$y = f(g(x))$ 가 있을 때,

$g(x)$의 증감이 전환될 때

x	$-\infty$	$\rightarrow$	a	$\rightarrow$	b	$\rightarrow$	c	$\rightarrow$	∞
$g(x)$	∞	$\rightarrow$	d	$\rightarrow$	e	$\rightarrow$	f	$\rightarrow$	∞
$f(g(x))$	$a-$	$\rightarrow$	b	$\rightarrow$	f	$\rightarrow$	g	$\rightarrow$	$a-$

이런 식으로 같이 증감표? 를 그리는 느낌입니다!

저는 N축을 배우지 않았지만 이 방식으로 생각해도 무리 없는 듯하더라구요.

문제를 풀며 적용해봅시다!

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

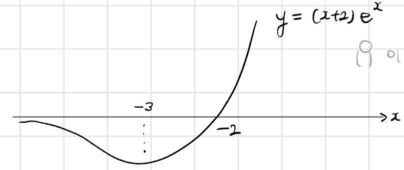
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

$= (x+2)e^x \circ f(x)$ 합성함수 그래프 그리겠네요!

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]



이 정도는 미분 없이 그릴 줄 아셔야합니다!

발상1 복잡해보임 → case 분류, 귀류법

i) $f(x)$가 ∪ (p)

x	$-\infty$	→	p	→	∞
$f(x)$	∞	→	$f(p)$	→	∞
$(x+2)e^x \circ f(x)$	∞	→	☆	→	∞

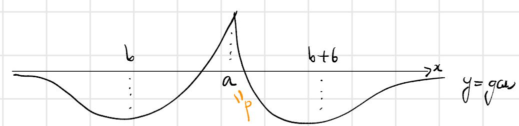
$g(x)$가 최댓값을 갖지 않으니 (가) 모순

ii) $f(x)$가 ∩ (p)

x	$-\infty$	→	p	→	∞
$f(x)$	$-\infty$	→	$f(p)$	→	∞
$g(x)$	$0-$	→	☆	→	$0-$

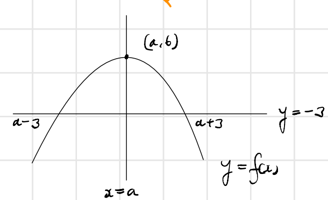
$g(x)$가 최댓값을 가지려면 $g(x)\ge 0$인 때가 존재해야할테니 $\boxed{f(p)\ge -2}$

증감표? 를 따라 $g(x)$의 개형을 잡아 (가), (나)를 살려보면,



x	$-\infty$	→	a	→	∞
$f(x)$	$-\infty$	→	6	→	∞
$g(x)$	$0-$	→	$8e^6$	→	$0-$

$g(x)$가 극소일 때 $\Leftrightarrow$ $f(x)=-3$ 일 때.



$f(x)+3=k\{x-(a-3)\}\{x-(a+3)\}$ 에서

$f(a)=6$ 이므로 $\boxed{k=-1}$

$f(x)=-\{x-(a-3)\}\{x-(a+3)\}-3$ 과 $y=0$의 교점의 x좌표는 $\boxed{x=a\pm\sqrt{6}}$

근의 차가 $|(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})|=2\sqrt{6}$ 이므로 $(2\sqrt{6})^2=24$

$\therefore 24$

28

두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$, $g(x)=x^2-b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(|g(x)|)$의 최댓값을 M이라 할 때,
방정식 $f(|g(x)|)=M$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
(나) 함수 $|g(f(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

방정식 $|g(f(x))|=0$이 실근을 가질 때, a^3+b^3의 값은?

① $\frac{7}{32}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{9}{32}$ ④ $\frac{5}{16}$

풀 이

28

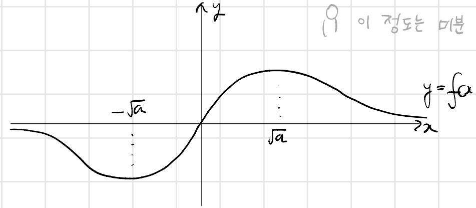
두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a}$, $g(x)=x^2-b$가 다음 조건을 만족시킨다.

