수열 정리 for Mathematics 1

- 수학 1에서의 수열은 '함수'이다. 정의역이 자연수인 함수로 생각을 해야 한다.
  따라서 그래프를 그리는 데에 있어서 어색함이 없어야 하는 것이다.

- 수열의 분류는 '아는 수열'과 '모르는 수열'로 나눌 것이다.

- '아는 수열'로는 등차수열과 등비수열이 있다.

Part 1. 아는 수열

1) 등차수열

편하게 우리가 아는 일차함수로 그려진다. 이때 직선의 기울기는 d(공차)이다.
직선이어서 생기는 성질은 '대칭성'이다. 어떤 점을 좌우로 하여 대칭적으로 생겼다는 것이다.

이게 우리가 교과서에서 배우는 '등차중항'이다. 예를 들어보자.

$\sum_{n=1}^{3} a_n = 9$ 라는 조건이 제시되면, 우리는 어떻게 반응해야 할까?

a_2라는 점을 좌우로 대칭적으로 생겼으니, $\frac{a_1+a_3}{2}=a_2$ 일 것이다. $\therefore\ a_{1+}a_2+a_3=3a_2 \rightarrow a_2=3$
따라서 합이 제시되면 공식을 쓰는 것이 아니라, 가운데 항을 구하는 것이 편할 것이다.
$\sum_{n=1}^{4} a_n = 16$ 의 경우에는 개수가 짝수이므로 가운데 항이 정확히 있지는 않다.

수열은 정의역이 자연수이지만, 일단 표현상으로 소수를 도입해보자.
$4a_{2.5}=16$ 이므로 $a_{2.5}=4$라고 쓸 수 있다. 은근히 계산할 때 편하니 익혀두자.

등차수열 문제에서 많이 나오는 것은 '합'이다. 의미를 살펴보자.
가우스가 초등학교 때 했다고 전해지는 1부터 100까지의 합 계산법을 생각해보자.

(1+100), (2+99)... ... (50+51)로 짝을 지으면, 101이라는 합이 50개가 생기므로 답은 5050.
즉, 등차수열에서 첫 항과 마지막 항뿐만 아니라 대칭적으로 생기는 합을 구한 후 평균을 내서 총 개수를 곱하면 합이 나온다는 것이다.

'(대칭점인 평균)×(항의 개수)=합'

일차함수가 점대칭이므로 아무 대칭점 두 개의 평균을 구하면 그 점을 대칭으로 모든 항이 배치된다. 등차중항을 이용해 합을 구한 것이다.

기출 문제 하나와 같이 살펴보자.

ex 1. 2019년 4월 교육청 28번.
등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_2+a_3=159$
(나) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$인 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m}a_k=425$ (단, $m>3$)

a_{11}의 값을 구하시오.

배운대로 써보자.

(가): $3a_2=159$ $\therefore a_2=53$ / (나): $a_{m-1}=32$

$\sum_{k=1}^{m}a_k$를 구할 때 평균점을 구해서 항의 개수를 곱하면 되므로, $\frac{a_2+a_{m-1}}{2}\times m=425$ $\therefore$ $m=10$

$a_{m-1}=a_2+7d=53+7d=32$ $\therefore$ $d=-3$ $\rightarrow$ $a_{11}=a_2+9d=53-27=26$ (답)

당시 28번이면 준킬러인데 세 줄 풀이라뇨,,,
하지만 합 공식에 그냥 대입해서 푸는 사람은 매우 복잡한 이차방정식을 풀어야 하기에 계산이 힘들었던 문제이다. 등차수열의 합은 이제 '평균점과 항의 개수'로만 구하자!

한편, 합을 이렇게 구하는 것뿐만 아니라 역시나 그래프로 그릴 수 있다.
$S_n=\frac{\{2a_1+(n-1)d\}}{2}\times n$ 이므로 이차항의 계수가 $\frac{d}{2}$인 이차함수임을 알 수 있다.
또한, 항상 옆에 $\times n$이 있으므로, 원점을 반드시 지날 것이다.

그래프로 그려서 문제를 풀게 된다면, 그냥 $S_n=\frac{d}{2}n^2+kn$ 이라고 잡고, S_1이나 a_n의 값 아무거나 대입하면 k가 나와 S_n을 구할 수 있게 된다.

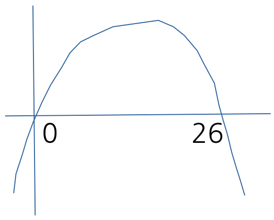
S_n을 그래프로 그려서 얻는 이점도 이차함수이기에 '대칭'을 쉬이 볼 수 있다는 것이다.
그러므로 손에 익혀두는 것이 좋을 것이다.

ex 2. 2020학년도 수능 (나)형 15번

첫째항이 50이고, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은?

