메가스터디 불꽃수학 김성은의

EBS 수능완성 변형 문제집

2023 올해 기출 / E-BS 수능완성 변형

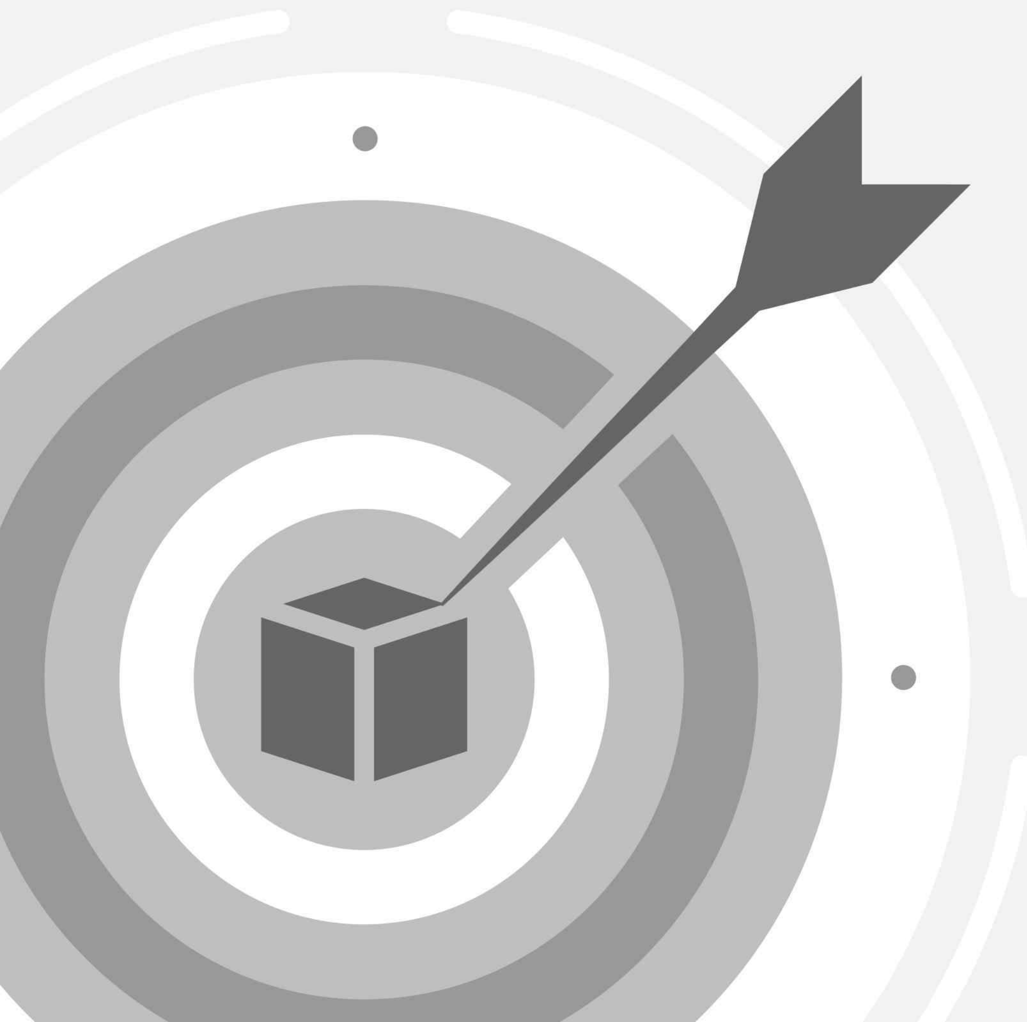
족집게 특강

수학영역

수학Ⅰ / 수학Ⅱ / 확률과 통계 / 미적분 / 기하

I

수학 I



01

2023학년도 평가원 9월 11번

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

02

2023학년도 평가원 6월 21번

자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

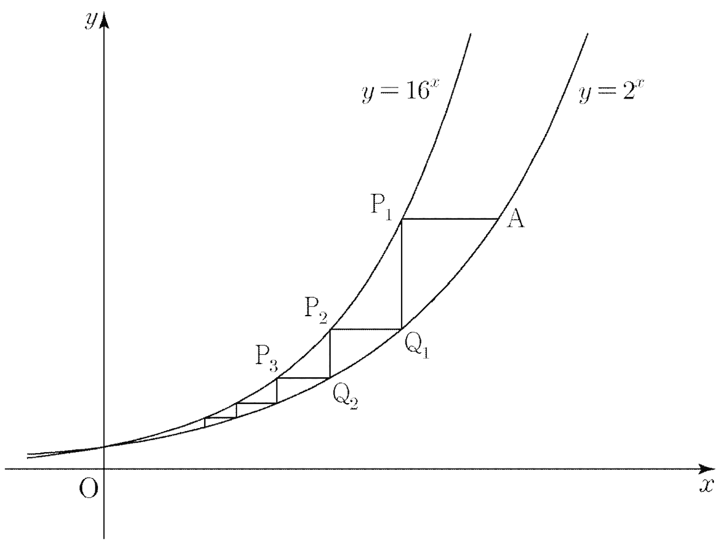
03

2023학년도 평가원 6월 13번

두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48　② 51　③ 54　④ 57　⑤ 60



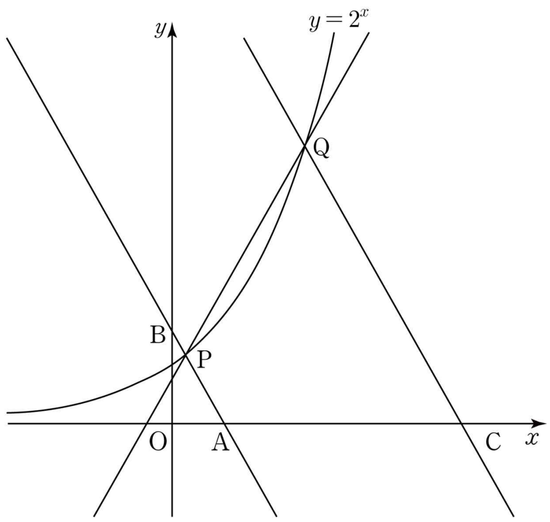
04

2023학년도 평가원 9월 21번

그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\ \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



05

2023학년도 사관학교 9번

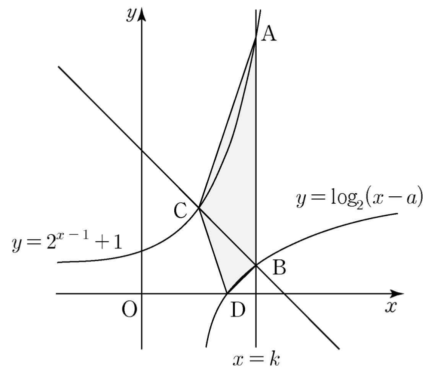
곡선 $y=\left|\log_2(-x)\right|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06

2022년 시행 교육청 3월 11번

그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

07

2022년 시행 교육청 3월 21번

상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.

(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$) [4점]

08

EBS 수완 변형 문제

자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$\log_3(x-2)=\log_{27}(x-\log_3 n)+1$$

의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{100} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

09

2023학년도 평가원 9월 9번

닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\ g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 $\alpha_1,\ \alpha_2$라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 $\beta_1,\ \beta_2$라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은?
(단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

10

EBS 수완 변형 문제

양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=\cos\left(ax-\frac{\pi}{4}\right)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$이다.
(나) 함수 $y=f\left(x+\frac{5}{16}\pi\right)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

a의 최솟값은? [4점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

11

2022년 시행 교육청 4월 11번

자연수 k에 대하여 $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다. $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? [4점]

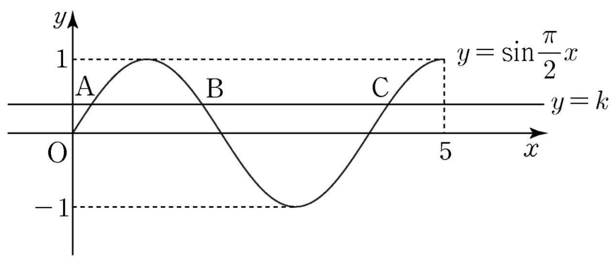
① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

12

2022년 시행 교육청 7월 10번

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ $(0 \le x \le 5)$가 직선 $y=k$ $(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

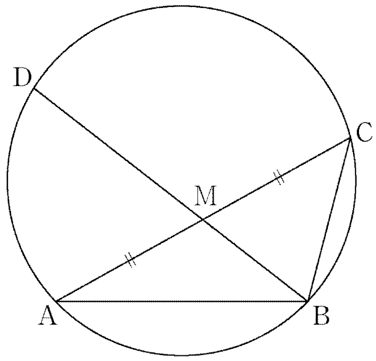
① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



13

2023학년도 평가원 6월 10번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$　⑤ $\sqrt{10}$

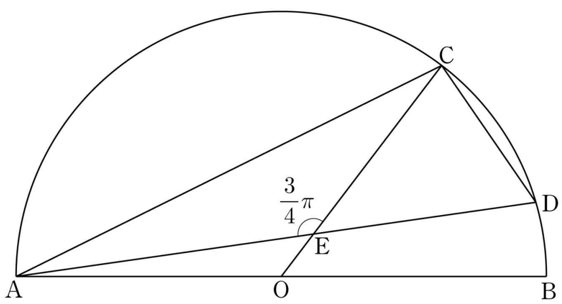
14

2023학년도 평가원 9월 13번

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\ \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\ \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$　② $10\sqrt{5}$　③ $16\sqrt{2}$　④ $12\sqrt{5}$　⑤ $20\sqrt{2}$

15

2022년 시행 교육청 7월 14번

길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]

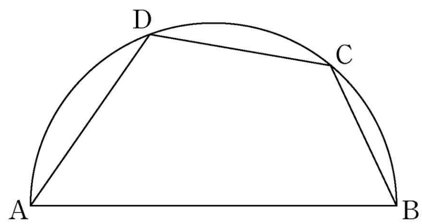
〈보 기〉

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

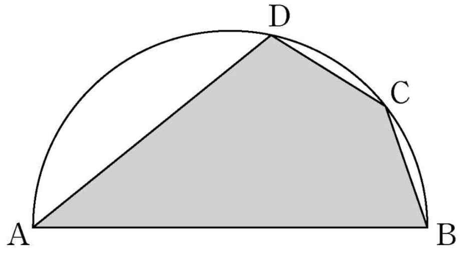
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



16

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위의 두 점 C, D에 대하여 $\overline{AB}=3\overline{BC}=3\overline{CD}$이고, 사각형 ABCD의 넓이가 $16\sqrt{2}$일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. (단, B와 D는 서로 다른 점이다.) [4점]



17

2023학년도 평가원 6월 12번

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

18

2022년 시행 교육청 4월 21번

공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.

(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다.

19

2023학년도 평가원 9월 7번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

20

2022년 시행 교육청 7월 21번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$
(나) $\left\vert a_{n+1} - a_n \right\vert = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

21

EBS 수완 변형 문제

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}$을 만족시킨다. $\left|a_n - n + 1\right| < \frac{1}{10}$을 만족시키는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

22

2023학년도 평가원 6월 15번

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

23

EBS 수완 변형 문제

자연수 a에 대하여

$$S(a)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

이라 할 때, $S(a)$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 차례대로 나열하면

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

이다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{a_k}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

24

2023학년도 평가원 9월 15번

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다. (단, r는 $0 < |r| < 1$인 상수이다.)

(나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$

이다.

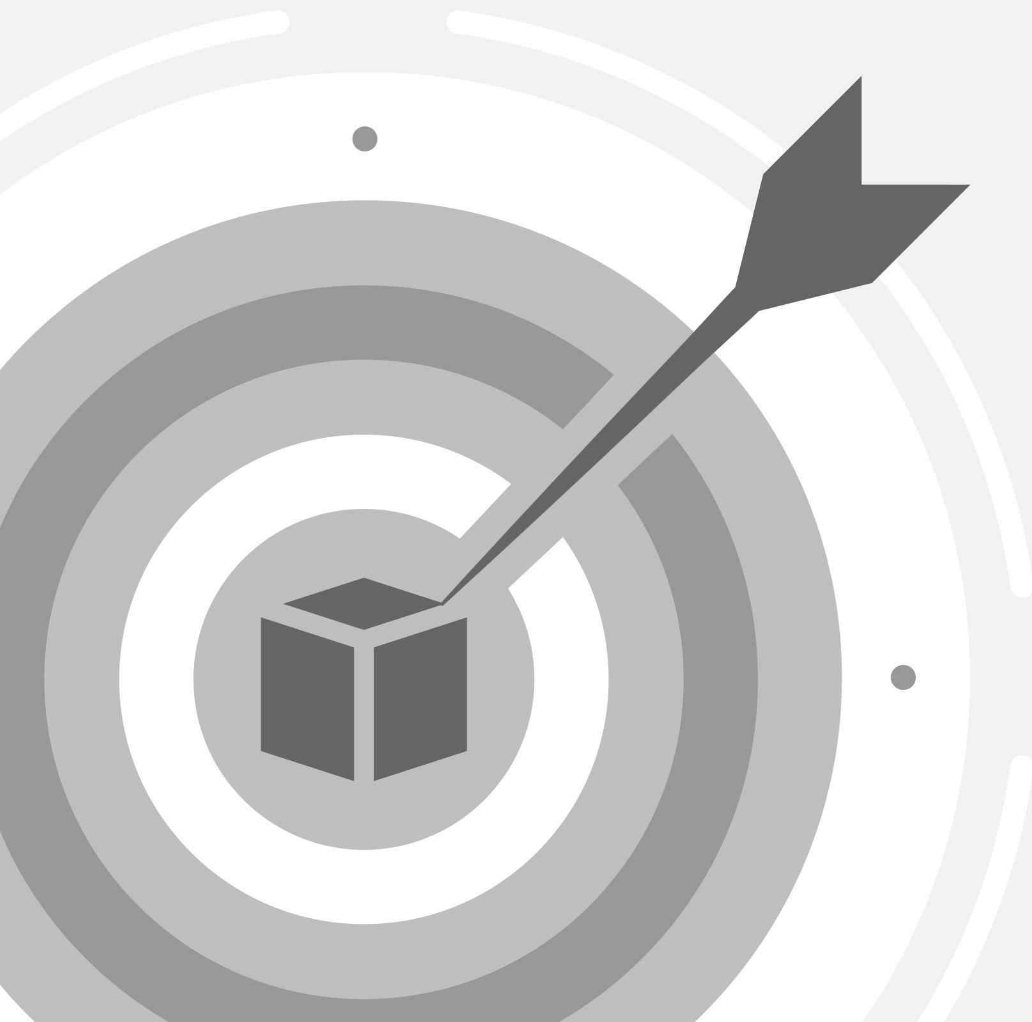
$|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은? [4점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

MEMO

Ⅱ

수학Ⅱ



25

2023학년도 사관학교 12번

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \leq 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x \to \alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{4}$

26

2023학년도 평가원 6월 22번

두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

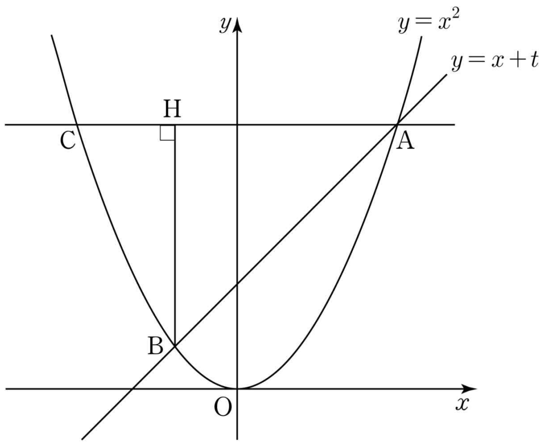
27

2023학년도 평가원 9월 12번

실수 $t\ (t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5



28

EBS 수완 변형 문제

정의역이 실수 전체의 집합이고, $f(0)=a$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구간 $(0,\ \infty)$에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (0<x<1) \\ x & (1\le x<2) \\ 1 & (x=2) \\ x-2 & (2<x<4) \\ x-4 & (x\ge 4) \end{cases}$$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.