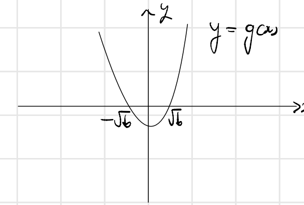
> (가) 함수 $f(|g(x)|)$의 최댓값을 M이라 할 때, 방정식 $f(|g(x)|)=M$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (나) 함수 $|g(f(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

방정식 $|g(f(x))|=0$이 실근을 가질 때, a^3+b^3의 값은?

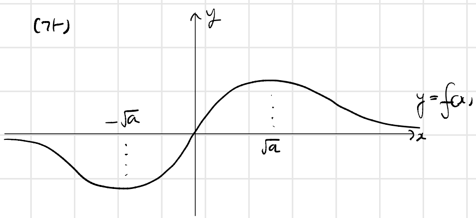
① $\dfrac{7}{32}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{9}{32}$ ④ $\dfrac{5}{16}$

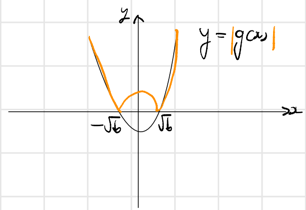
이 정도는 미분 없이!





(가)





x	$-\infty$	$\to$	$-\sqrt{b}$	$\to$	0	$\to$	$\sqrt{b}$	$\to$	∞
$\lvert g(x)\rvert$	∞	$\to$	0	$\to$	b	$\to$	0	$\to$	∞
$f(\lvert g(x)\rvert)$	∞	$\to$	0	$\to$	☆	$\to$	0	$\to$	∞

$M=f(\sqrt{a})$ 입니다.

$b<\sqrt{a}$ 이면 2개의 근

$b=\sqrt{a}$ 이면 3개의 근 ✓

$b>\sqrt{a}$ 이면 4개의 근

$\boxed{b=\sqrt{a}}$

(나) "절댓값 함수의 미분가능성"에 따라,

$g\{f(x)\}=0$ 일 때 $\frac{d}{dx}[g\{f(x)\}] = g'\{f(x)\}\cdot f'(x) = 0.$

$g(x)=0$은 $x=\pm\sqrt{b}$ 일 때이므로 $g\{f(x)\}=0$은 $f(x)=\pm\sqrt{b}$ 일 때.

$f(x)=\pm\sqrt{b}$, $g'(\pm\sqrt{b})\cdot f'(x)=0$ 에서 $g'(\pm\sqrt{b})\neq 0$ 이므로 $f'(x)=0$.

$f'(x)=0$ 은 $x=\pm\sqrt{a}$ 일 때이므로 $\boxed{f(\pm\sqrt{a}) = \pm\sqrt{b}}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \sqrt{b}$

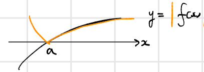
$\Leftrightarrow ab=\frac{1}{4}$

$b=\sqrt{a}$ 와 $ab=\frac{1}{4}$ 을 연립 $\longrightarrow$ $a^3=\frac{1}{16}$, $b^3=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{5}{16}$

〈 절댓값 함수의 미분가능성 〉

미분가능한 함수 $f(x)$에 대해, 다음 상황이라 가정.



$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x\geq a) \\ -f(x) & (x<a) \end{cases}$$

$|f(x)|$가 $x=a$에서 미분 가능하려면, $\frac{d}{dx}|f(x)|\Big|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ 가 존재해야 함.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{-f(x)-f(a)}{x-a} = ☆$$

$$\lim_{x\to a-}\{-f(x)-f(a)\} = \lim_{x\to a-}\frac{-f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$$

$$= \lim_{x\to a-}\frac{-f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a-}(x-a)$$

$$= ☆\cdot 0$$

$$= 0$$

이때 함수 $f(x)$는 미분가능하기에 연속이고 $\boxed{f(a)=0}$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-f(x)-f(a)}{x-a} = -\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -f'(a).$$

$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ 이어야 하므로 $f'(a)=-f'(a)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f'(a)=0}$

$\therefore$ $f(x)$가 미분가능할 때 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $\boxed{f(a)=f'(a)=0}$

⊕ 왜 미분가능하면 연속?

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = ☆$ (존재)

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h$

$= ☆\cdot 0$

$= 0$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} + \lim_{h\to 0} f(a) = 0 + \lim_{h\to 0} f(a)$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\} = \lim_{h\to 0} f(a)$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)}$: 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속

$\therefore$ 미분 가능하면 연속