역시나 배운대로 써보자.

$S_n = -2n^2 + kn$, $S_1 = k - 2 = 50$ $\rightarrow$ $S_n = -2n^2 + 52n$



: 대칭축은 $n = 13$임을 알 수 있다. 5개를 골라 최대가 되려면 가운데 항인 $m+2$가 대칭축이어야 하므로 $m = 11$임을 바로 알 수 있다.

이 문항 역시 이차방정식을 세워서 식으로 풀려면 계산이 힘들지만, 그림으로 그리면 눈으로도 풀 수 있다.앞으로 나올 어려울 문제들에 대해서도 적용이 많이 되니 기본적으로 알아두자.

ex 3. 2022학년도 9월 평가원 13번

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

(가) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+3} \rvert$ 인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$ 이다.

풀이는 다음 쪽에서 보자.

겁먹지 말고 따져보자. 공차가 자연수인 등차수열이므로 증가하는 직선일 것이다.

(가): $-a_m = a_{m+3}$ → 대칭이라는 소리이므로 $a_{m+1.5} = 0$ 임을 알 수 있다.
정의역이 자연수이므로 실제로 0인 항은 없으나 대칭으로 예쁘게 항이 퍼져 있을 것이다.

(나): 합에 대해서 생각해보자. 음수 부분($n < m+1.5$)을 계속 더하면 계속 감소할 것이다.
양수 부분을 더하면 증가하므로 최소는 '$n = m+1$'일 때이다.

$a_{m+1.5} = 0 \rightarrow a_{m+1} = -\dfrac{1}{2}d$ & $-45+(m+0.5)d = 0$ 정리하면, $(2m+1)d = 90$. 이를 분해해보자.

$2m+1$은 3 이상의 홀수이므로 90의 약수 중 홀수는 3, 5, 9, 15, 45 → d =30, 18, 10, 6, 2

$a_1 = -45$ 이므로, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1) > -100$

정리하면, $400 > (m+1) \times (d+90) = \left(\dfrac{45}{d} + \dfrac{1}{2}\right) \times (d+90)$ =240, 324, 500, 768, 2116

$\therefore$ $d = 18$, 30 → 48 (답)

차분하게 대칭성 조사하고, '자연수'라는 조건을 이용하면 된다.
수열 파트에서는 자연수나 정수 조건을 주고 '부정 방정식'을 풀게 하는 경우가 많다는 것을 명심하자.

* 절댓값과 결합된 등차수열의 합

단순 합은 위 두 가지만 체화해도 간단하기에 평가원은 형태를 변형했다.
그 방법은, 단순하지만 난도를 확 올려버리기 좋은 '절댓값'이다.

ex 4. 2022학년도 예비시행 20번
공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_3+a_5=0$, $\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$ 일 때, a_9의 값을 구하시오.

$a_4=0$ / $(|a_n|+a_n)$: 음수 부분은 날리고 양수 부분의 합은 2배. ∴ (양수 부분의 합) = 15
여기서 작은 tip은 양수 부분 합을 A, 음수 부분 합 절댓값을 B라고 두는 것이다. → A=15
만약 공차가 음수이면, $a_4=0$을 기준으로 왼편이 양수 부분이다. ∴ A=$a_1+a_2+a_3=3a_2=15$
$a_4-a_2=2d=-5$, 공차가 정수가 아니므로 안 됨. → 공차는 양수이다.
양수 부분 A=$a_5+a_6=3d=15$, $a_9=a_4+5d=25$ (답)

이를 바탕으로 난도가 있는 준킬러 교육청 문제를 풀어보자.

ex 5. 2022년 4월 교육청 모의고사 21번
공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오.

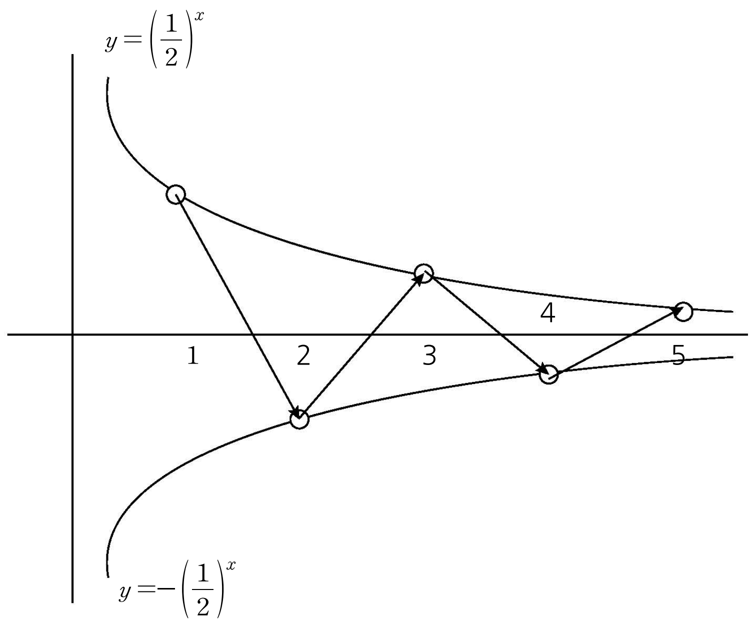
(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq 0$이다. (나) $a_{2m}=-a_m$ 이고 $\sum_{k=m}^{2m}\vert a_k\vert=128$ 인 자연수 m이 존재한다.

