Seoul Union of Math education

the thin line.

서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고2팀 주관

theme 1. 극한식을 통한 함수의 추론

- $x \to c$와 $x \to \infty$의 구분

- 차수를 모를 때, αx^n으로 가정

ex) $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^5 \times f(x)} = 2$

- 분모 분자의 0개수와 수렴 여부

1. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x) = x^3 + ax + b$$

을 만족시킨다. $f(1) = 4$일 때, $a \times b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

2019 11월

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x} = 10, \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 20$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

2019 9월

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

3. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$

(나) 1이 아닌 상수 α에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha$이다.

$\alpha \times f(4)$의 값을 구하시오.

2021 고2 11월

theme 2. 곱함수의 연속과 미분 가능성

• 곱함수의 연속성 판단

$f(x)\times g(x)$

$x\to\alpha+$

$x\to\alpha-$

$x=\alpha$

• 곱함수의 미분가능성 판단

$f(x)\times g(x)$

$f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

$x\to\alpha+$

$x\to\alpha-$

4. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\ge a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020 6월

5. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1$$

$$g(x)=\begin{cases}x+b & (1<x<3)\\ 7-b & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하시오.

2020 11월

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x \le 0)\\ x-1 & (0 < x \le 2)\\ 2x-3 & (x > 2)\end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020 11월

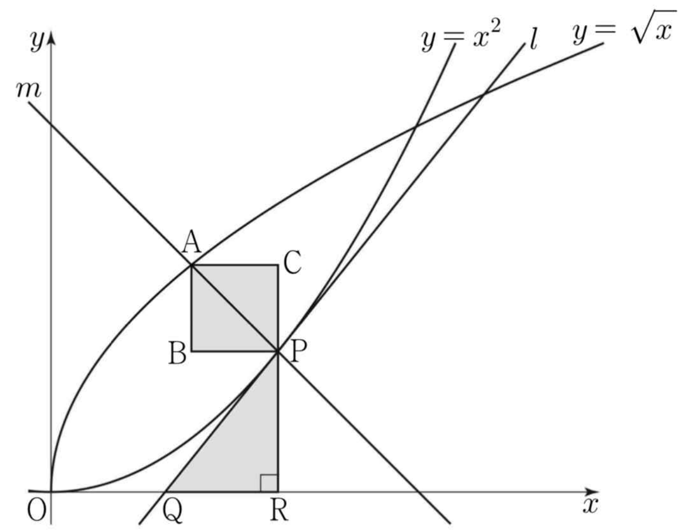
theme 3. 도형의 극한 (새로운 함수의 정의)

- 결국 극한값 구하기

- 새로운 함수의 정의 ⇒ 무엇을 미지수로 잡느냐

  ⇒ 시간 단축의 문제!

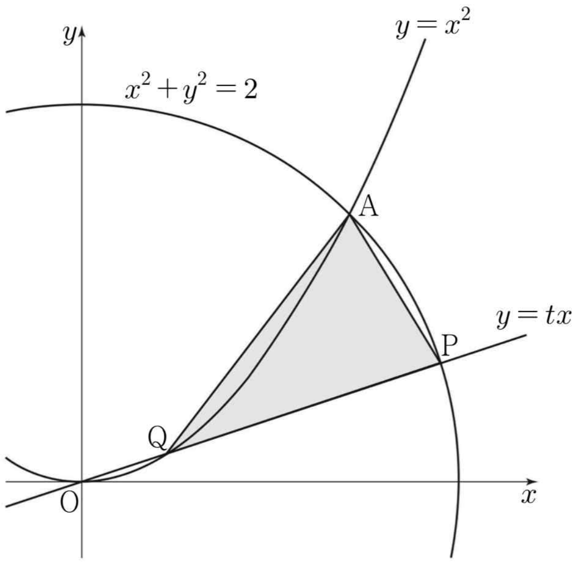
7. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^2)\,(0<t<1)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(t)$라 하자. 또한, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선 m이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A라 할 때, 선분 PA를 대각선으로 하는 정사각형 PCAB의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t\times g(t)}{f(t)}$의 값은?