함수 $f(f(x))$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 서로 다른 모든 a의 개수를 구하시오. [4점]

29

EBS 수완 변형 문제

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x+k & (x \le 1) \\ x+3 & (x > 1) \end{cases}$$

일 때, 함수 $|f(x)|f(2-x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

30

2022년 시행 교육청 4월 20번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시킨다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t = \alpha$, $t = 8$에서 불연속이다. $\alpha^2 \times f(4)$의 값을 구하시오.
(단, α는 $0 < \alpha < 8$인 상수이다.) [4점]

31

2022년 시행 교육청 3월 12번

$a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [4점]

(가) $x \neq 1$, $x \neq a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다. (나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

32

EBS 수완 변형 문제

함수 $f(x)=x^3-8$에 대하여 방정식 $f(x^3)=f(20-3x)$가 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근이 열린구간 $(n,\ n+1)$에 속할 때, 자연수 n의 값을 구하시오. [4점]

33

2023학년도 사관학교 14번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34

2022년 시행 교육청 4월 14번

정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

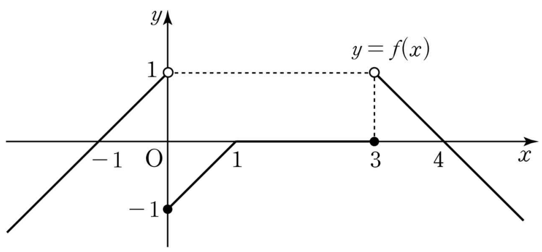
〈보 기〉

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



35

2023학년도 평가원 6월 8번

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

36

2022년 시행 교육청 3월 10번

두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\ \ g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1　　② $\frac{9}{8}$　　③ $\frac{5}{4}$　　④ $\frac{11}{8}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

37

2023학년도 평가원 9월 22번

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

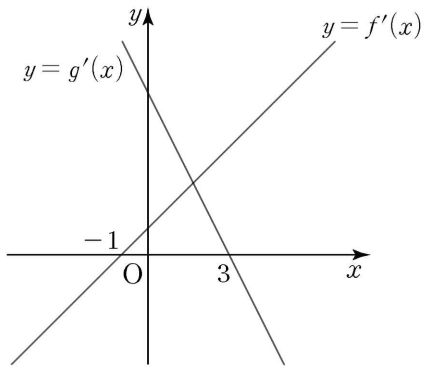
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

38

EBS 수완 변형 문제

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 직선 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$는 그림과 같고, $f(-1)=g(3)=0$이다.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 두 직선 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 y절편은 각각 양수이고, $f'(-1)=g'(3)=0$이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $2f(x)+g(x)$는 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극대이다.
ㄷ. 함수 $h(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{f(x)}} & (x \neq -1) \\ 0 & (x=-1) \end{cases}$는 $x=-1,\ 3$에서 극대이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39

2022년 시행 교육청 3월 14번

두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\ \ g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

40

EBS 수완 변형 문제

실수 a와 양수 b에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+n$이 실수 n의 값에 관계없이 한 점에서만 만나도록 하는 실수 m의 최댓값은 -2이다.

(나) 실수 k에 대하여 곡선 $y=|f(x)|$과 함수 $y=|x-k|$의 그래프의 교점의 개수를 $g(k)$라 할 때, $\lim_{k \to 0-} g(k)-g(0)=g(0)-\lim_{k \to 0+} g(k)=1$이다.

41

EBS 수완 변형 문제

최고차항의 계수가 -2인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a \geq -1$인 모든 실수 a에 대하여 $\int_{2}^{a} f'(x)dx \leq 0$이다.
(나) $b \geq -1$인 모든 실수 b에 대하여 $\int_{-1}^{b} f'(x)dx \leq 0$이다.

$f(x)$의 극댓값이 9일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 1 ② 6 ③ 11 ④ 16 ⑤ 21

42

EBS 수완 변형 문제

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x |f(t)|dt = x^3 + (a-1)x + 3a + \int_1^2 f(t)dt$$

를 만족시킨다. 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않을 때, $a-f(4)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

43

2022년 시행 교육청 4월 13번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_{1}^{x} (x-t)f(t)dt = 3$$

을 만족시킬 때, $\int_{1}^{2} (4x+1)f(x)dx$의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

44

2023학년도 평가원 6월 14번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45

2022년 시행 교육청 3월 22번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x\|g(x)\| = \int_{2a}^{x} (a-t)f(t)dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

46

2023학년도 평가원 9월 20번

상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\ \ g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

47

2023학년도 평가원 6월 20번

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

48

2023학년도 평가원 9월 14번

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

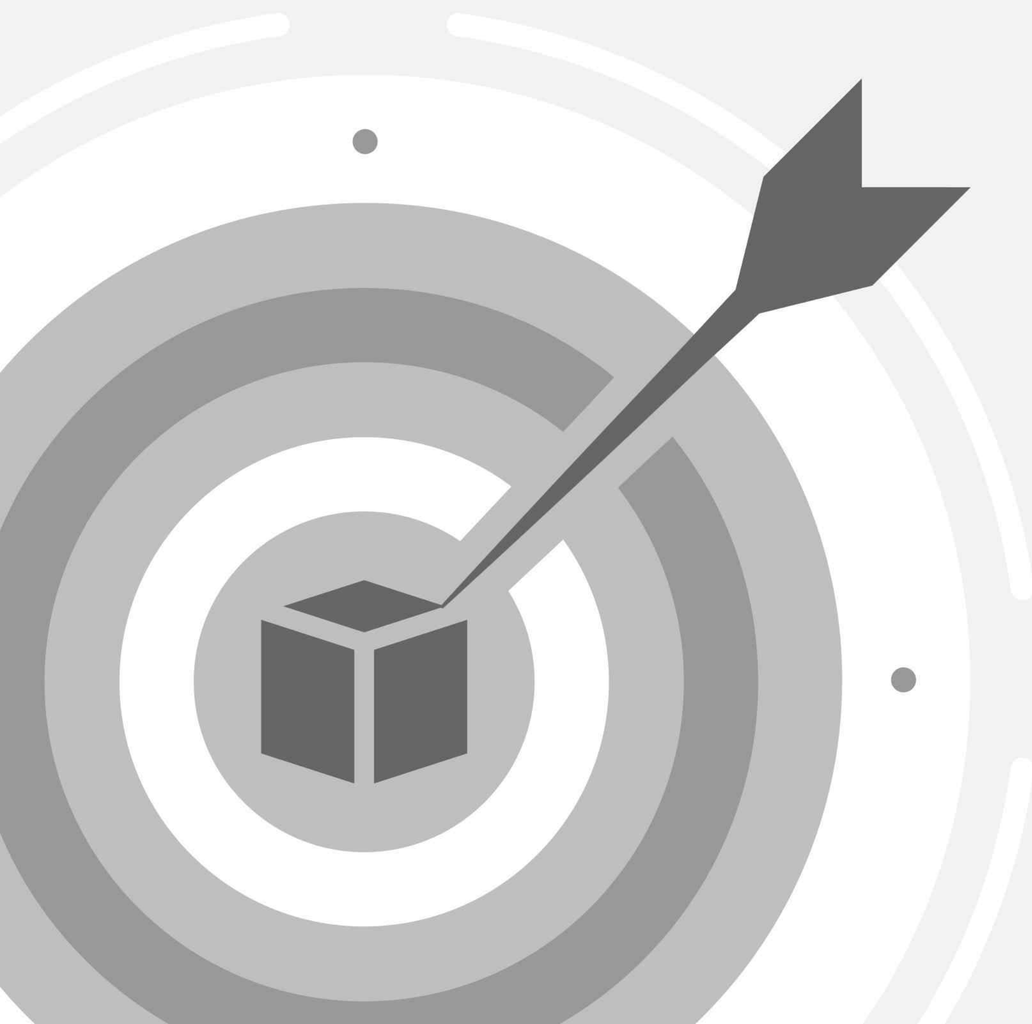
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

MEMO

III
확률과 통계



01

2022년 시행 교육청 3월 확통 28번

세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다. (나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

02

2023학년도 평가원 9월 확통 30번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$와 함수 $f:X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $n(A) \leq 3$
> (나) $n(A)=n(B)$
> (다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

03

2023학년도 평가원 6월 확통 29번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(f(1))=4$
> (나) $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$

04

EBS 수완 변형 문제

$3a+2b+6c+6d^2=72$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

[4점]

05

2023학년도 평가원 6월 확통 26번

다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

06

EBS 수완 변형 문제

1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b라 할 때, $11a-b$의 값이 5의 배수인 자연수일 확률은? [4점]

① $\frac{4}{33}$ ② $\frac{17}{132}$ ③ $\frac{3}{22}$ ④ $\frac{19}{132}$ ⑤ $\frac{5}{33}$

07

2023학년도 평가원 6월 확통 28번

숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

08

2023학년도 평가원 9월 확통 28번

1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

09

2023학년도 평가원 6월 확통 30번

주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \geq 5$일 때, $c-a \geq 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

10

EBS 수완 변형 문제

1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 12장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 4 이하인 사건을 A, $1 \le p \le 4 < q \le 12$인 두 자연수 p, q에 대하여 나오는 눈의 수가 p 이하이거나 q 이상인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$에 대하여 서로 다른 모든 $p+q$의 값의 합을 구하시오. [4점]

11

EBS 수완 변형 문제

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	$2a$	$4a$	$6a$	$8a$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	a	b	1

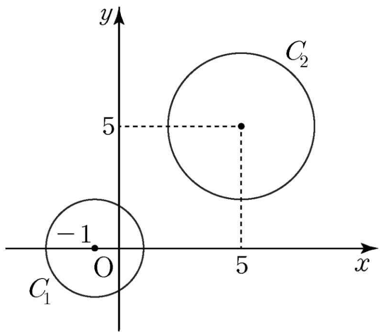
$3a \leq X \leq 7a$인 사건과 $X \geq 5a$인 사건이 서로 독립일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{8}$　② $\frac{15}{8}$　③ $\frac{17}{8}$　④ $\frac{19}{8}$　⑤ $\frac{21}{8}$

12

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 좌표평면에 중심이 $(-1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_1과 중심이 $(5,\ 5)$이고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다.



동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 원 C_1을 x축의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 원 C_1을 y축의 방향으로 1만큼 이동한다. 동전을 6번 던지고 난 후 이동한 원 C_1이 원 C_2와 만나는 점의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13

EBS 수완 변형 문제

두 자연수 m_1, m_2에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1,\ {\sigma_1}^2\right)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2,\ {\sigma_2}^2\right)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le a+1)$의 최댓값과 $\mathrm{P}(b \le Y \le b+1)$의 최댓값은 같다. (나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(10)$의 교점의 개수는 1이다.

$f(1)=g(9)$일 때, m_1+m_2의 값을 구하시오. [4점]

14

2023학년도 평가원 9월 확통 27번

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

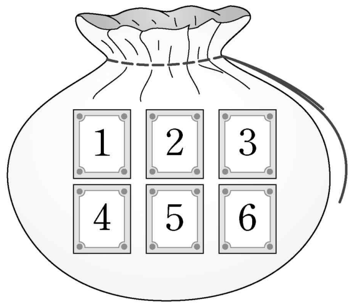
$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

15

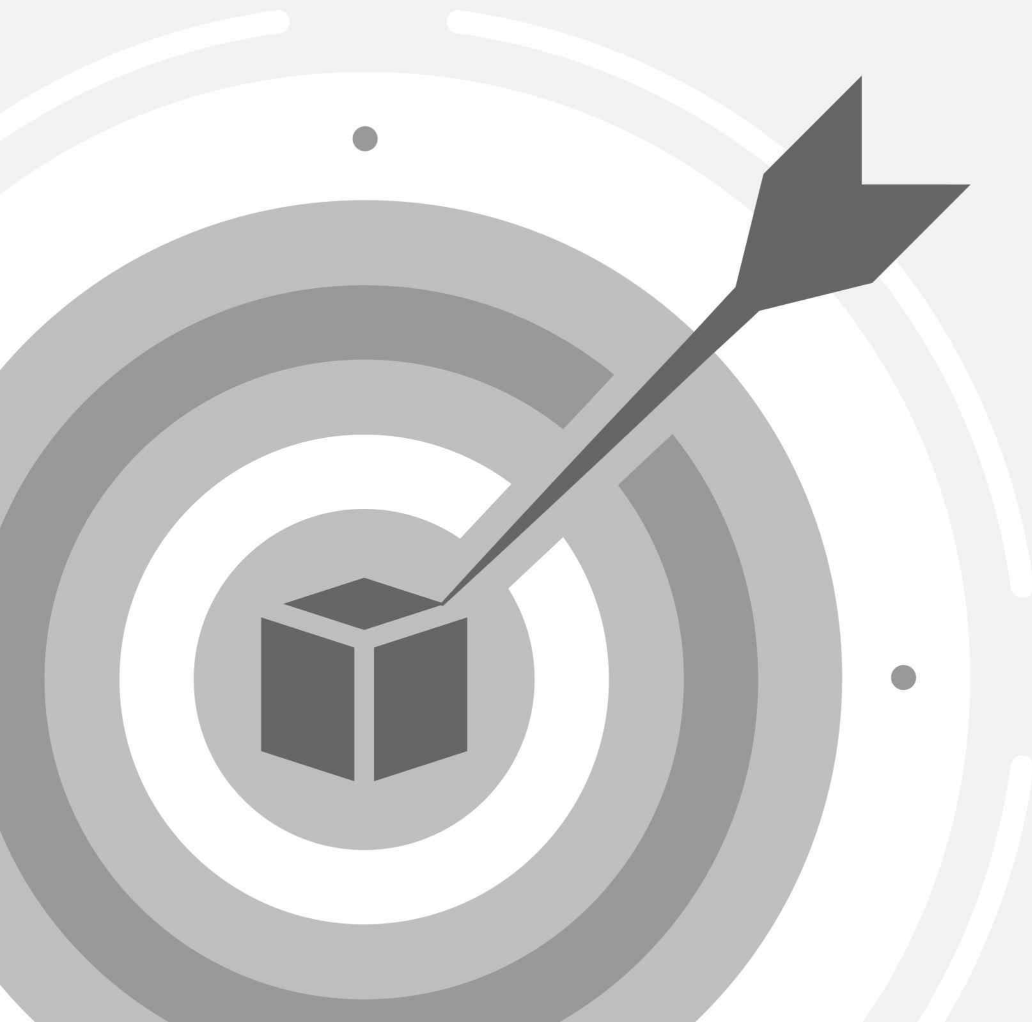
2023학년도 평가원 9월 확통 29번

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



IV

미적분



01

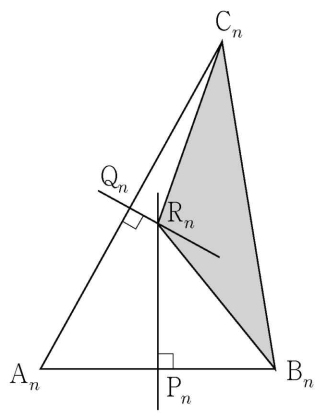
EBS 수완 변형 문제

2가 아닌 양의 상수 p와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(2^n+p^n)a_n=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2^n+p^{n+3})a_{n+1}=25$이다. $36p$의 값을 구하시오. [4점]

02

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=2n$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=3n$이고 $\angle \mathrm{C}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$이 있다. 두 선분 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}$의 수직이등분선이 만나는 점을 R_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{R}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3n^2+n+2}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



03

2022년 시행 교육청 3월 미적분 29번

실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_m (m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오. [4점]

04

2022년 시행 교육청 3월 미적분 30번

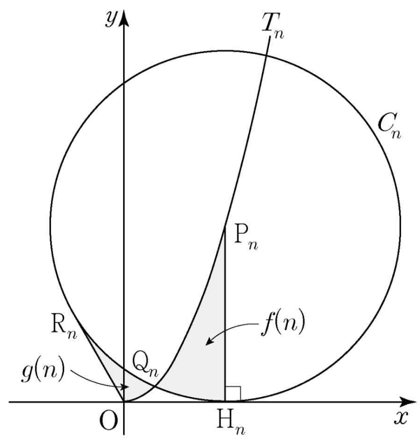
그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y = \frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2 \ (x \geq 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.

점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2} = \frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]



05

EBS 수완 변형 문제

$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{10}\sqrt{4n^2+kn}-20n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{2}$　② $\frac{105}{8}$　③ $\frac{55}{4}$　④ $\frac{115}{8}$　⑤ 15

06

2023학년도 평가원 9월 미적분 27번

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자.