우선 공차가 자연수이므로 증가하는 직선으로 그래프가 그려진다. → $a_m<0$, $a_{2m}>0$ / $a_{1.5m}=0$
(가)에 의해 $1.5m$은 정의역에 없어야 한다. ∴ m은 홀수. $k=1.5m+0.5$부터 $a_k>0$
$\sum_{k=m}^{2m}|a_k|=128$ → k=m~$1.5m$에서는 B, $k=1.5m$~$2m$에서는 A. A+B=128
$\sum_{k=m}^{2m}a_k=a_{1.5m}\times(m+1)=0$ → A-B=0 ∴ A=B=64 / A=$a_{\frac{(1.5m+0.5)+(2m)}{2}}\times(0.5m+0.5)$
$=(0.25m+0.25)d\times(0.5m+0.5)=64$ ∴ $d=\frac{512}{(m+1)^2}$ (단, m은 홀수) → $d=128, 32, 8, 2$ / 170 (답)

2) 등비수열

그래프를 먼저 생각해보자면, 지수함수 형태이다.
사실 등비수열은 합 공식이 명확하기에 그래프를 그려서 풀 때가 별로 없을 수 있다.
하지만, 등차수열과 섞여서 나올 때는 매우 유용하게 쓰인다. 뒤에서 문제와 같이 살펴보겠다.

공비가 음수일 때는 지수함수 하나로 되지 않는다. 예로 $a_1 = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$인 등비수열을 그리면,



단순한 지수함수 형태가 아니라 위 그래프와 아래 그래프를 오가는 것처럼 그려진다.
따라서, 부호 조사가 등차수열에 비해 굉장히 편하다. 공비가 양수면 부호 일정, 음수면 짝수 항과 홀수 항을 나눠서 생각하면 되기 때문이다.

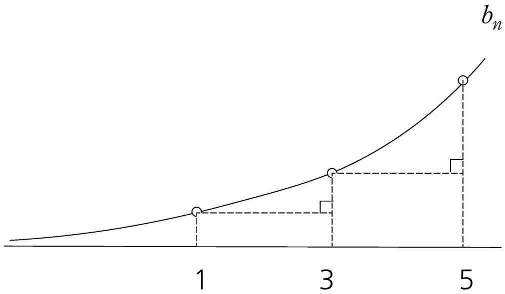
ex 6. 자작
등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1 = b_1 = 4$
(나) $a_5 = b_3$, $a_6 = b_5$

$\sum_{k=1}^{8} a_k$ 의 값을 구하시오.

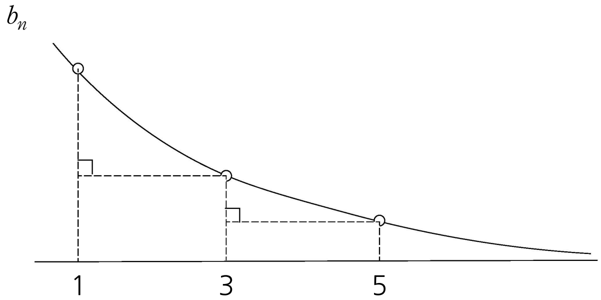
어차피 $b_{홀수}$만 보므로 b_n의 부호가 달라질 일은 없다.
그러면 그래프는 공비에 따라 우상향($r^2 > 1$), 우하향($r^2 < 1$) 중 하나다.

$r^2 > 1$일 때,



표시해놓은 점은 각각 a_1, a_5, a_6이다.
공차에 따라 y좌표 차 비율이 4:1인데,
그래프에서 알 수 있다시피 1:4의 모양이다.
∴ 이 그래프는 성립할 수 없다.

$r^2 < 1$일 때,



표시해놓은 점은 a_1, a_5, a_6이다.
공차에 따라 y좌표 차 비율이 4:1인데,
그래프에서 알 수 있다시피 4:1 가능.
$\therefore\ r^2 < 1$

$a_1 = \dfrac{a_5}{r^2}$, $a_6 = a_5 \times r^2 \rightarrow a_1 - a_5 = a_5\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)$ / $a_5 - a_6 = a_5(1 - r^2)$

$\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right) : (1 - r^2) = 4 : 1 \quad \therefore\ r^2 = \dfrac{1}{4}$, $a_5 = b_3 = b_1 \times r^{2} = 1 \rightarrow d = -\dfrac{3}{4}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = a_{4.5} \times 8 = \frac{11}{8} \times 8 = 11$(답)

이렇게 개형 추론에서 이점을 볼 수 있으니 등비수열의 그래프도 꼭 알아두자.