2018 11월

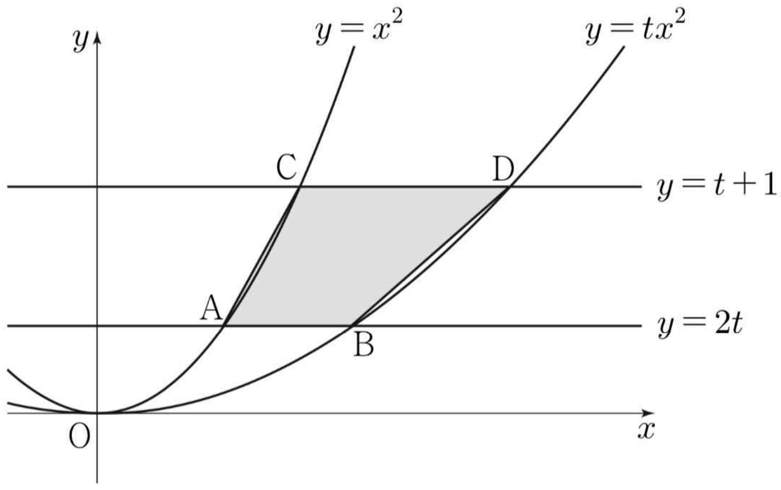
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=tx$와 원 $x^2+y^2=2$, 곡선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}=k$이다. $20k$의 값을 구하시오.



2020 11월

9. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=2t$가 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=t+1$이 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}$의 값은?



2021 11월

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

Seoul Union of Math education

the thin line.

서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고2팀 주관

theme 1. 극한식을 통한 함수의 추론

- $x \to c$와 $x \to \infty$의 구분

$x \to c$ '인수'에 주목

$x \to \infty$ '차수'에 주목

- 차수를 모를 때, αx^n으로 가정

ex) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^5 \times f(x)} = 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\{\alpha x^n\}^2 - \alpha x^{2n}}{x^5 \times \alpha x^n} = 2$$

최고차항 차수 : $\dfrac{(2n)\text{차}}{(n+5)\text{차}}$ $\therefore n=5$

계수 : $\dfrac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \alpha - 1 = 2$ $\therefore \alpha = 3$

- 분모 분자의 0개수와 수렴 여부

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{(x-c)^m}{(x-c)^n}$ 일때 $m \geq n$이어야 수렴!

1. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x) = x^3 + ax + b$$

을 만족시킨다. $f(1) = 4$일 때, $a \times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) 답: ①

2019 11월

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + ax + b}{x - 1}$

$x^3 + ax + b = g(x)$ 라고 하자.

$g(1) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 4$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + a) = 4$ $\therefore a = 1$

$g(1) = 0$ 이므로 $b = -2$

$\therefore ab = -2$

2. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x} = 10, \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 20$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? 답: ⑤

2019 9월

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(x) = 3x^2 + 10x + k$

$f(1) = 13 + k$

$k = 7$

3. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$

(나) 1이 아닌 상수 α에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha$이다.

$\alpha\times f(4)$의 값을 구하시오. 답 : 18

2021 고2 11월

(가) $f(1)=0$, $f'(1)=3$

(나) $f(2)=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{f'(x)}=\alpha$$

$$\frac{f'(2)}{f'(2)}=\alpha\neq1 \Rightarrow \frac{0}{0}꼴.$$

$\therefore f'(2)=0$.

$\therefore f(x)=k(x-1)(x-2)^2$

$f'(x)=k(x-2)^2+k(x-1)(x-2)\cdot2$

$f'(1)=k=3$

$\therefore f(x)=3(x-1)(x-2)^2$

$f(4)=3\times3\times4=36$.

$$\lim_{\to2}\frac{3(x-1)}{3(x-2)+3(x-1)\cdot2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \frac{1}{2}\times36=18$

theme 2. 곱함수의 연속과 미분 가능성

- 곱함수의 연속성 판단

$f(x)\times g(x)$

$x\to\alpha+$

$x\to\alpha-$

$x=\alpha$

- 곱함수의 미분가능성 판단

$f(x)\times g(x)$

$f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

$x\to\alpha+$

$x\to\alpha-$

$x=\alpha$

* $f(x)$가 미분가능하고 $g(x)$는 미분가능 (X) 연속(O)일때

$f(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$x\to\alpha+$	O	O	O	△	⇄ 다름
$x\to\alpha-$	O	O	O	□	

∴ $f(\alpha)=0$ 이면 $f(x)g(x)$는 미분가능 !

4. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? 답: ④

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2020 6월

$g(x)$가 $x=a$에서 불연속

→ $f(a)=0$ 이면 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속

$a=\frac{3}{2}, 1$ → $a=1$

$a<0$ 의 조건 (X)

$a=1$ 일때 $g(x)=\begin{cases}2x & (x<1)\\ 2x-1 & (x\geq 1)\end{cases}$

$g(0)=0$.