$\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\dfrac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$,

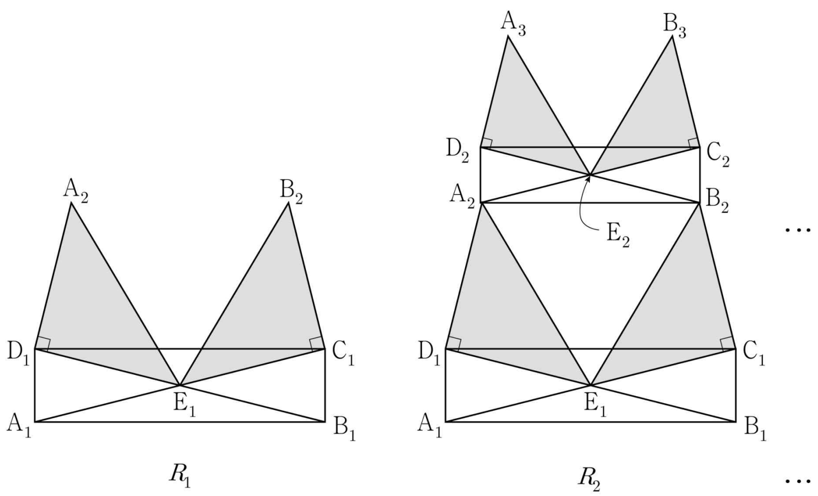
$\angle B_2C_1E_1=\dfrac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다.

두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◸◹ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.

그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◸◹ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

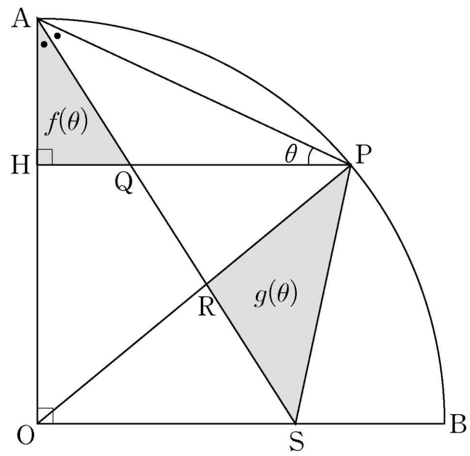


① $\dfrac{68}{5}$　② $\dfrac{34}{3}$　③ $\dfrac{68}{7}$　④ $\dfrac{17}{2}$　⑤ $\dfrac{68}{9}$

07

2023학년도 평가원 6월 미적분 29번

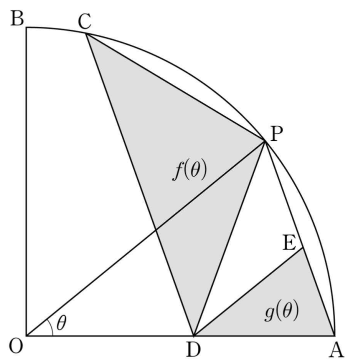
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



08

2023학년도 평가원 9월 미적분 28번

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

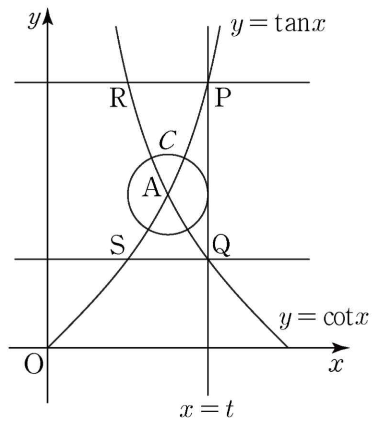


① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

09

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 두 함수 $y=\tan x$, $y=\cot x$의 그래프가 직선 $x=t$ $\left(\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\right)$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\cot x$의 그래프와 만나는 점을 R, 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\tan x$의 그래프와 만나는 점을 S라 하자. 직사각형 PRSQ의 넓이를 $f(t)$라 하고, 두 함수 $y=\tan x$, $y=\cot x$의 그래프가 만나는 점 A를 중심으로 하고 직선 $x=t$와 접하는 원 C의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \frac{\pi}{4}+} \frac{g(t)}{f(t)}$의 값은? (단, $0<x<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{\pi}{16}$　② $\frac{\pi}{8}$　③ $\frac{\pi}{4}$　④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ π

10

2023학년도 평가원 6월 미적분 28번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

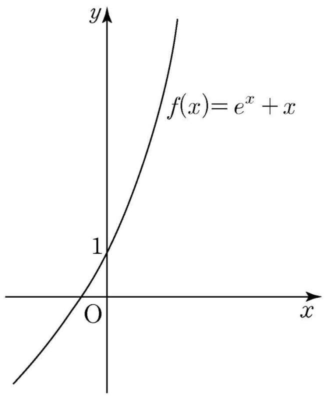
(가) 함수 $g(x)$는 $x \neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $\lvert g(x)\rvert$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

11

2023학년도 평가원 9월 미적분 29번

함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



12

2023학년도 평가원 6월 미적분 30번

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

13

EBS 수완 변형 문제

자연수 n에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} |x-3n|-n & (x \le 5n) \\ |x-7n|-n & (x > 5n) \end{cases},\ g(x)=n\sin\frac{\pi}{2n}x$$

와 수열 $\{a_n\}$이 등식

$$\int_0^{a_n}\{f(x)-g(x)\}dx = 2\int_0^{n}\{f(x)-g(x)\}dx$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{a_n}e^{\left(\frac{5k}{a_n}\right)^2}\right\}=a(e^b-1)$일 때, $100ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

14

2022년 시행 교육청 7월 미적분 28번

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=2$일 때, $\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{5}{12}\pi$　⑤ $\frac{\pi}{2}$

15

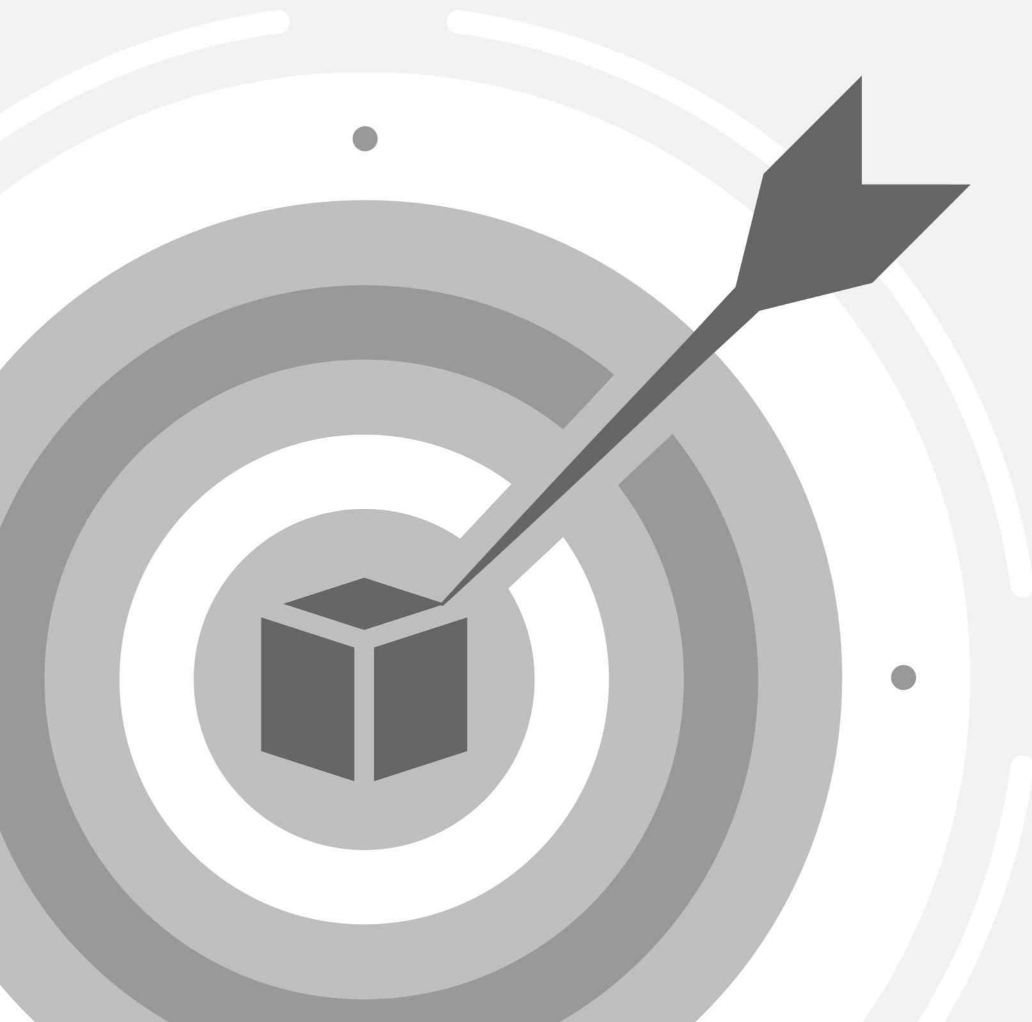
2023학년도 평가원 9월 미적분 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$이다.
(나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\displaystyle\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

V
기하



01

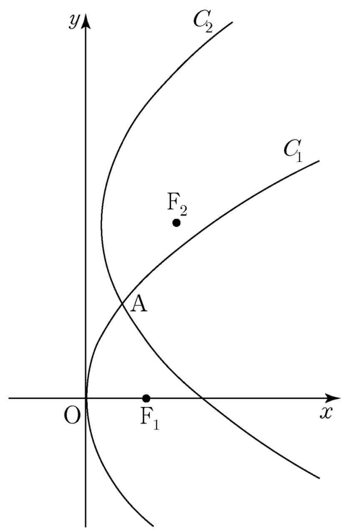
2023학년도 평가원 9월 기하 28번

실수 $p\ (p \geq 1)$과 함수 $f(x) = (x+a)^2$에 대하여 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 4x,\ \ C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x - f(p)\}$$

가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{AF}_2}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

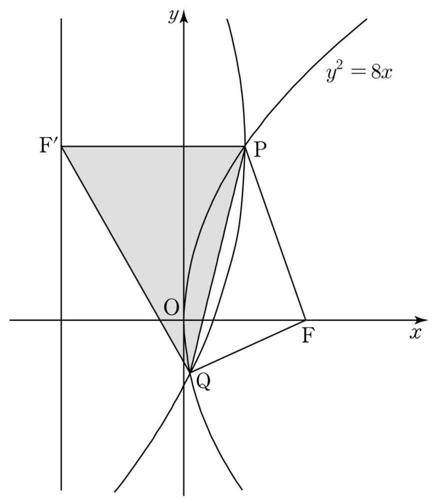
① $-\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{5}{8}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$ ④ $-\dfrac{3}{8}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$



02

2023학년도 평가원 6월 기하 29번

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

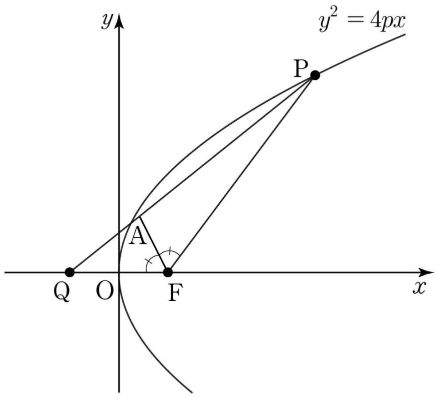


03

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 제1사분면에 점 P가 있다. 이 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 Q라 하고, $\angle\mathrm{PFQ}$의 이등분선이 선분 PQ와 만나는 점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{41}$이고, 삼각형 AFQ의 외접원의 넓이가 삼각형 PAF의 외접원의 넓이의 $\dfrac{4}{25}$배일 때, 상수 p의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 p보다 크다.) [4점]

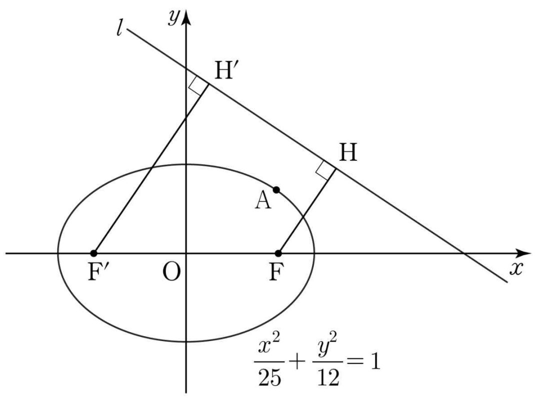
① 1 ② $\dfrac{6}{5}$ ③ $\dfrac{7}{5}$ ④ $\dfrac{8}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{5}$



04

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 중 직선 l과 거리가 가장 가까운 점을 점 A라 하고, 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하자. 점 A와 직선 l 사이의 거리가 2이고 $\overline{\mathrm{HH'}}=6$일 때, 직선 l의 x절편의 값은? (단, $\overline{\mathrm{F'A}}>\overline{\mathrm{FA}}$이고, 점 A는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



① $3\sqrt{10}$　② $3\sqrt{11}$　③ $6\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{13}$　⑤ $3\sqrt{14}$

05

2023학년도 평가원 6월 기하 28번

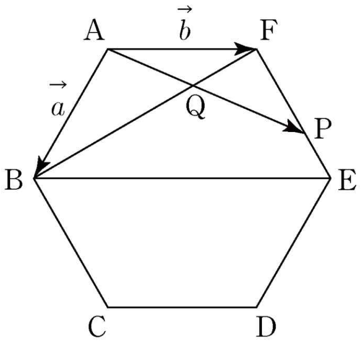
좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$ $(c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,\ 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

06

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정육각형 ABCDEF가 있다. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$라 할 때, 선분 EF 위의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$가 서로 평행하다. 선분 AP와 선분 BF가 만나는 점을 Q라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\frac{q}{p}\sqrt{19}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



07

EBS 수완 변형 문제

좌표평면에 세 점 A$(a,\ 1)$, B$(1,\ b)$, C$(2,\ -1)$이 있다.

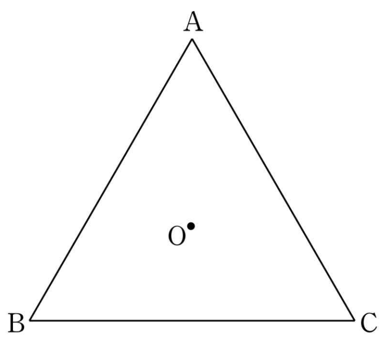
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = 6$$

을 만족시키는 직선 AB 위의 점 P의 개수가 2 이상일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

08

2022년 시행 교육청 7월 기하 29번

평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.) [4점]



09

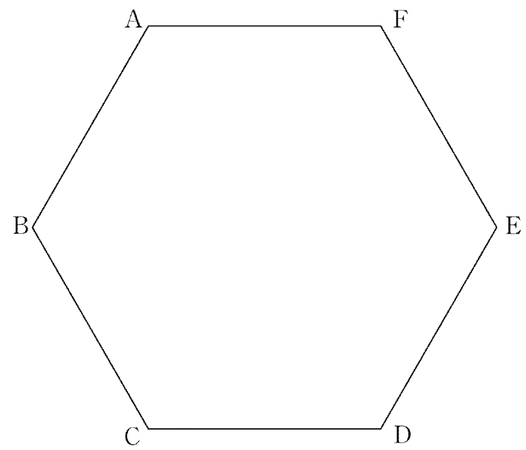
2023학년도 평가원 6월 기하 30번

좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}+2\overrightarrow{\mathrm{XD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



10

2023학년도 평가원 9월 기하 30번

좌표평면 위에 두 점 A$(-2,\ 2)$, B$(2,\ 2)$가 있다.

$$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0,\ |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\geq 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u}=(1,\ 0)$에 대하여 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u})\geq 0$이다.
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

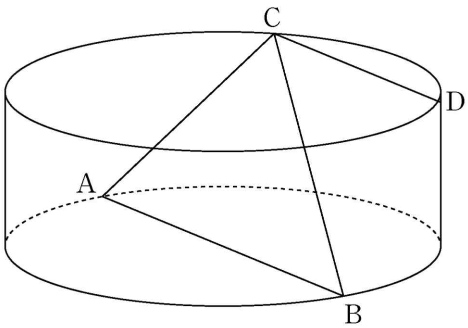
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11

2023학년도 평가원 9월 기하 27번

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는? [3점]

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다. (나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.