Part 2. 모르는 수열

1) 쪼개기

초항부터 쭉 수열인 경우도 있지만, 짝수 항 홀수 항이 각각 별개의 수열인 경우도 많다.
예를 들어, $a_n + a_{n+2} = 3$ 이라는 일반항이 있다고 생각하자. n과 $n+2$번째 항에 대한 얘기이므로, 이는 두 개의 항 단위로 규칙이 있다는 것이다. 따라서 짝수, 홀수 항에 따라 별개의 수열인 셈이다. $a_1 = a$라 하면, $a_3 = 3 - a,\ a_5 = a,\ a_7 = 3 - a,\ \cdots$ 가 반복되는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 $a_2 = b$라 하면 방금 한 것과 마찬가지로 반복이 된다. 이런 식으로 하나의 수열로 생각하지 말고, 특정 개수 단위로 여러 독립적인 수열로 해석하는 것을 '쪼개기'라고 하자.

[쪼개기]: a_n과 a_{n+m}에 대한 관계가 나오면, m개 단위로 따로 수열을 설정해야 하는 것이다.

ex 1. 자작 (답 내는 것은 쉬우나 뒤에 실린 해설의 내용을 공부하길 바람)

모든 항이 자연수이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. b_n은 a_n을 3으로 나눈 몫과 나머지의 합으로 정의된다. $\sum_{n=1}^{6} b_n = 20$일 때, $\sum_{n=1}^{11} a_n$의 값을 구하시오.

3으로 나누는 상황이므로 3개 단위로 쪼개져야 함을 알 수 있다. … [쪼개기]

$\sum_{n=1}^{6} b_n = \sum_{n=1}^{2} (b_{3n-2}+b_{3n-1}+b_{3n})$으로 식을 생각해보자. 3개 단위로 b_n이 쪼개져서 수열을 이룬다.

3개 단위라면, a_n기준으로 공차가 3개씩 먹여지는 셈이므로 6이 $b_{3n-2}, b_{3n-1}, b_{3n}$들의 공차임을 알 수 있다. $6=3\times2$이므로 $b_{3n-2}, b_{3n-1}, b_{3n}$ 각각 세 수열을 이루는 몫은 2씩 커지고 나머지는 일정함을 알 수 있다.

세 수의 나머지가 정확히 $0, 1, 2$ 중 무엇인지는 모르지만 a_n의 공차가 2이므로 세 수열이 각각 $0, 1, 2$ 중 하나임은 알 수 있다 (나머지 0에다가 2씩 더하면 나머지는 차례대로 $0, 2, 1, 0, 2, 1,$ … 순으로 반복됨을 확인 가능하다.).

그러므로 $b_{3n-2}+b_{3n-1}+b_{3n}$의 나머지 합은 항상 $0+1+2$ 즉, 3으로 일정함을 알 수 있다.
→ $20=6(\text{나머지})+14(\text{몫})$ 이다.

$14=(4)+(4+2\times3)$ (몫은 아까 $b_{3n-2}, b_{3n-1}, b_{3n}$에서 다음 항이 될 때마다 2씩 커진다고 했으므로 현재 $b_{3n-2}, b_{3n-1}, b_{3n}$ 세 개 모두를 해석하는 입장에서는 $2\times3=6$ 만큼 공차가 됨을 알 수 있다)
→ $b_1+b_2+b_3$ 중 몫의 합은 4임을 알 수 있다. a_n이 2씩 커짐에 따라 몫은 최대 1씩 커지므로 $4=1+1+2$로만 표현이 가능하다. ∴ $3, 5, 7$ 만이 이에 부합한다. → $a_n=2n+1$

$\sum_{n=1}^{11} a_n = 11\times a_6 = 11\times13 = 143$ (답)

지금은 문제에서 요구하는 수열이 자연수이기도 하고, 수가 작은 지라 수를 일일이 넣어본 사람도 금방 풀었겠지만, 어렵게 내려면 분수가 섞인 큰 수로 출제 가능하기에 해설처럼 풀지 못한다면 수능 날 틀릴 가능성이 있는 유형이다. 이처럼, [쪼개기]를 통해 3개 단위로 수열을 각각 해석하기도 하고 덩어리로 해석할 줄도 알아야 수열에서 어려움을 겪지 않을 것이다.