∴ 실수전체에서 연속

5. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1$$

$$g(x)=\begin{cases}x+b & (1<x<3)\\ 7-b & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 3)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하시오. 답: 7개

2020 11월

i) $g(x)$가 $x=1$일때 연속인경우

$1+b=7-b$ ⇒ $b=3$.

$f(x)g(x)$가 $x=3$일때 연속이어야하므로

$f(3)=0$. ∴ $f(3)=(a-2)(a-5)$ $a=2$ or $a=5$

ii) $g(x)$가 $x=3$일때 연속인경우

$3+b=7-b$ ⇒ $b=2$

$f(x)g(x)$가 $x=1$일때 연속이어야하므로

$f(1)=0$ ∴ $f(1)=(a-1)(a-2)$ $a=1$ or $a=2$

iii) $g(x)$가 $x=1$, $x=3$ 모두 불연속인 경우

$f(1)=f(3)=0$. ∴ $a=2$. $b\neq 2,3$

∴ $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(5,3)$ 총 7개

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x\le 0)\\ x-1 & (0<x\le 2)\\ 2x-3 & (x>2)\end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020 11월

답: ②

* $p(x)$는 다항식 → 미분가능

ㄱ. $\lim_{x\to0+} p(x)\underline{f(x)} = \lim_{x\to0-} p(x)\underline{f(x)}$ 불연속 불

∴ $p(0)=0$

ㄴ. $h(x)=p(x)f(x)$
$h'(x)=p'(x)f(x)+p(x)f'(x)$

$\lim_{x\to2+} h'(x)=p'(2)+2p(2)$
$\lim_{x\to2-} h'(x)=p'(2)+p(2)$
→ $p(2)=0$

ㄷ. $p(x)\{f(x)\}^2$　　연속 → $p(0)=0$, $\underline{p(2)=0}$

$g(x)=p(x)\{f(x)\}^2$
$g'(x)=p'(x)\{f(x)\}^2+2p(x)f(x)\cdot f'(x)$

$\lim_{x\to2+} g'(x)=p'(2)+2p(2)\cdot2$
$\lim_{x\to2-} g'(x)=p'(2)+2p(2)\cdot1$
$p(2)=0$

$\lim_{x\to0+} g'(x)=p'(0)(-1)+2p(0)\cdot(-1)(1)$　　$\underline{p'(0)=0}$
$\lim_{x\to0-} g'(x)=p'(0)\cdot0+2p(0)\cdot0$

∴ $x^2(x-2)$로 나누어 떨어짐

∴ ㄱ, ㄴ

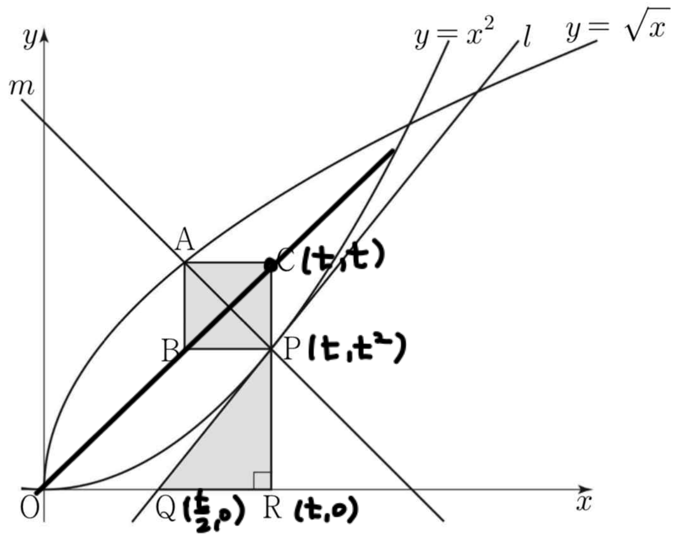
theme 3. 도형의 극한 (새로운 함수의 정의)

- 결국 극한값 구하기

- 새로운 함수의 정의 ⇒ 무엇을 미지수로 잡느냐

  ⇒ 시간 단축의 문제!

7. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t, t^2\right)(0<t<1)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(t)$라 하자. 또한, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선 m이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A라 할 때, 선분 PA를 대각선으로 하는 정사각형 PCAB의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\lim\limits_{t \rightarrow 0+} \dfrac{t \times g(t)}{f(t)}$의 값은? 답: ④



2018 11월

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

l: $y = 2t(x-t)+t^2$

m: $y = -(x-t)+t^2$

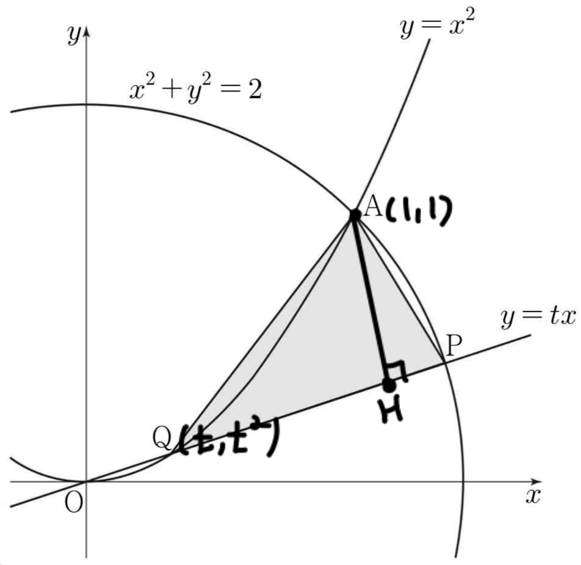
$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2} \times t^2 \times \frac{t}{2} = \frac{t^3}{4}$

$\square \mathrm{PCAB} = (t-t^2)^2$

$\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{t \times (t-t^2)^2}{\frac{t^3}{4}} = \dfrac{4(t^4-2t^3+t^2)}{t^2}$

$= 4$

8. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=tx$와 원 $x^2+y^2=2$, 곡선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}=k$이다. $20k$의 값을 구하시오. 답: 15



2020 11월

$tx-y=0.\ (1,1)$

$\overline{AH}=\dfrac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$

$\overline{PQ}=\overline{PO}-\overline{QO}=\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t^4}$

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}\times(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t^4})$

$\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}=\dfrac{(1-t)(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t^4})}{2(1-t)^2\times\sqrt{t^2+1}}$

유리화

$=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t^4})(\sqrt{2}+\sqrt{t^2+t^4})}{2(1-t)(\sqrt{t^2+1})(\sqrt{2}+\sqrt{t^2+t^4})}$

$=\dfrac{2-t^2-t^4}{2(1-t)(\sqrt{t^2+1})(\sqrt{2}+\sqrt{t^2+t^4})}$

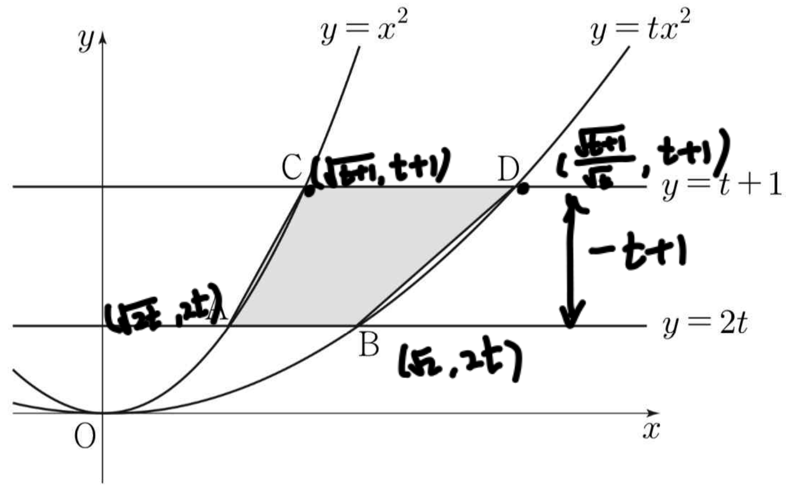
$=\dfrac{\cancel{-(t-1)}(t+1)(t^2+2)}{2\cancel{(1-t)}(\sqrt{t^2+1})(\sqrt{2}+\sqrt{t^2+t^4})}$

$=\dfrac{(t+1)(t^2+2)}{2(\sqrt{t^2+1})(\sqrt{2}+\sqrt{t^2+t^4})}$

$\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}=\dfrac{2\times3}{2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}=k$

$\therefore 20k=15$

9. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=2t$가 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=t+1$이 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}$의 값은? 답: ④



2021 11월

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

$\sqrt{2}-\sqrt{2t}+\dfrac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+1}$

$=\sqrt{2}(1-\sqrt{t})+\dfrac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}(1-\sqrt{t})$

$\dfrac{(1-\sqrt{t})\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}\right)\times\frac{1}{2}\times(1-t)}{(1-t)^2}$

$\dfrac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t}}}{2(1+\sqrt{t})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$