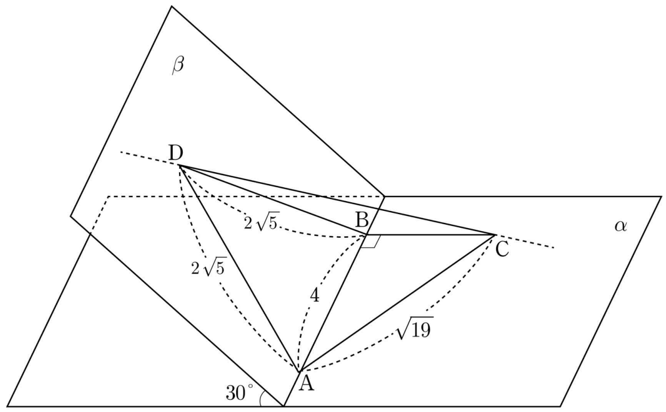


① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

12

EBS 수완 변형 문제

이면각의 크기가 30° 인 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에 $\overline{AC}=\sqrt{19}$, $\overline{AB}=4$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$를 만족시키는 점 C가 있다. 또한 평면 β 위에 $\overline{AD}=\overline{BD}=2\sqrt{5}$인 점 D가 있다. 직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin^2\theta$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{35}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{3}{35}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

13

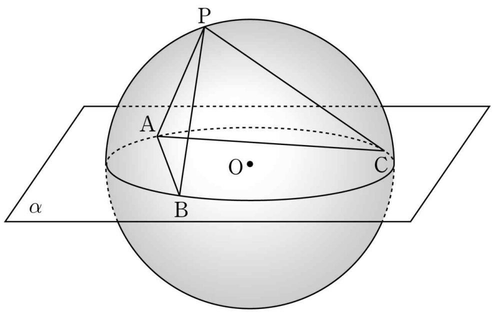
2022년 시행 교육청 7월 기하 30번

공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{PAO} = \dfrac{\pi}{3}$
(나) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle \mathrm{PAB}) = \dfrac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30 \times S^2$의 값을 구하시오.

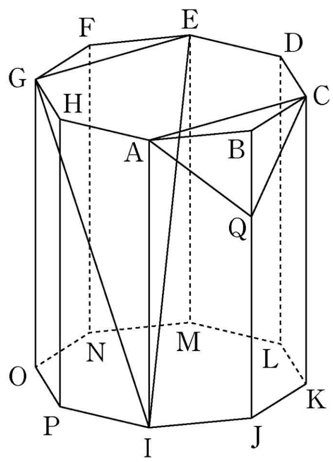
(단, $0 < \angle \mathrm{BAC} < \dfrac{\pi}{2}$) [4점]



14

EBS 수완 변형 문제

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AI}=6$인 정팔각기둥 ABCDEFGH－IJKLMNOP에서 모서리 BJ 위의 점 Q가 있다. 삼각형 AQC의 넓이를 S, 삼각형 AQC의 평면 EGI 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, $S=S'$을 만족시키는 점 Q에 대하여 선분 BQ의 길이는? [4점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $2(\sqrt{2}-1)$ ③ $3(\sqrt{2}-1)$ ④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $2(\sqrt{3}-1)$

15

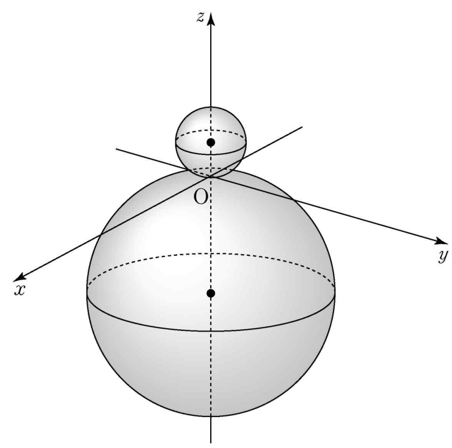
2023학년도 평가원 9월 기하 29번

좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\ S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},\ 0,\ 0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

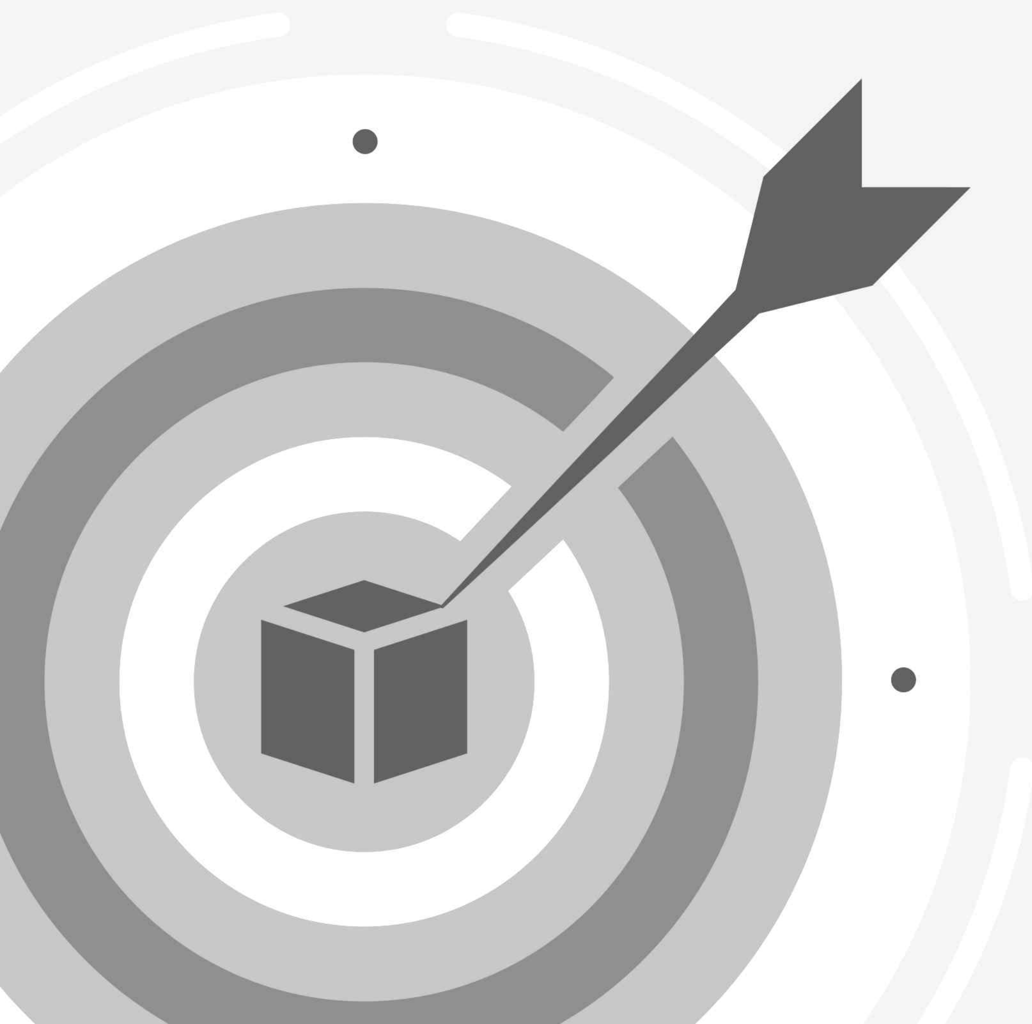
원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



끊임 없는 훈련이 **완벽한 수학 성적**을 만듭니다.

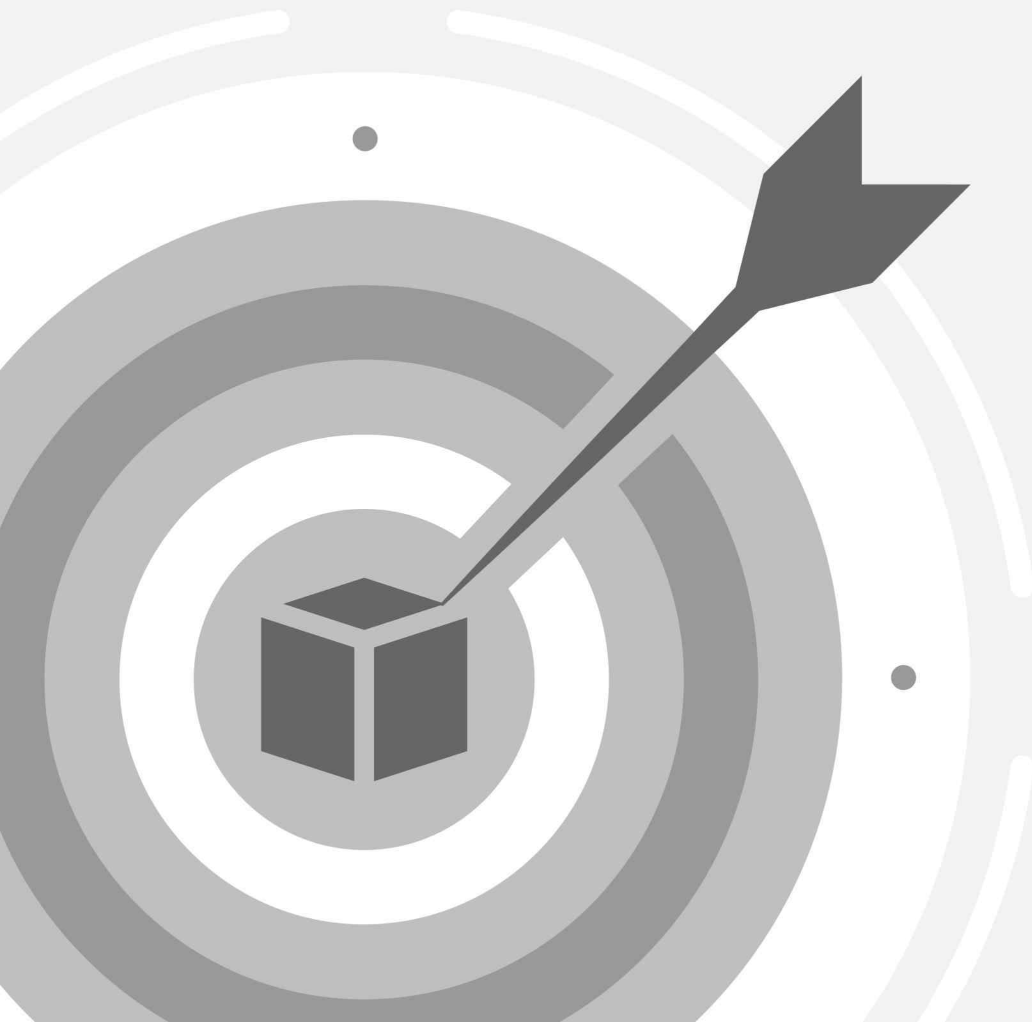
이제부터 **시작**합니다.

WORKBOOK



Ⅰ

수학 Ⅰ



01

2022년 시행 교육청 7월 19번

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

02

2022년 시행 교육청 3월 1번

$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

03

2022년 시행 교육청 4월 1번

$(27\times\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

04

2023학년도 평가원 6월 1번

$(-\sqrt{2})^4\times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05

2022년 시행 교육청 7월 1번

$3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

06

2023학년도 평가원 9월 1번

$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1
④ 4 ⑤ 16

07

2022년 시행 교육청 4월 16번

$\log_2 9 \times \log_3 16$의 값을 구하시오. [3점]

08

2022년 시행 교육청 7월 16번

$\log_3 7 \times \log_7 9$의 값을 구하시오. [3점]

09

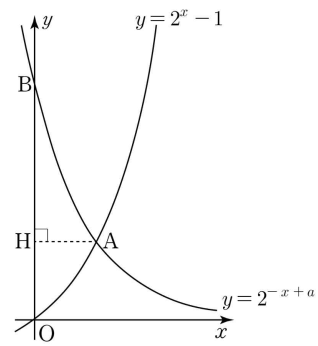
2022년 시행 교육청 3월 16번

$\dfrac{\log_5 72}{\log_5 2} - 4\log_2 \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

10

2022년 시행 교육청 4월 9번

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^x-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자.
점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$이다. 상수 a의 값은?
(단, O는 원점이다.) [4점]



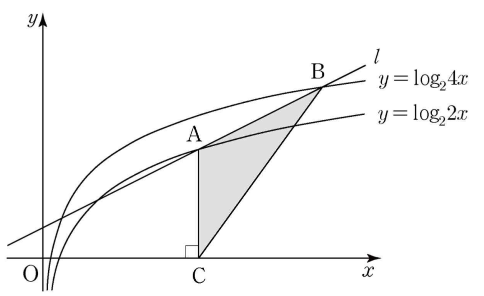
① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$
④ $\log_2 7$ ⑤ 3

11

2022년 시행 교육청 7월 11번

기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는? [4점]

① 5　② $\frac{21}{4}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{23}{4}$　⑤ 6



12

2023학년도 평가원 6월 16번

방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

13

2023학년도 평가원 9월 16번

방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

14

2022년 시행 교육청 4월 5번

부등식 $\log_2 x \le 4-\log_2(x-6)$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 15 ② 19 ③ 23 ④ 27 ⑤ 31

15

2022년 시행 교육청 3월 5번

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta\tan\theta = \frac{1}{2}$일 때,

$\cos\theta + \tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

16

2022년 시행 교육청 4월 6번

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$일 때,

$(2\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta + 2\cos\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

17

2023학년도 평가원 6월 3번

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{2}{9}$　④ $-\frac{1}{9}$　⑤ 0

18

2023학년도 평가원 9월 3번

$\sin(\pi - \theta) = \frac{5}{13}$이고 $\cos\theta < 0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$　② $-\frac{5}{12}$　③ 0　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{12}{13}$

19

2022년 시행 교육청 7월 6번

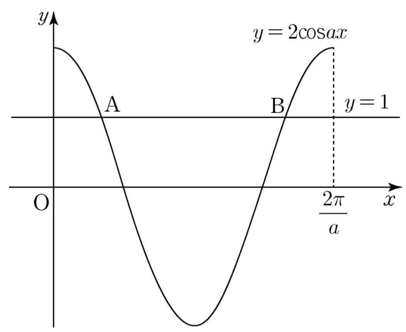
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta = \frac{4}{5}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{10}$ ② 1 ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{13}{10}$

20

2022년 시행 교육청 3월 8번

그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y = 2\cos ax \left(0 \le x \le \frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y = 1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점]



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

21

2023학년도 평가원 6월 7번

닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$　② $\frac{2}{\pi}$　③ $\frac{3}{\pi}$　④ $\frac{4}{\pi}$　⑤ $\frac{5}{\pi}$

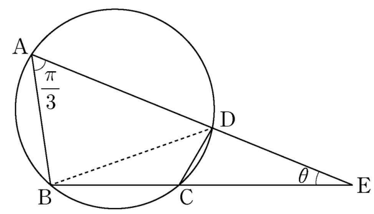
22

2022년 시행 교육청 3월 15번

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\ \overline{AD}=3,\ \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
>
> $\overline{CD}=$ (가)
>
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
>
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
>
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
>
> 이를 이용하면
>
> $\overline{ED}=$ (나)
>
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
>
> $\sin\theta=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은? [4점]

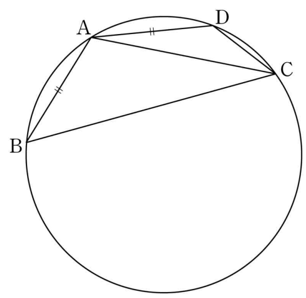
① $\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$　⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

23

2022년 시행 교육청 4월 15번

그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5 < R < 5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

- $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AD}}$이고 $\overline{\text{AC}} = 10$이다.
- 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

$\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AD}} = k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \text{ACB}) = \frac{1}{20}\left(\overline{\text{BC}} + \frac{\boxed{(가)}}{\overline{\text{BC}}}\right),$$

$$\cos(\angle \text{DCA}) = \frac{1}{20}\left(\overline{\text{CD}} + \frac{\boxed{(가)}}{\overline{\text{CD}}}\right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\cos(\angle \text{ACB}) = \cos(\angle \text{DCA})$이다.

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle \text{BAD}) + \frac{1}{2} \times \overline{\text{BC}} \times \overline{\text{CD}} \times \sin(\pi - \angle \text{BAD}) = 40$$

에서 $\sin(\angle \text{BAD}) = \boxed{(나)}$이다.