2) 모아가기

그런데 방금 살펴본 것과 같은 단순한 식의 경우 그냥 반복을 형성하지만, 다음과 같은 문제는 다루기 어려울 수 있다.

ex 1. 2020학년도 수능 나형 21번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$ (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

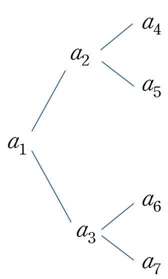
이런 문제는 대놓고 짝수 번째 항과 홀수 번째 항에 대해 나눠서 생각하기를 주문하고 있다.

$$a_n \ \rightarrow \begin{array}{l} a_{2n}=a_n-1 \\ \\ a_{2n+1}=2a_n+1 \end{array}$$

위의 식을 a_n을 바탕으로 a_{2n}과 a_{2n+1}이 만들어진다고 생각하자. 역으로 생각하면, 짝수 번째 항과 홀수 번째 항 모두 훨씬 앞쪽의 작은 수 번째 항으로 까 내릴 수 있음을 뜻한다.
그러므로 미지의 뒤쪽 항들을 앞쪽 항으로 까 내려서 합을 계산하는 것이 '모아가기'이다.

$\sum_{n=1}^{63} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{31} \{a_{2n}+a_{2n+1}\} = a_1 + \sum_{n=1}^{31} 3a_n$ → 63개의 항을 모두 구해서 더하는 것은 현실적으로 불가능하므로 뒤쪽 항들을 앞쪽 항으로 까 내린 것이다. 그러면 마찬가지로 $\sum_{n=1}^{31} 3a_n$도 까내려서 $\sum_{n=1}^{15}$로 나타낼 수 있다. 그러면 결국 최종적으로는 a_1으로 다 표현이 가능할 것이다.

이렇게 까내리기를 할 때도 일반화된 식을 찾으려는 노력을 하면 좋다.
$63, 31, 15, \cdots$ 무슨 숫자들일까. 바로 2^n-1이다.
이렇게 2개 단위로 까내려지는 수는 2^n과 관련이 있다. 그 이유를 이해해보자.



이런 식으로 가지를 치게 된다. 원래 있던 항의 개수에 계속해서 2배씩 항이 늘어나고 있음을 볼 수 있다. a_1부터 차례로 가지가 쳐질 때마다의 항들을 묶어서 생각해보자. 1번 가지에 a_1, 2번 가지에 a_2, a_3, 3번 가지에 $a_4 - a_7$이 존재한다. 즉 n번 가지에는 $\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}$번째 항까지 존재한다. 왜 2개 단위가 2^n으로 표현되는지 이제 이해가 될 것이다.
만약 문제가 a_{3n-2} 등의 3개 단위로 까내려지는 식이면 $\frac{1\times(3^n-1)}{3-1}$일 것이다.

다시 문제로 돌아가자. 결국, 2개 단위로 까내려지는 문제 상황이므로 2의 지수 형태로 보자.
$\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_1 + 3\times \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} a_k$ 로 일반화가 가능한 것이다. $\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} a_k = b_n \ (n \geq 2)$이라고 하면,
$b_{n+1} = a_1 + 3\times b_n$이고 우리는 b_7을 구하면 된다.

$a_{20}=1 \rightarrow a_{10}=2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_2=1 \rightarrow a_1=2$ 이므로, $b_2=a_1=2$ 이다.
$\therefore\ b_3=2+3\times b_2=8,\ b_4=2+3\times b_3=2+3\times 8=26,\ \cdots\ b_7=2+3\times 242=728$ (답)

몇 개 단위로 모아지는지에 따라 적절한 지수 표현으로 일반화하는 연습을 [모아가기]로 해보자.
위의 모아지는 그림을 절대 잊지 말자.

3) 그래프로 추적하기

임의의 수열 $\{a_n\}$은 정의역이 자연수인 함수로 해석이 가능하다. 따라서, 점화식으로 제시된 수열을 함수처럼 그리다 보면 개형 추론을 통해 수열의 규칙을 파악할 수 있는 경우가 많다.

그래프로 그릴 수 있는 유형 중 가장 기본 형태는 a_{n+1}이 a_n의 값에 따라 달라지는 경우이다.

ex 3. 2023학년도 6월 평가원 15번
자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=0$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \geqq 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

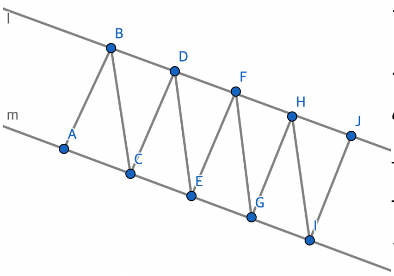
우선 $a_1=0$이라고 하였으므로 우리의 그림은 $(1,0)$에서부터 시작된다.
이제 규칙을 이해해보자.

a_n이 음수이거나 0이면 $\frac{1}{k+1}$만큼 증가해서 양수가 된다.

a_n이 양수이면 $\frac{1}{k}$만큼 감소해서 음수까지 간다.

