 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{n=1}^{10} a_n = 25$$

(나) $f(k)$ 의 k 제곱근 중 실수인 것의 개수가 0이 되도록 하는 2 이상의 자연수 k 의 개수는 3이다.

$f(-12)$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1보다 크고 극댓값이 $\frac{1}{8}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(-x) = 0$ 을 만족시킨다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$\{f(x) - \{f(t)\}^3\}\{x - f(t)\} = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가

$t = a$ 에서 불연속인 실수 a 의 값의 개수는 5이다. $f(1) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(미적분)



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times 4^{n+1} + 2}{3 \times 2^{2n} + 3^{n-1}}$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

24. 좌표평면에서 곡선 $4\ln(3-y) + xy^3 = 8$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

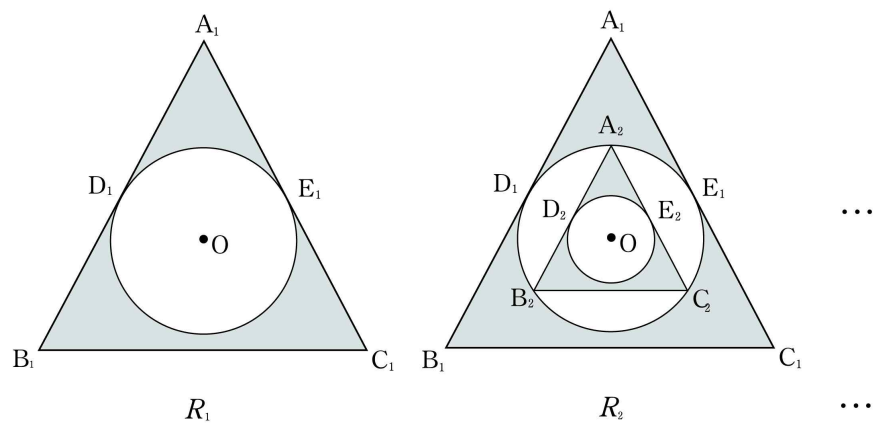
25. 함수 $f(x) = e^x(1-x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{5}{2e}$ ② $\frac{3}{e}$ ③ $\frac{7}{2e}$ ④ $\frac{4}{e}$ ⑤ $\frac{9}{2e}$

26. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고

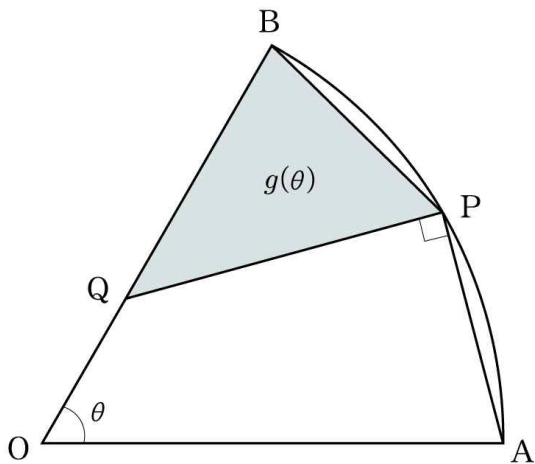
$\sin(\angle A_1B_1C_1) = \sin(\angle A_1C_1B_1) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 그림과 같이 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외심을 O 라 할 때, 선분 A_1B_1 과 선분 A_1C_1 에 동시에 접하고 점 O 를 중심으로 하는 원을 C_1 이라 하고 서로 다른 두 접점을 각각 D_1, E_1 이라 하자. 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내부와 원 C_1 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 원 C_1 과 선분 OA_1 의 교점을 A_2 라 하고, 원 C_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 $\sin(\angle A_2B_2C_2) = \sin(\angle A_2C_2B_2) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이 되도록 잡아 삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그린다. 선분 A_2B_2 와 선분 B_2C_2 에 동시에 접하고 O 를 중심으로 하는 원을 C_2 라 하고 그 접점을 각각 D_2, E_2 라 하자. 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 내부와 원 C_2 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{8\sqrt{2}-3\pi}{8}$ ② $\frac{4\sqrt{2}-\pi}{4}$
 ③ $\frac{8\sqrt{2}-3\pi}{6}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}-\pi}{3}$
 ⑤ $\frac{8\sqrt{2}-\pi}{6}$

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 가 되도록 잡고, 선분 OB 위의 점 Q를 $\angle QPA = \frac{\pi}{2}$ 가 되도록 잡는다. 선분 OQ의 길이를 $f(\theta)$, 삼각형 BQP의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [3점]



- ① $\frac{1}{18}$
- ② $\frac{1}{15}$
- ③ $\frac{1}{12}$
- ④ $\frac{1}{9}$
- ⑤ $\frac{1}{6}$

28. 첫째항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 구간 $[1, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = a_n \times \sin(2^{1-n} \pi x) \quad (2^{n-1} \leq x \leq 2^n)$$

이다. 함수 $f(x)$ 와 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 수열 $\{|a_n|\}$ 은 등비수열이다.
- (나) 집합 $\left\{ \int_1^{2^k} f(x) dx \mid k \text{는 자연수} \right\}$ 의 원소의 개수는 2이다.

$a_2 = 8$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값은? [4점]

- ① 14
- ② 15
- ③ 16
- ④ 17
- ⑤ 18

단답형

29. 양의 실수 k 와 $x \neq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{kx}{x^2+1}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{\sin f(x)}{f(x)}$$

라 하자. 자연수 n 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수가 $8n-6$ 이 되도록 하는 가장 큰 실수 k 의 값을

k_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_1^{e^x} |f(t)| dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라 할 때, 함수 $h'(x)$ 는 $x=0$, $x=a$ 에서 동일한 극솟값 m 을 가진다. $3e^{h(a)} - m$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 양수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.