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{\text{BD}} : R = \boxed{(다)} : 1$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\dfrac{f(10p)}{q}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{25}{2}$ ② 15 ③ $\dfrac{35}{2}$ ④ 20 ⑤ $\dfrac{45}{2}$

24

2022년 시행 교육청 3월 3번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_4 = 6,\ 2a_7 = a_{19}$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25

2023학년도 평가원 9월 5번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5,\ a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

26

2022년 시행 교육청 3월 13번

첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$　② $\frac{33}{5}$　③ 7　④ $\frac{37}{5}$　⑤ $\frac{39}{5}$

27

2022년 시행 교육청 7월 2번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$일 때, a_5의 값은? [2점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

28

2022년 시행 교육청 4월 4번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 1$, $a_5 = 2(a_3)^2$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

29

2023학년도 평가원 6월 5번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

30

2022년 시행 교육청 3월 18번

부등식 $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} < \sum_{k=1}^{n} (2k-1) < \sum_{k=1}^{5} \left(2 \times 3^{k-1}\right)$을

만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[3점]

31

2022년 시행 교육청 4월 8번

공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 = b_1,\ \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=1}^{8} b_n = 160$$

일 때, $a_3 + b_3$의 값은? [3점]

① 9 ② 12 ③ 15

④ 18 ⑤ 21

32

2023학년도 평가원 9월 18번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

33

2023학년도 평가원 6월 18번

$\sum_{k=1}^{10} (4k+a) = 250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[3점]

34

2022년 시행 교육청 7월 7번

첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n < 0) \\ -2a_n + 1 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10} + a_{20}$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

35

2022년 시행 교육청 4월 12번

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \leq n \leq 4$인 모든 자연수 n에 대하여
$a_n + a_{n+4} = 15$이다.
(나) $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1} - a_n = n$이다.

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$일 때, a_5의 값은? [4점]

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

36

2022년 시행 교육청 7월 12번

첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}=S_n$$

이 성립할 때, a_{10}의 값을 구하는 과정이다.

> $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}\end{aligned}$$
>
> 이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n\ (n\ge 2)$
>
> 이다.
>
> $S_1=a_1$에서 $3S_1=3a_1$이므로
>
> $3S_n=(n+2)\times a_n\ (n\ge 1)$
>
> 이다.
>
> $$\begin{aligned}3a_n&=3(S_n-S_{n-1})\\&=(n+2)\times a_n-(\boxed{(가)})\times a_{n-1}\ (n\ge 2)\end{aligned}$$
>
> $$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{(나)}\ (n\ge 2)$$
>
> 따라서
>
> $$\begin{aligned}a_{10}&=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}\\&=\boxed{(다)}\end{aligned}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$의 값은?

[4점]

① 109 ② 112 ③ 115
④ 118 ⑤ 121

37

2022년 시행 교육청 3월 20번

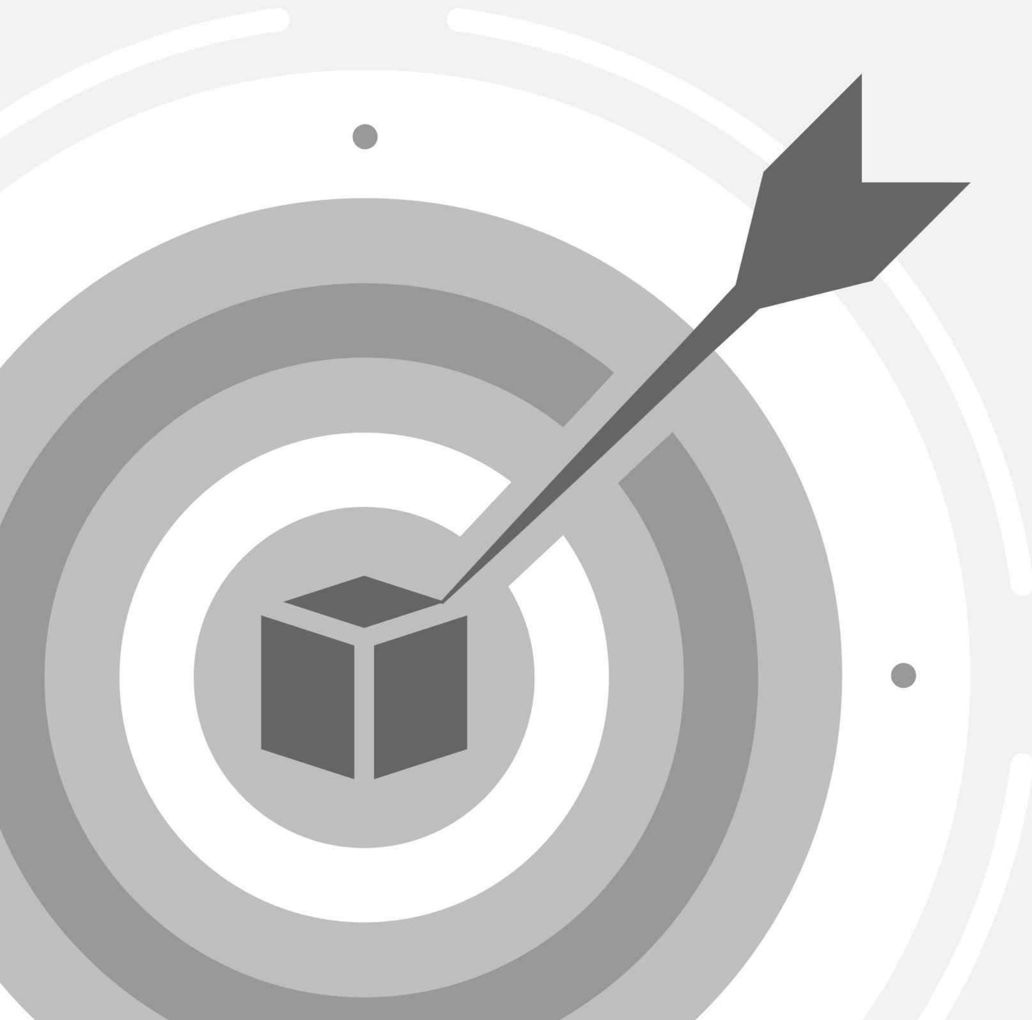
수열 $\{a_n\}$은 $1<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\ge 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7=-1$일 때, $40\times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

Ⅱ

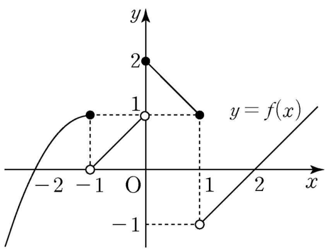
수학 Ⅱ



01

2022년 시행 교육청 3월 4번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



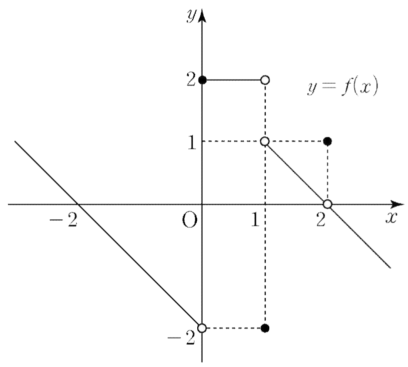
$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

02

2023학년도 평가원 6월 4번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



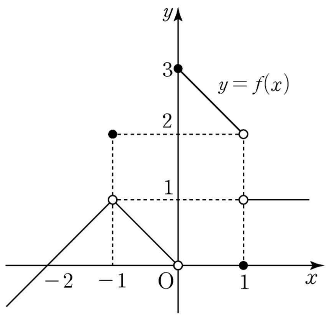
$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

03

2022년 시행 교육청 7월 4번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

04

2022년 시행 교육청 4월 3번

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}$ 의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

05

2022년 시행 교육청 7월 8번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

06

2023학년도 평가원 6월 6번

두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ x & (-1\le x<3) \\ bx-2 & (x\ge 3)\end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

07

2022년 시행 교육청 7월 5번

함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

08

2023학년도 평가원 9월 4번

함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x \leq a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

09

2023학년도 평가원 6월 2번

함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

10

2023학년도 평가원 9월 2번

함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

11

2022년 시행 교육청 3월 6번

함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

12

2022년 시행 교육청 4월 7번

$f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

13

2022년 시행 교육청 3월 2번

함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$에 대하여 $f'(-1)$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

14

2022년 시행 교육청 4월 2번

함수 $f(x)=x^3+7x-4$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

15

2022년 시행 교육청 7월 3번

함수 $f(x)=x^3+2x+7$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

16

2023학년도 평가원 9월 8번

곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

17

2023학년도 평가원 9월 6번

함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18

2023학년도 평가원 6월 19번

함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

19

2022년 시행 교육청 7월 13번

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

20

2023학년도 평가원 9월 19번

방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

21

2022년 시행 교육청 7월 22번

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)$ $(k \neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
>
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

22

2022년 시행 교육청 3월 19번

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4-4x^3-12x^2+k \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

23

2022년 시행 교육청 4월 19번

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4 - 4x^3 + 16x + a \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [3점]

24

2023학년도 평가원 6월 9번

두 함수

$$f(x) = x^3 - x + 6,\ g(x) = x^2 + a$$

가 있다. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

25

2023학년도 평가원 6월 17번

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

26

2023학년도 평가원 9월 17번

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

27

2022년 시행 교육청 7월 17번

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

28

2022년 시행 교육청 4월 18번

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

29

2022년 시행 교육청 3월 17번

$\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

30

2022년 시행 교육청 7월 9번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_{0}^{1}f'(x)dx=\int_{0}^{2}f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

31

2022년 시행 교육청 7월 20번

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

32

2022년 시행 교육청 4월 22번

양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

33

2022년 시행 교육청 7월 15번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

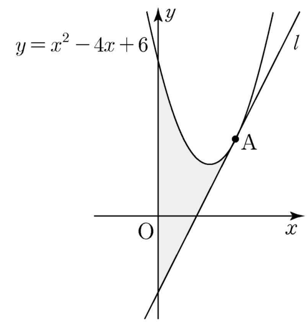
라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

34

2022년 시행 교육청 3월 7번

그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$
④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

35

2022년 시행 교육청 4월 17번

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오.

[3점]

36

2022년 시행 교육청 3월 9번

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① 64 ② 66 ③ 68
④ 70 ⑤ 72

37

2022년 시행 교육청 4월 10번

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3(t-2)(t-a) \quad (a>2\text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$의 값은? [4점]

① 27 ② 36 ③ 45
④ 54 ⑤ 63

38

2023학년도 평가원 6월 11번

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\ v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

39

2022년 시행 교육청 7월 18번

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

40

2023학년도 평가원 9월 10번

수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 t $(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at \ (a>0)$$

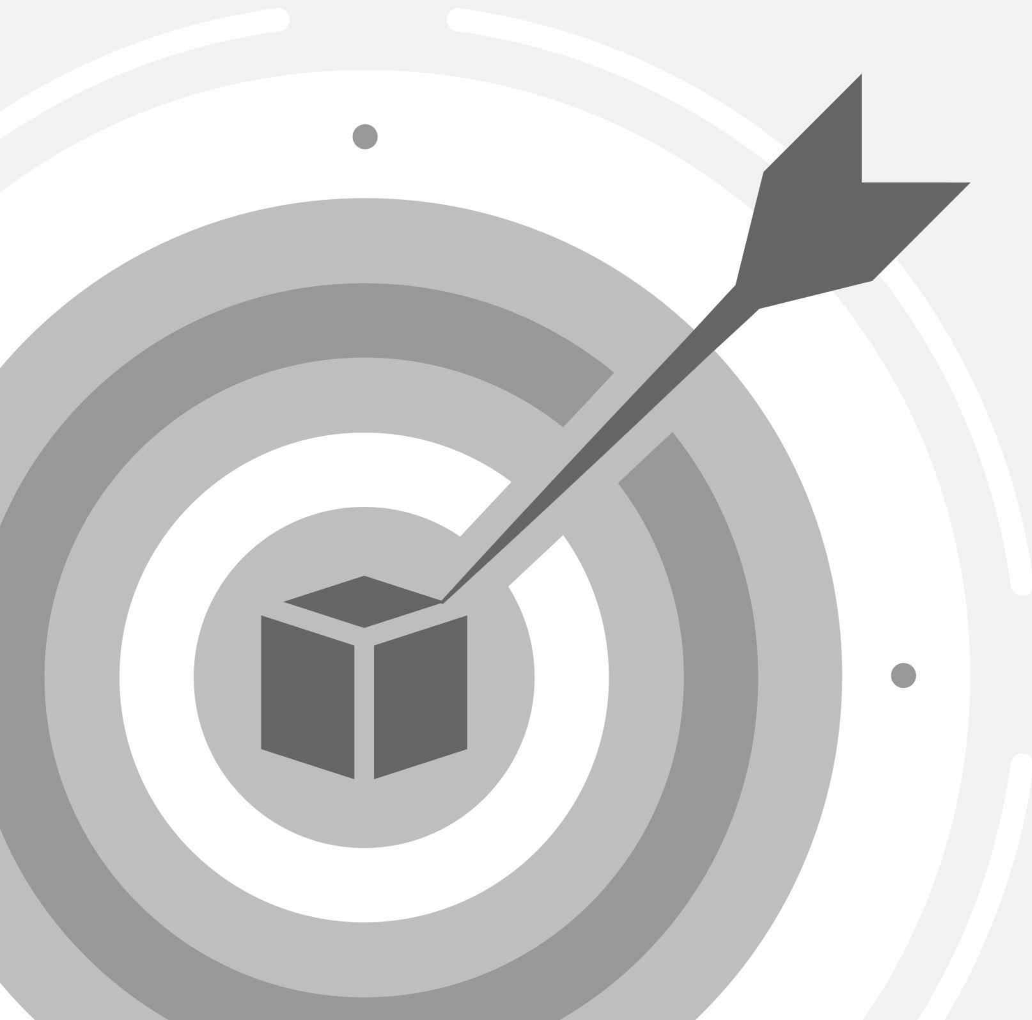
이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

MEMO

Ⅲ

확률과 통계

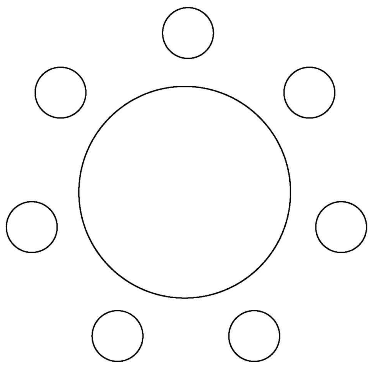


01

2022년 시행 교육청 3월 확통 25번

A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 320 ② 360 ③ 400
④ 440 ⑤ 480



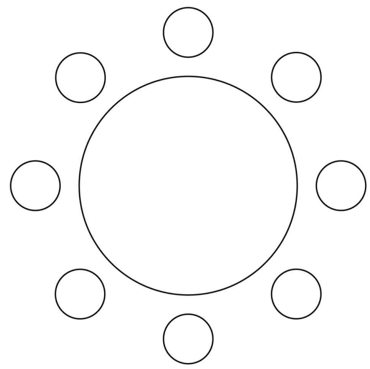
02

2022년 시행 교육청 4월 확통 26번

학생 A를 포함한 4명의 1학년 학생과 학생 B를 포함한 4명의 2학년 학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다. (나) A와 B는 이웃한다.

① 48 ② 54 ③ 60
④ 66 ⑤ 72



03

2022년 시행 교육청 3월 확통 23번

${}_{3}\Pi_{4}$의 값은? [2점]

① 63　② 69　③ 75　④ 81　⑤ 87

04

2022년 시행 교육청 4월 확통 25번

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수는? [3점]

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x\times f(x)\le 10$이다.