즉, 양수이면 계속 감소시키되, 0 이하로 가면 다시 증가시켜준다는 것이 이 수열의 특징이다.
시작은 $a_1=0$이므로 증가한다. 그러면 양수가 될 것이고, 이번엔 $\frac{1}{k}$만큼 감소한다. 그러면 다시 음수가 될 것이다 ($\because$ $\frac{1}{k}>\frac{1}{k+1}$). 따라서, 계속해서 지그재그 모양이 나올 것임을 알 수 있다.
다만, 증가량이 감소량보다 작으므로 전반적으로 하락하는 지그재그 모양일 것이다.
생각해보자. 극솟값은 어차피 항상 음수일 것이다. 극댓점은 $a_2=\frac{1}{k+1}$로 최대였다가, $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$씩 감소된 극댓값을 가질 것이다. 그렇다면 우리가 찾는 $a_m=0$인 m을 찾으려면,
$\frac{1}{(k+1)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\times$어떤 수 를 만족하는 k를 찾으면 되는 것이다.

이 사실이 직관적으로 받아들여지지 않으면 이런 생각을 해보자.
어차피 극대든 극소든, $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$씩 감소할 수밖에 없다. 그러므로 아래처럼 그림을 그리자.



직선 l과 m 모두 기울기가 $-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$일 것이다. A $(1,0)$을 시작으로 계속해서 저런 지그재그 모양이 반복된다. 그리고, $a_m=0$ 이 직선 l 위에 존재할 것이라는 얘기이다. 한 번 0 에 도달하면 어차피 $a_1=0$부터 a_{m-1}의 상황이 그대로 되풀이된다.
똑같은 사다리 모양이 계속 반복될 것이라는 얘기이다...!
결국, 사다리의 기울기를 적절히 조절하여 언제 처음으로 0이 되도록 할지에 대한 물음이 바로 이 문제인 것이다.

$a_{22}=0$ 즉, $(22,0)$이 몇 번째 사다리인지가 중요할 것이다. a_1부터 a_{22} 사이에는 21칸이 존재한다.
따라서 사다리를 21의 약수인 $1,3,7,21$개 놓을 수 있을 것이다.

사다리를 1개만 놓으려면, a_1 이후 처음 0이 될 때가 $a_{22}=0$이다. $\frac{1}{k+1}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\times\left(\frac{22}{2}-1\right)$가 성립한다. $\rightarrow$ $k=10$
마찬가지로 사다리 3개는 $a_8=0$, $k=\frac{8}{2}-1=3$, 사다리 7개는 $a_4=0$이므로, $k=\frac{4}{2}-1=1$ 이다.
마지막으로 사다리 21개는 $a_2=0$인데, $\frac{1}{k}\neq\frac{1}{k+1}$이므로 불가능하다는 것을 알 수 있다.
$\therefore$ $k=1,3,10$ $\rightarrow$ 14 (답)

방금 한 풀이마냥 그림을 그림으로써 기하적으로 해석하면 좋은 점은 다음과 같다.

많은 학생들이 수열을 어려워하는 이유는 눈에 보이지 않기 때문이며 처음 문제를 보았을 때의 그 막연함이 너무 두려운 것이다. 그 막연함을 그림을 그리게 되면 없어지는 것이다. 또한, 수열의 전체적인 추세를 알게 됨으로써 답을 찍더라도 어디서 찍어야 할지도 알 수 있으며, 머릿속에서 수식적으로 뒤엉키는 것보다는 그림을 쳐다보며 답이 될 상황을 구상하는 것이 훨씬 쉽기에 함수를 그림으로써 기하적으로 해석하기를 권하는 것이다.

한 문제만 더 살펴보자.

ex 4. 2023학년도 9월 모의고사 15번
수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$ 이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때,
$p+a_1$ 의 값은?

(가): $a_{4k}=r^k$ → a_n의 항 중에서 4의 배수 번째 항의 값은 고정되어 있다. ⋯ 아는 값인 셈이다.

(나): $|a_n|$의 값에 따라서 다음 항이 달라진다. 우선, 절댓값이 5보다 작으면 3씩 ‘계속’ 더한다. 그러면 결국 a_n이 5보다 커지게 될 것이다. 그러면 이번에는 ‘바로’ $-\frac{1}{2}$을 곱한다. 그러면 그 다음 항은 $5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$보다 작아지게 될 것이다. 그러면 또다시 절댓값이 5보다 작아졌으므로 위의 규칙을 반복할 것이다.