① 102　② 105　③ 108　④ 111　⑤ 114

05

2022년 시행 교육청 4월 확통 29번

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

06

2023학년도 평가원 6월 확통 27번

네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
(나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

07

2022년 시행 교육청 3월 확통 24번

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

08

2023학년도 평가원 6월 확통 23번

5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

09

2022년 시행 교육청 7월 확통 26번

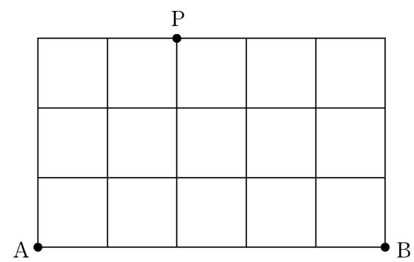
세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 135 ② 140 ③ 145
④ 150 ⑤ 155

10

2022년 시행 교육청 3월 확통 26번

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.) [3점]

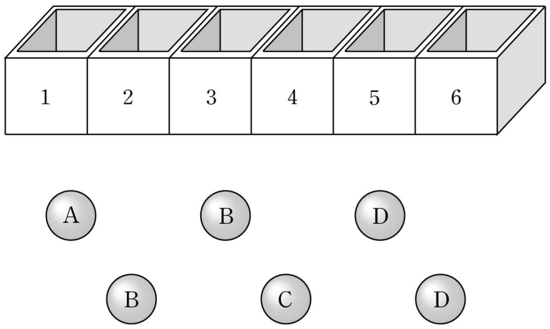


① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

11

2022년 시행 교육청 4월 확통 27번

그림과 같이 A, B, B, C, D, D의 문자가 각각 하나씩 적힌 6개의 공과 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 개의 공만 들어가도록 6개의 공을 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

(가) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공은 문자 A 또는 문자 B가 적힌 공이다. (나) 문자 B가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수 중 적어도 하나는 문자 C가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수보다 작다.

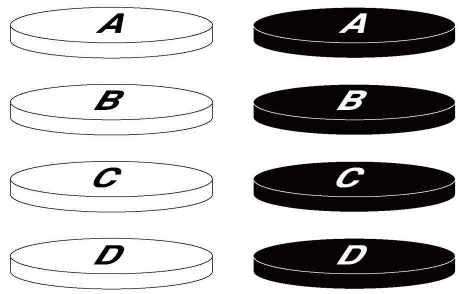
① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

12

2022년 시행 교육청 3월 확통 30번

흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다. (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



13

2022년 시행 교육청 4월 확통 30번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수이다.
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

14

2022년 시행 교육청 4월 확통 23번

${}_n\mathrm{H}_2 = {}_9\mathrm{C}_2$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

15

2022년 시행 교육청 4월 확통 28번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는? [4점]

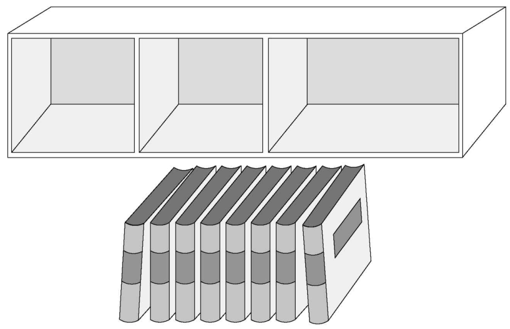
> (가) $a+b+c+d+e=10$
> (나) $|a-b+c-d+e| \leq 2$

① 359　② 363　③ 367　④ 371　⑤ 375

16

2022년 시행 교육청 3월 확통 27번

그림과 같이 같은 종류의 책 8권과 이 책을 각 칸에 최대 5권, 5권, 8권을 꽂을 수 있는 3개의 칸으로 이루어진 책장이 있다. 이 책 8권을 책장에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는?
(단, 비어 있는 칸이 있을 수 있다.) [3점]



① 31　② 32　③ 33　④ 34　⑤ 35

17

2022년 시행 교육청 3월 확통 29번

두 집합

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$
> (나) $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

18

2022년 시행 교육청 7월 확통 28번

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

> (가) $\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$ 의 값은 자연수이다.
> (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

① 84 ② 87 ③ 90 ④ 93 ⑤ 96

19

2022년 시행 교육청 4월 확통 24번

3 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같을 때, n의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

20

2022년 시행 교육청 7월 확통 23번

다항식 $(4x+1)^6$의 전개식에서 x의 계수는? [2점]

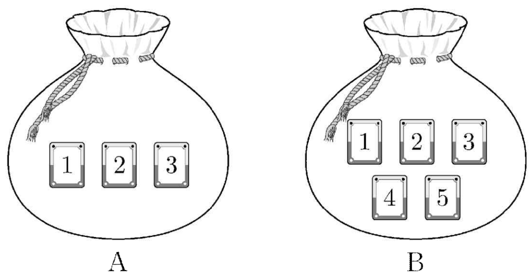
① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

21

2023학년도 평가원 6월 확통 24번

주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

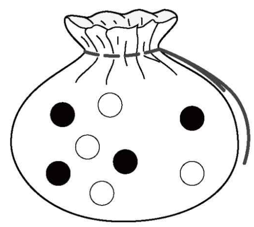


22

2022년 시행 교육청 7월 확통 25번

흰 공 4개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{51}{70}$ ③ $\frac{53}{70}$
④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{57}{70}$



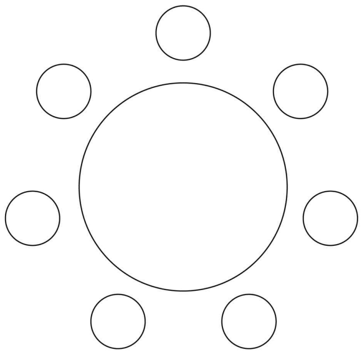
23

2023학년도 평가원 9월 확통 26번

세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



24

2023학년도 평가원 9월 확통 24번

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(A\mid B)=\mathrm{P}(B\mid A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

25

2022년 시행 교육청 7월 확통 30번

각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, $n\ (1 \le n \le 6)$번째에 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자.

$a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때, $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

26

2023학년도 평가원 6월 확통 25번

수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상의 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

27

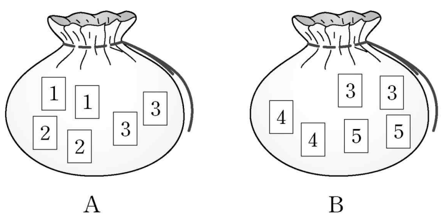
2022년 시행 교육청 7월 확통 27번

주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 3, 3, 4, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 3개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3이면 주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고, 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하이면 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{31}{120}$ ④ $\frac{17}{60}$ ⑤ $\frac{37}{120}$



28

2022년 시행 교육청 7월 확통 24번

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(3X-1)=17$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

29

2022년 시행 교육청 7월 확통 29번

두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0 \le X \le a$, $0 \le Y \le a$이고, X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자.
$0 \le x \le a$인 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)=b,\ g(x)=\mathrm{P}(0 \le X \le x)$$

이다. $\mathrm{P}(0 \le Y \le c)=\dfrac{1}{2}$일 때, $(a+b)\times c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

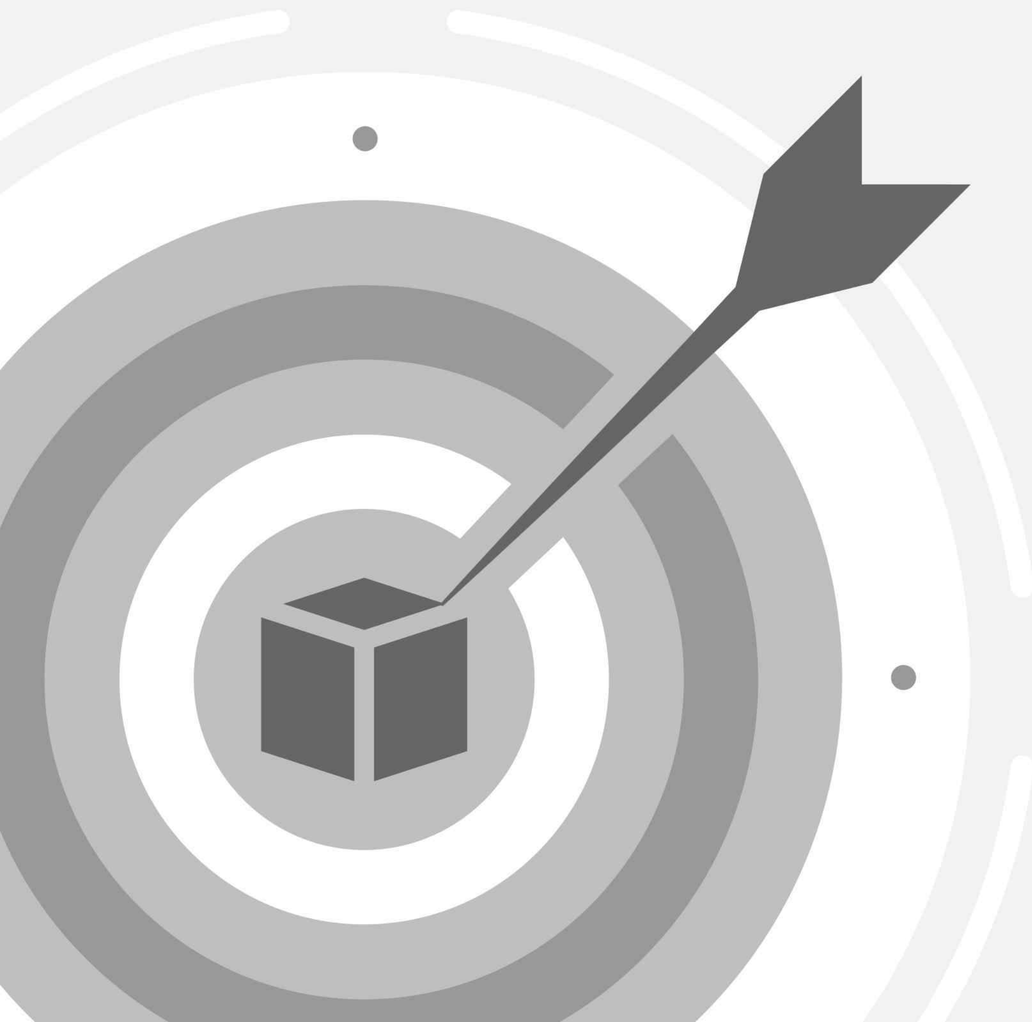
30

2023학년도 평가원 9월 확통 25번

어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은?
(단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20
④ 20.25 ⑤ 20.5

Ⅳ
미적분



01

2022년 시행 교육청 3월 미적분 24번

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n \to \infty}(3a_n - 5n) = 2$를 만족시킬 때,

$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

02

2023학년도 평가원 9월 미적분 25번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + 2}{2} = 6$일 때,

$\lim_{n \to \infty} \frac{na_n + 1}{a_n + 2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

2022년 시행 교육청 3월 미적분 25번

$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4　④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$

04

2022년 시행 교육청 7월 미적분 23번

$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

05

2023학년도 평가원 6월 미적분 23번

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

06

2022년 시행 교육청 3월 미적분 26번

첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

07

2022년 시행 교육청 3월 미적분 28번

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) A_1은 원점이다.
> (나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
> (다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{7}{4}$　③ 2　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{5}{2}$

08

2022년 시행 교육청 3월 미적분 27번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n{}^2 < 4na_n + n - 4n^2$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

09

2022년 시행 교육청 3월 미적분 23번

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1

④ 3　⑤ 9

10

2022년 시행 교육청 4월 미적분 26번

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① -6　② -5　③ -4

④ -3　⑤ -2

11

2022년 시행 교육청 4월 미적분 27번

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-2nx-2n$이 직선 $y=x+1$과 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{7}{30}$

12

2023학년도 평가원 6월 미적분 27번

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

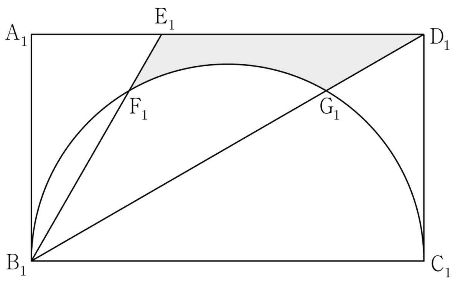
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13

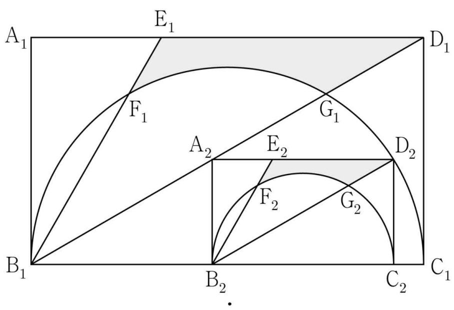
2022년 시행 교육청 4월 미적분 28번

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원의 호 B_1C_1이 두 선분 B_1E_1, B_1D_1과 만나는 점 중 점 B_1이 아닌 점을 각각 F_1, G_1이라 하자. 세 선분 F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 호 G_1C_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$
② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$
③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$
④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$
⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

14

2023학년도 평가원 6월 미적분 26번

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고

$\angle A_1B_1A_2=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의

외접원 O_1이 있다.

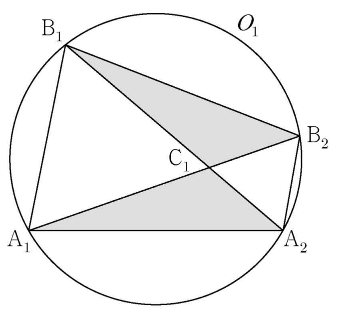
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⋞ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⋞ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

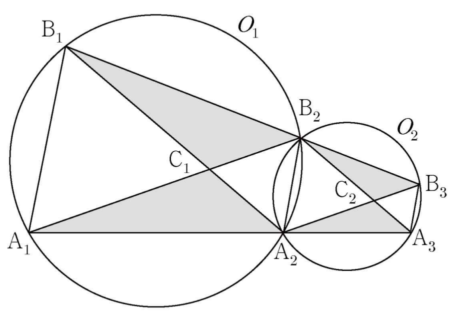
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{13\sqrt{3}}{9}$ ④ $\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

15

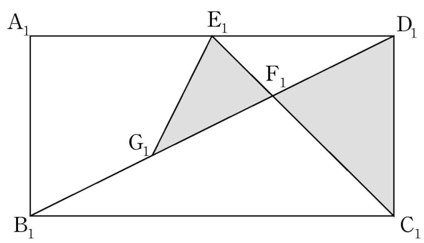
2022년 시행 교육청 7월 미적분 27번

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

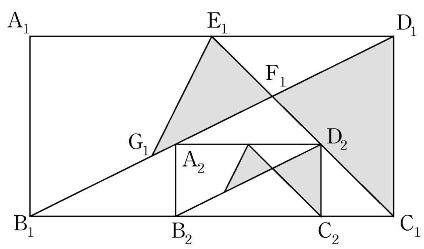
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{23}{42}$ ② $\dfrac{25}{42}$ ③ $\dfrac{9}{14}$

④ $\dfrac{29}{42}$ ⑤ $\dfrac{31}{42}$

16

2023학년도 평가원 9월 미적분 23번

$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$　② 1　③ $2\ln 2$
④ 2　⑤ $3\ln 2$

17

2022년 시행 교육청 4월 미적분 23번

함수 $f(x) = (x+a)e^x$ 에 대하여 $f'(2) = 8e^2$ 일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

18

2022년 시행 교육청 4월 미적분 25번

$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(2x^2+3x) - \ln 3x}{x}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

19

2022년 시행 교육청 4월 미적분 24번

$\sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 일 때, $\sin^2\theta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

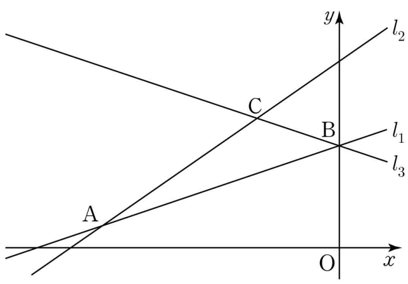
20

2022년 시행 교육청 4월 미적분 29번

그림과 같이 좌표평면 위의 제2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, $m_2(0 < m_1 < m_2 < 1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자. 직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{AC}}=9$
(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{15}{2}$이다.

$78 \times m_1 \times m_2$의 값을 구하시오. [4점]

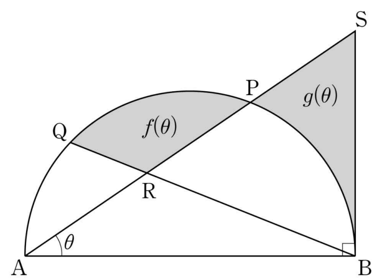


21

2022년 시행 교육청 7월 미적분 29번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle \mathrm{BAP} = \theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



22

2022년 시행 교육청 4월 미적분 30번

함수 $f(x)=a\cos x+x\sin x+b$와 $-\pi<\alpha<0<\beta<\pi$인 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

(나) $\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=c$일 때, $f\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=p+q\pi$이다. 두 유리수 p, q에 대하여 $120\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, $a<1$이다.) [4점]

23

2022년 시행 교육청 7월 미적분 25번

매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24

2023학년도 평가원 6월 미적분 24번

곡선 $x^2 - y\ln x + x = e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$
④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

25

2023학년도 평가원 6월 미적분 25번

함수 $f(x) = x^3 + 2x + 3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

26

2022년 시행 교육청 7월 미적분 26번

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

27

2022년 시행 교육청 7월 미적분 30번

최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x) = e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x) = k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k = t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.