따라서, -5와 5 사이 영역 → 5보다 큰 영역 → -5와 5 사이 영역 → ⋯ 의 규칙인 셈이다.
(기하적으로는 ‘쭉쭉 올라가다가 퍽 내려오고 다시 쭉쭉 올라가다가 퍽 내려오고’의 반복)

우선 아는 값들을 바탕으로 규칙을 계산해보자. $a_4=r$ / $a_8=r^2$ 의 사이를 메워 보자.
$a_5=r+3$, $a_6=r+6$, $a_7=-\frac{1}{2}\times(r+6)$, $a_8=-\frac{1}{2}\times(r+6)+3=r^2$ 임을 알 수 있다.

위의 과정에서 거침없이 a_n의 절댓값이 5와 대소가 어떻게 되는지 판단할 수 있었던 이유는
위에서 이미 어떤 영역에서 어떤 영역으로 가는지 판단했기에 바로 할 수 있는 것이다.
일일이 범위 판단을 한 사람은 각 항이 어떤 영역인지 따져보면서 바로 판단할 방법을 생각해보길 바란다.

다시 돌아가서 계산하자. $2r^2+r=0$ → $r=-\frac{1}{2}$ → $a_4=-\frac{1}{2}$ / $a_8=\frac{1}{4}$
r의 거듭제곱은 어차피 절댓값이 1보다 작으므로, 절댓값이 5보다 커질 때는 항상 주기에 따르게 될 것이다(3을 두 번 더할 때만 만들어짐). a_6 이후는 a_{10}, 계속해서 4마다 등장할 것이다. 다만, 이는 4번째 항 이후에 해당한다. 결국, 1~3번째 항을 알아내야 하는 셈이다.

$a_4=-\frac{1}{2}$가 나오려면, 역연산으로 $a_3=-\frac{7}{2}$ or 1 로 대략 예상이 가능한데, $a_3=1$이면, 범위 상 $a_3<5$ 이므로 $a_4=4$가 되어 모순이다. $\therefore\ a_3=-\frac{7}{2}$
마찬가지로 계산해보면, $a_2=7$ → $a_1=4$ or $a_1=-14$ / 한편, $a_1<0$이라는 (나) 조건에 의해 $a_1=-14$ 확정.

1~3번째 항 중 $1, 2$번째 항이 m에 해당하고, 이후에서는 4항 주기마다 하나이므로, $p=26$
$\therefore\ p+a_1=12$ (답)

추세를 그림으로 파악하고, 그 추세를 이용해 답을 구하는 일련의 과정을 항상 유지해야 안정된 수열 문제 운영이 가능할 것이다.

마지막으로 그래프로 푸는 문제 하나를 더 볼 것이며 두 가지 풀이를 살펴볼 것이다.

ex 5. 2022학년도 9월 모의고사 15번

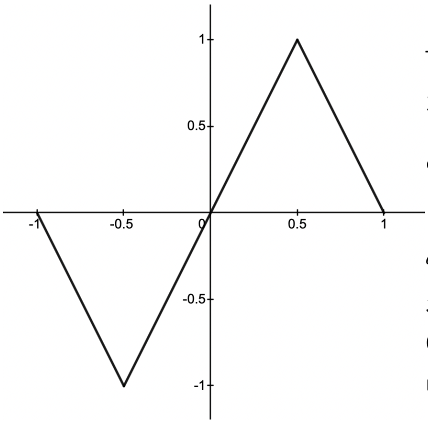
수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고, $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

Tip. a_n을 x축, a_{n+1}을 y축으로 생각해보자.

Tip에서 알려준대로 그래프를 그려보자.



그림을 통해 알아낸 것으로는 a_{n+1}의 부호는 a_n의 부호와 같다는 것이다. 따라서, 문제에서 요구하듯이 $\sum_{n=1}^{5} a_n > 0$ 가 되려면, $a_n > 0$ 임을 알 수 있다.

$a_5+a_6=0$을 이용하기 위해 x축의 a_n이 a_5라고 생각하자. 그러면, y좌표의 값이 a_6 이므로, (x, y)에 대해 $x+y=0$인 값을 찾자. 이때, 어차피 $a_n>0$ 이라 했으므로 x, y좌표가 모두 양수인 제 1사분면만 보아도 상관없다. $y=-x$ 를 그림 위에 그려 교점을 찾자.
→ $(0, 0)$이 유일한 근이다. → $a_5=a_6=0$

이제부터 a_1부터 a_4까지 미지의 값을 구하기 위해 이미 알고 있는 값인 a_5 를 활용할 것이다. 역으로 추적해야 하는 것이다. 여기서 두 가지 방법으로 풀어보겠다.

Case 1. 반복성을 이용하기

a_5를 y축으로 하여 a_4를 x축으로 그림을 그리면 위의 그림과 동일하다. 따라서, $a_5=0$라는 것은 y좌표가 0이라는 것이고, 이때 x값이 a_4 이므로, a_4는 결국 저 그래프의 근과 같다. 이때 음수는 살펴보지 않아도 되는 것이 앞서 알아봤다시피 한 번 음수가 되면 계속 음수여야 하므로, $\sum$이 양수인 현재에는 모순됨을 알 수 있다. 따라서 a_4는 '0 or 1'이다. ⋯ 여기까지는 그래프를 이용한 풀이

a_4에서 값이 두 개이므로 두 가지 갈림길이 주어진다. 이때 만약 $a_4=0$이면 방금 a_5, a_4의 관계가 a_4, a_3의 관계가 그대로 되풀이 된다. ⋯ 반복성이 존재함.

이 말인즉슨, 어차피 다른 항들을 구할 때에도 똑같이 반복된다는 것이다. 이 말을 잘 기억해두자. 뒤에서 사용할 것이다.

$a_4=1$이라 하고, a_4를 y축, a_3를 x축으로 하여 그림을 살피자. $a_4=1 \rightarrow a_3=\frac{1}{2}$

a_3를 이번에 y축, a_2를 x축으로 하여 그림을 살피자. $a_3=\frac{1}{2} \rightarrow a_2=\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

a_2를 y축, a_1을 x축으로 하여 그림을 살피자. $a_2=\frac{1}{4} \rightarrow a_1=\frac{1}{8}, \frac{7}{8}$ / $a_2=\frac{3}{4} \rightarrow a_1=\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

이제 반복성을 생각해보자. $a_4=1$일 때의 상황을 가장 빠른 시간대라고 생각하자. 만약 $a_4=0$ 이었다면, $a_3=0 \text{ or } 1$ 일 것이다. 그러면 여기서 $a_3=1$을 선택하면 정확히 한 칸 밀린 효과가 날 것이다. 밀린 시간대인 셈이다. 이때, a_1의 값은 $a_4=1$이라고 했을 때의 a_2와 완전히 일치한다. 반복성 때문에!

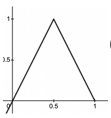
마찬가지로 $a_3=0$이라고 하고 $a_2=1$이라 하면 시간대가 한 번 더 밀리게 되면서 이번엔 가장 빠른 시간대인 $a_4=1$이라고 했을 때의 a_3와 완전히 일치한다.

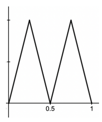
이렇게 계속 반복된다. 이런 '시간 지연'된 효과를 기억하자. 정확히 한 칸씩 밀린 채로 똑같은 상황이 재현되기 때문에 그냥 가장 빠른 시간대의 수열의 모든 항이 조금씩 밀린 시간대들의 초항으로 재현되는 것이다. 따라서 가장 빠른 시간대인 $a_4=1$이라고 생각하고 구한 a_3, a_2, a_1이 모두 다른 시간대에서는 a_1이 된다. (한 번 밀린 시간대에서는 가장 빠른 시간대의 a_2, 두 번 밀린 시간대에서는 가장 빠른 시간대의 a_3, ⋯ .) $\therefore$ a_1의 합은 $1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right)=\frac{9}{2}$ (답) 이다.

Case 2. 그래프로 계속해서 풀기 (by 합성함수)

위에서 그렸던 함수를 $f(x)$라고 하자. 그리고, a_n을 x축으로 하는 그래프를 $f_n(x)$라고 하자. $f_4(x)$와 $f_3(x)$를 합성하는 상황을 생각해보자. $f_4(f_3(x))$는 $x=a_3, f_3(x)=a_4, f_4(f_3(x))=a_5$ 인 것을 알 수 있다. a_3 를 x축으로 하고 a_5 를 y축으로 하는 그래프이다. $f(f(x))$가 a_3를 x축으로 한다. 한 번 더 합성하면 a_2가, 한 번 더 합성하면 a_1이 x축이 되므로, x축이 a_1, y축이 a_5인 그림은 $y=f(f(f(f(x))))$ 인 것이다.

Case 1 때와 마찬가지로 어차피 양수 쪽만 살피면 되므로 y축을 포함하여 오른쪽 부분만 그리면 된다.



이 모양을 한 번 합성하면


또 합성하면 4개의 봉우리, 또 합성하면 8개의 봉우리일 것이다. 이때 y값이 a_5 인데 0이라고 발문에서 그랬으므로, $y=f(f(f(f(x))))$의 근을 구하면 된다. → $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{9}{2}$ (답)

이런 식으로 그래프로 그리게 되면 규칙성이 눈으로 잘 보이며, 문제 풀이의 확장성이 생겨 실력이 오를 여지가 다분해지기에 귀납적으로 정의된 수열들을 최대한 시각화하는 연습을 할 수 있길 바란다.