(나) $\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6) \times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$)

[4점]

28

2022년 시행 교육청 7월 미적분 24번

$\int_{1}^{e}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_{1}^{e}\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

29

2023학년도 평가원 9월 미적분 24번

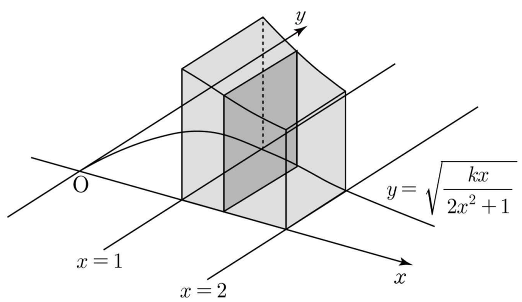
$\int_{0}^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3\pi}{2}$　④ 2π　⑤ $\frac{5\pi}{2}$

30

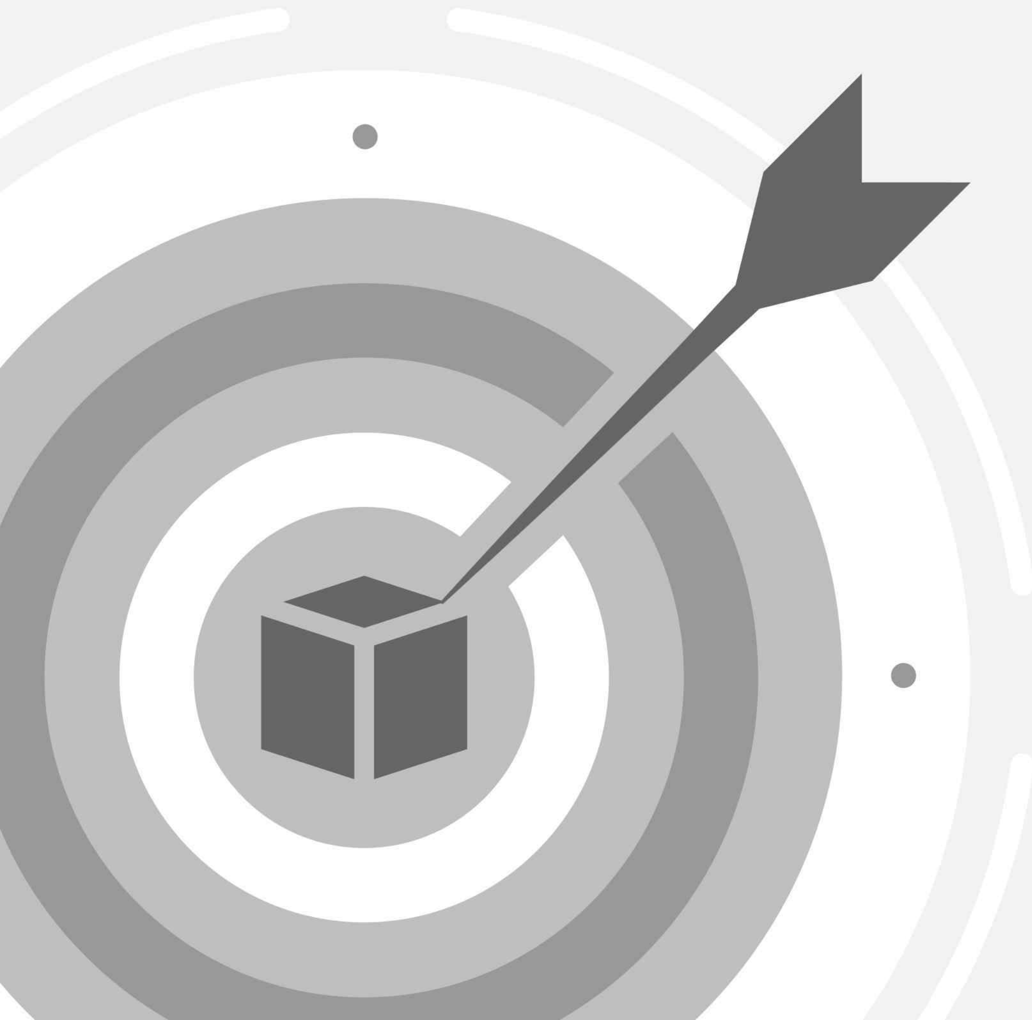
2023학년도 평가원 9월 미적분 26번

그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

V
기하



01

2022년 시행 교육청 3월 기하 23번

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P와 y축 사이의 거리가 3일 때, 선분 PF의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

02

2022년 시행 교육청 3월 기하 27번

초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 FH가 포물선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p의 값은? [3점]

> (가) 점 Q는 선분 FH를 $1:2$로 내분한다.
>
> (나) 삼각형 PQF의 넓이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

03

2022년 시행 교육청 3월 기하 30번

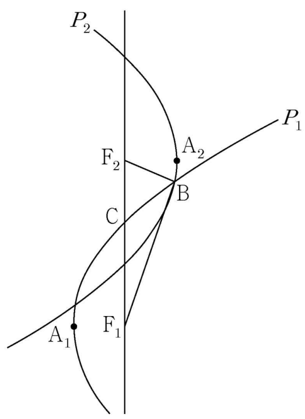
그림과 같이 꼭짓점이 A_1이고 초점이 F_1인 포물선 P_1과 꼭짓점이 A_2이고 초점이 F_2인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$와 평행하고, 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$의 중점은 서로 일치한다.

두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 A_2에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}} = 5\sqrt{5}$

(나) $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{B}} - \overline{\mathrm{F}_2\mathrm{B}} = \dfrac{48}{5}$

삼각형 $\mathrm{BF}_2\mathrm{F}_1$의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{B} < 90^\circ$) [4점]



04

2022년 시행 교육청 3월 기하 24번

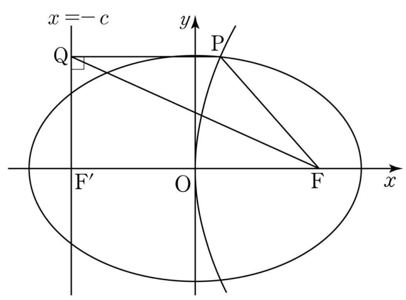
두 초점의 좌표가 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$인 타원이 y축과 점 $(0,\ 7)$에서 만날 때, 이 타원의 단축의 길이는? [3점]

① $4\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{7}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ 12 ⑤ $4\sqrt{10}$

05

2022년 시행 교육청 4월 기하 25번

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 꼭짓점이 원점 O이고 점 F를 초점으로 하는 포물선이 있다. 타원과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 직선 $x=-c$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FP}}=8$이고 삼각형 FPQ의 넓이가 24일 때, 타원의 장축의 길이는? [3점]



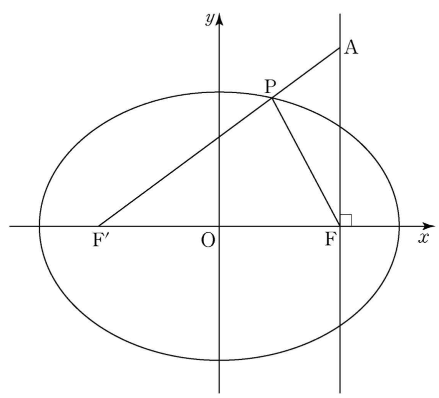
① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

06

2023학년도 평가원 9월 기하 25번

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 A가 $\overline{\mathrm{AF'}}=5$, $\overline{\mathrm{AF}}=3$을 만족시킨다. 선분 AF′과 타원이 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, a는 $a>\sqrt{5}$인 상수이다.) [3점]

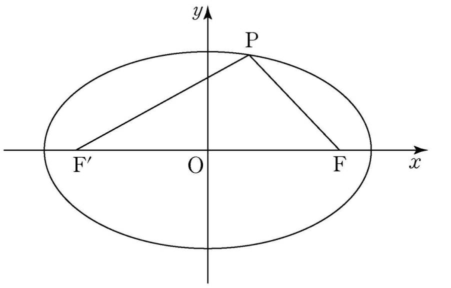
① 8 ② $\dfrac{17}{2}$ ③ 9
④ $\dfrac{19}{2}$ ⑤ 10



07

2022년 시행 교육청 3월 기하 26번

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [3점]

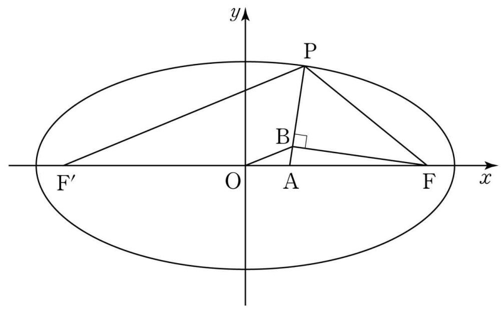


① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

08

2022년 시행 교육청 7월 기하 28번

그림과 같이 F(6, 0), F′(−6, 0)을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 A$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 $\angle$FPA $=\angle$F′PA를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.) [4점]

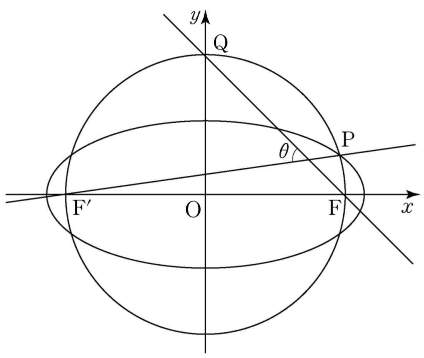


① 16　② 20　③ 24　④ 28　⑤ 32

09

2022년 시행 교육청 3월 기하 28번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F′P, QF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\frac{b^2}{a^2}$의 값은? (단, a, b는 $a>b>0$인 상수이고, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]

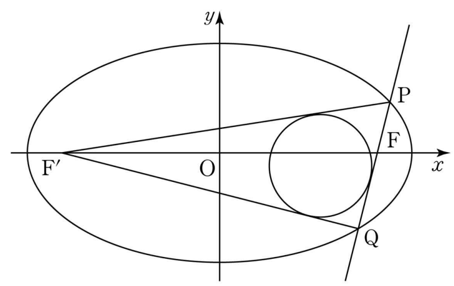


① $\frac{11}{64}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{13}{64}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{15}{64}$

10

2022년 시행 교육청 4월 기하 28번

그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 타원이 있다. 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF가 타원과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}:\overline{\mathrm{F'Q}}=1:4$이고 삼각형 PF′Q의 내접원의 반지름의 길이가 2일 때, 양수 c의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{17}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{17}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ ④ $\frac{51}{8}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{17}}{5}$

11

2022년 시행 교육청 3월 기하 25번

쌍곡선 $4x^2-8x-y^2-6y-9=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{19}{4}$　② $\frac{21}{4}$　③ $\frac{23}{4}$
④ $\frac{25}{4}$　⑤ $\frac{27}{4}$

12

2023학년도 평가원 6월 기하 24번

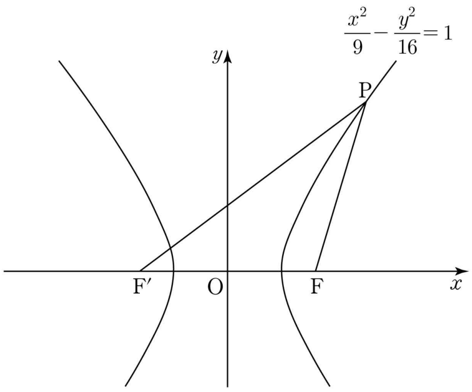
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$　② $6\sqrt{5}$　③ $8\sqrt{5}$
④ $10\sqrt{5}$　⑤ $12\sqrt{5}$

13

2022년 시행 교육청 4월 기하 24번

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 둘레의 길이는? [3점]



① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

14

2022년 시행 교육청 4월 기하 27번

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=k$를 만족시키는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

15

2022년 시행 교육청 3월 기하 29번

두 점 F, F$'$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 위의 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AF}}<\overline{\mathrm{AF'}}$
> (나) 선분 AF의 수직이등분선은 점 F$'$을 지난다.

선분 AF의 중점 M에 대하여 직선 MF$'$과 쌍곡선의 교점 중 점 A에 가까운 점을 B라 할 때, 삼각형 BFM의 둘레의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

16

2022년 시행 교육청 7월 기하 24번

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$

17

2022년 시행 교육청 4월 기하 29번

초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$에 대하여 이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 $x=-p$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 직선 $x=-p$에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 사각형 PQRF의 둘레의 길이가 140이 되도록 하는 상수 p의 값을 구하시오. [4점]

18

2022년 시행 교육청 4월 기하 26번

y축 위의 점 A에서 타원 $C:\dfrac{x^2}{8}+y^2=1$에 그은 두 접선을 l_1, l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 타원 C와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직일 때, 선분 PQ의 길이는?
(단, 점 A의 y좌표는 1보다 크다.) [3점]

① 4 ② $\dfrac{13}{3}$ ③ $\dfrac{14}{3}$

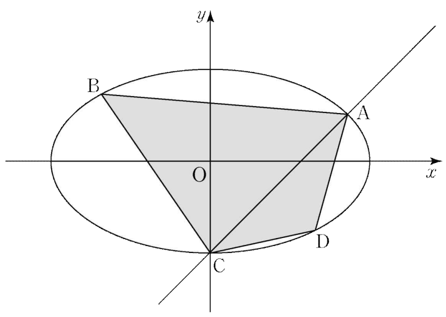
④ 5 ⑤ $\dfrac{16}{3}$

19

2023학년도 평가원 6월 기하 26번

좌표평면에서 타원 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2　② $\dfrac{9}{4}$　③ $\dfrac{5}{2}$　④ $\dfrac{11}{4}$　⑤ 3



20

2023학년도 평가원 9월 기하 24번

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값은? [3점]

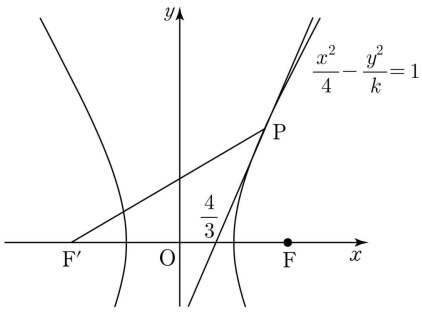
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21

2022년 시행 교육청 7월 기하 26번

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{FF}'}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

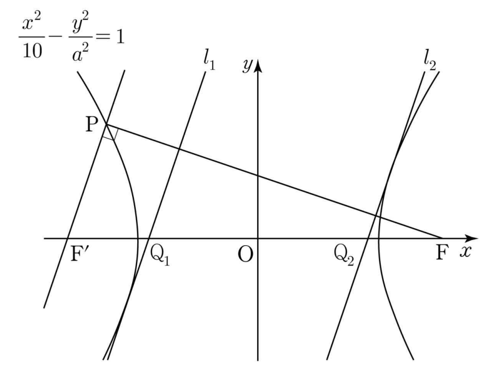
① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13



22

2022년 시행 교육청 4월 기하 30번

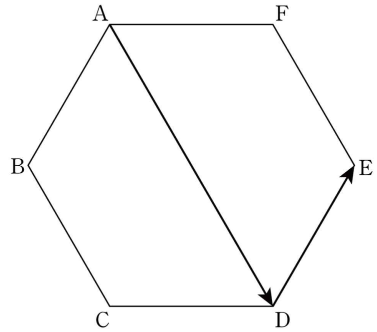
그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 F′FP는 넓이가 15이고 $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 직선 PF′과 평행하고 쌍곡선에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 x축과 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2라 할 때, $\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, a는 양수이다.) [4점]



23

2022년 시행 교육청 4월 기하 23번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$의 값은? [2점]



① 1　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ 3　⑤ $2\sqrt{3}$

24

2023학년도 평가원 6월 기하 23번

서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\ 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은?
(단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [2점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

25

2022년 시행 교육청 7월 기하 23번

두 벡터 $\vec{a}=(2m-1,\ 3m+1)$, $\vec{b}=(3,\ 12)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

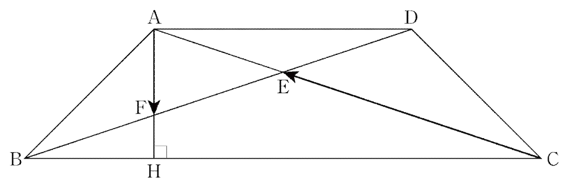
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26

2023학년도 평가원 6월 기하 27번

$\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$,
$\angle ABC=\angle BCD=45°$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$



27

2023학년도 평가원 6월 기하 25번

좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\ x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

28

2022년 시행 교육청 7월 기하 25번

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 3)$에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 6π ② 7π ③ 8π
④ 9π ⑤ 10π

29

2023학년도 평가원 9월 기하 26번

좌표평면 위의 점 A$(3,\ 0)$에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선

$y=\dfrac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?

(단, O는 원점이다.) [3점]

① $\dfrac{3}{5}$　② $\dfrac{4}{5}$　③ 1　④ $\dfrac{6}{5}$　⑤ $\dfrac{7}{5}$

30

2022년 시행 교육청 7월 기하 27번

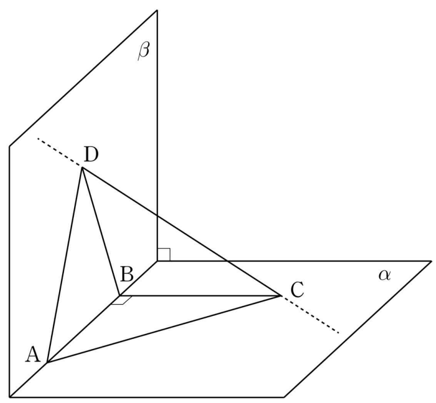
공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{29}$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 점 C와 평면 β 위에

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=6$인 점 D가 있다. $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$일 때,

직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
$\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{29}}{6}$　④ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{31}}{6}$



31

2023학년도 평가원 9월 기하 23번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

MEMO

본교재 빠른 정답

수학 1	01 ②	02 426	03 ①	04 220	05 ④	06 ⑤	07 12	08 152	09 ③	10 ③
	11 ③	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 ⑤	16 72	17 ③	18 170	19 ⑤	20 180
	21 50	22 ②	23 16	24 ③						
수학 2	25 ①	26 19	27 ②	28 8	29 ⑤	30 240	31 ③	32 2	33 ②	34 ④
	35 ③	36 ⑤	37 58	38 ④	39 ②	40 7	41 ①	42 51	43 ⑤	44 ④
	45 4	46 80	47 13	48 ⑤						
확률과 통계	01 ④	02 260	03 115	04 224	05 ②	06 ②	07 ④	08 ③	09 9	10 42
	11 ②	12 183	13 28	14 ⑤	15 175					
미적분	01 90	02 43	03 28	04 80	05 ③	06 ③	07 50	08 ④	09 ②	10 ⑤
	11 3	12 16	13 5	14 ①	15 283					
기하	01 ①	02 23	03 ③	04 ④	05 ①	06 13	07 14	08 15	09 8	10 17
	11 ③	12 ④	13 50	14 ③	15 127					

워크북 빠른 정답

Ⅰ 수학Ⅰ

빠른 정답

01 4	02 ⑤	03 ④
04 ①	05 ⑤	06 ④
07 8	08 2	09 5
10 ③	11 ⑤	12 6
13 7	14 ①	15 ①
16 ①	17 ④	18 ②
19 ④	20 ③	21 ④
22 ④	23 ⑤	24 ④
25 ③	26 ①	27 ②
28 ⑤	29 ③	30 105
31 ②	32 13	33 3
34 ②	35 ③	36 ①
37 70		

Ⅱ 수학Ⅱ

빠른 정답

01 ④	02 ②	03 ②
04 ①	05 ④	06 ⑤
07 ③	08 ①	09 ②
10 ①	11 ③	12 ④
13 ②	14 ⑤	15 ①
16 ①	17 ⑤	18 2
19 ③	20 4	21 121
22 32	23 11	24 ⑤
25 15	26 16	27 13
28 9	29 24	30 ④
31 8	32 30	33 ①
34 ②	35 32	36 ①
37 ②	38 ⑤	39 16
40 ④		

Ⅲ 확률과 통계

빠른 정답

01 ⑤	02 ⑤	03 ④
04 ③	05 115	06 ③
07 ②	08 ②	09 ④
10 ①	11 ①	12 708
13 720	14 ④	15 ④
16 ③	17 65	18 ②
19 ②	20 ②	21 ①
22 ③	23 ②	24 ③
25 133	26 ④	27 ⑤
28 ④	29 5	30 ④

Ⅳ 미적분

빠른 정답

01 ⑤	02 ⑤	03 ④
04 ④	05 ①	06 ③
07 ①	08 ①	09 ②
10 ④	11 ②	12 ③
13 ②	14 ②	15 ②
16 ①	17 ⑤	18 ③
19 ①	20 18	21 4
22 135	23 ③	24 ①
25 ②	26 ②	27 129
28 ③	29 ②	30 ③

V 기하

빠른 정답

01 ②	02 ①	03 384
04 ⑤	05 ①	06 ⑤
07 ③	08 ③	09 ④
10 ③	11 ④	12 ②
13 ②	14 ④	15 128
16 ④	17 21	18 ⑤
19 ⑤	20 ②	21 ④
22 13	23 ③	24 ③
25 ①	26 ④	27 ②
28 ⑤	29 ③	30 ②
31 ④		

수학 I 해설

01 4

$n=3$일 때 $f(3)=1$

$n=4$일 때 $2n^2-9n<0$이므로 $f(4)=0$

$n=5$일 때 $f(5)=1$

$n=6$일 때 $2n^2-9n>0$이므로 $f(6)=2$

따라서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

02 ⑤

$$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}=3^2=9$$

03 ④

$$(27\times\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}=\left(3^3\times 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=3^2\times 2=18$$

04 ①

$$(-\sqrt{2})^4\times 8^{-\frac{2}{3}}$$
$$=(-1)^4\times\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4\times(2^3)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=1\times 2^{\frac{1}{2}\times 4}\times 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$$
$$=2^2\times 2^{-2}$$
$$=2^{2+(-2)}$$
$$=2^0$$
$$=1$$

05 ⑤

$$3^{2\sqrt{2}}\times 9^{1-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})}=3^2=9$$

06 ④

$$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = \left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$$
$$= 2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$= 2^{3-1} = 2^2 = 4$$

07 8

$$\log_2 9 \times \log_3 16 = 2\log_2 3 \times 4\log_3 2$$
$$= 8 \times \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = 8$$

08 2

$$\log_3 7 \times \log_7 9 = \log_3 7 \times \frac{\log_3 9}{\log_3 7}$$
$$= \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$$

09 5

$$\frac{\log_5 72}{\log_5 2} - 4\log_2 \frac{\sqrt{6}}{2} = \log_2 72 - \log_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4$$
$$= \log_2\left(72 \times \frac{4}{9}\right)$$
$$= \log_2 2^5 = 5$$

10 ③

점 B의 좌표가 $B(0,\ 2^a)$이므로 $\overline{OB} = 2^a$

$\overline{OB} = 3 \times \overline{OH}$ 에서 $\overline{OH} = \frac{2^a}{3}$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $A\left(k,\ \frac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y = 2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-k+a} = \frac{2^a}{3}$에서 $2^{-k} = \frac{1}{3}$, $2^k = 3$

또한 점 A는 곡선 $y = 2^x - 1$ 위의 점이므로

$\frac{2^a}{3} = 2^k - 1 = 3 - 1 = 2$에서 $2^a = 6$

따라서 $a = \log_2 6$

11 ⑤

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(a,\ \log_2 2a)$, $B(b,\ \log_2 4b)(a < b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b-a} = \frac{1}{2}$에서

$\log_2 4b - \log_2 2a = \frac{1}{2}(b-a)$

이때,

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2}$$
$$= \sqrt{(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times (b-a) = 2\sqrt{5}$$

$b - a = 4$ …… ㉠

$\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \frac{2b}{a} = 2$

$b = 2a$ …… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a = 4$, $b = 8$

따라서 $A(4,\ 3)$, $B(8,\ 5)$, $C(4,\ 0)$이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

12 6

진수조건에서 $x + 2 > 0$이고 $x - 2 > 0$이어야 하므로

$x > 2$ …… ㉠

$\log_2(x+2) + \log_2(x-2)$

$= \log_2(x+2)(x-2)$

$= \log_2(x^2-4)$

$= 5$에서

$x^2 - 4 = 2^5$

$x^2 = 36$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x = 6$

13 7

진수 조건에서

$x - 4 > 0$이고 $x + 2 > 0$이어야 하므로

$x > 4$ ……㉠

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(x-4)^2=\log_9(x-4)^2$
이므로 주어진 방정식은
$\log_9(x-4)^2=\log_9(x+2)$
$(x-4)^2=x+2$
$x^2-8x+16=x+2$
$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$
따라서 $x=2$ 또는 $x=7$
㉠에서 구하는 실수 x의 값은 7이다.

14 ①

x, $x-6$은 로그의 진수이므로 $x>0$,
$x-6>0$에서
$x>6$ …… ㉠
$\log_2 x \le 4-\log_2(x-6)$
$\log_2 x(x-6) \le \log_2 16$
$x^2-6x-16 \le 0$에서 $-2 \le x \le 8$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $6<x\le 8$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $7+8=15$

15 ①

$\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$
따라서
$\cos\theta+\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

16 ①

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$
에서 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$
$(2\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+2\cos\theta)$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+5\sin\theta\cos\theta=2-\dfrac{15}{8}=\dfrac{1}{8}$

17 ④

$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$이고
$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$
한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$
따라서
$$\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$$

18 ②

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
이므로
$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$
이때
$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$
이고, 주어진 조건에 의하여 $\cos\theta<0$이므로
$\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$
따라서
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$$

19 ④

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)=2\cos\theta=\frac{6}{5}$

20 ③

$0\le x\le\frac{2\pi}{a}$ 에서 $0\le ax\le 2\pi$ 이므로

$2\cos ax=1$, 즉 $\cos ax=\frac{1}{2}$ 에서

$ax=\frac{\pi}{3}$ 또는 $ax=\frac{5\pi}{3}$, 즉 $x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\frac{\pi}{3a},\ 1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3a},\ 1\right)$ 이고

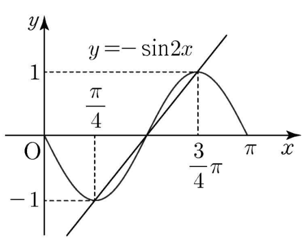
$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$ 이므로

$\frac{5\pi}{3a}-\frac{\pi}{3a}=\frac{4\pi}{3a}=\frac{8}{3}$

$a=\frac{4\pi}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{\pi}{2}$

21 ④

함수 $f(x)=-\sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3}{4}\pi$, $b=\frac{\pi}{4}$ 이므로 두 점

$\left(\frac{3}{4}\pi,\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$

22 ④

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{7}$ 이다.
$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times2\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\frac{2\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\boxed{1}$ 이다.
삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle\mathrm{AEB}$ 는 공통이고 $\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{ECD}$ 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{\mathrm{EA}}}{\overline{\mathrm{EC}}}=\frac{\overline{\mathrm{EB}}}{\overline{\mathrm{ED}}}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$ 이다.

즉, $\frac{3+\overline{\mathrm{ED}}}{\overline{\mathrm{EC}}}=\frac{2+\overline{\mathrm{EC}}}{\overline{\mathrm{ED}}}=\frac{2}{1}$

에서 $\overline{\mathrm{ED}}=\boxed{\frac{7}{3}}$ 이다.

$\angle\mathrm{DCE}=\pi-\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\theta}$

에서 $\sin\theta=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$ 이다.

$p=1$, $q=\frac{7}{3}$, $r=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이므로

$(p+q)\times r=\left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$

23 ⑤

$\overline{AB} = \overline{AD} = k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB) = \frac{10^2 + \overline{BC}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{BC}}$$
$$= \frac{1}{20}\left(\overline{BC} + \frac{\boxed{100 - k^2}}{\overline{BC}}\right),$$
$$\cos(\angle DCA) = \frac{10^2 + \overline{CD}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{CD}}$$
$$= \frac{1}{20}\left(\overline{CD} + \frac{\boxed{100 - k^2}}{\overline{CD}}\right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\cos(\angle ACB) = \cos(\angle DCA)$이다.

$$\frac{1}{20}\left(\overline{BC} + \frac{100 - k^2}{\overline{BC}}\right) = \frac{1}{20}\left(\overline{CD} + \frac{100 - k^2}{\overline{CD}}\right)$$
$$\overline{BC} - \overline{CD} = (100 - k^2) \times \left(\frac{1}{\overline{CD}} - \frac{1}{\overline{BC}}\right)$$
$$\overline{BC} - \overline{CD} = (100 - k^2) \times \frac{\overline{BC} - \overline{CD}}{\overline{BC} \times \overline{CD}}$$

$\overline{AC} = 10 < 2R$이므로 $\overline{BC} \neq \overline{CD}$

그러므로 $\overline{BC} \times \overline{CD} = 100 - k^2$

사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}k^2 \sin(\angle BAD) + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \angle BAD)$$
$$= \frac{1}{2}\{k^2 + (100 - k^2)\}\sin(\angle BAD)$$
$$= 50\sin(\angle BAD) = 40$$

에서 $\sin(\angle BAD) = \boxed{\frac{4}{5}}$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} = 2R$에서 $\overline{BD} = \frac{8}{5}R$이므로

$\overline{BD} : R = \boxed{\frac{8}{5}} : 1$

따라서 $f(k) = 100 - k^2$, $p = \frac{4}{5}$, $q = \frac{8}{5}$이므로

$$\frac{f(10p)}{q} = (100 - 8^2) \times \frac{5}{8} = \frac{45}{2}$$

24 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4 = 6$에서

$a_1 + 3d = 6$ ...... ㉠

$2a_7 = a_{19}$에서

$2(a_1 + 6d) = a_1 + 18d$, $a_1 - 6d = 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = 4$

25 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = 2a_5 = 2(a_1 + 4d)$

$a_1 + 8d = 0$ ...... ㉠

$a_8 + a_{12} = (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d)$

$= 2a_1 + 18d = -6$

$a_1 + 9d = -3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1 = 24$, $d = -3$이므로

$a_2 = a_1 + d = 21$

26 ①

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$d \geq 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $d < 0$이어야 한다.

(i) $S_3 = S_6$인 경우

$\frac{3(2a_1 + 2d)}{2} = \frac{6(2a_1 + 5d)}{2}$에서

$a_1 = -4d$이므로

$S_3 = S_6 = -9d > 0$,

$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 11d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-9d = -11d - 3$, $d = -\frac{3}{2}$

$a_1 = -4d = 6$

(ii) $S_3 = -S_6$인 경우

$\frac{3(2a_1 + 2d)}{2} = -\frac{6(2a_1 + 5d)}{2}$에서

$a_1 = -2d$이므로

$S_3 = -S_6 = -3d > 0$

$S_{11} = \dfrac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 33d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-3d = -33d - 3$, $d = -\dfrac{1}{10}$

$a_1 = -2d = \dfrac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은 $6 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{31}{5}$이다.

27 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r = \dfrac{a_3}{a_2} = 2$이므로 $a_5 = a_3 \times r^2 = 4$

28 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_2 = 1$이므로 $a \neq 0$이고 $r \neq 0$

$a_5 = 2(a_3)^2$에서 $ar^4 = 2a^2r^4$이므로 $a = \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{1}{2}r = 1$에서 $r = 2$

따라서 $a_6 = \dfrac{1}{2} \times 2^5 = 16$

29 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r > 0)$라 하면

$a_2 + a_3 = a_1r + a_1r^2$

$= \dfrac{1}{4}r + \dfrac{1}{4}r^2 = \dfrac{3}{2}$

$r^2 + r - 6 = 0$, $(r+3)(r-2) = 0$

$r > 0$이므로 $r = 2$

따라서

$a_6 + a_7 = a_1r^5 + a_1r^6$

$= \dfrac{1}{4} \times 2^5 + \dfrac{1}{4} \times 2^6$

$= 24$

30 105

$\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} = \dfrac{2^5 - 1}{2-1} = 31$

$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \times \dfrac{n(n+1)}{2} - n = n^2$

$\sum_{k=1}^{5} (2 \times 3^{k-1}) = \dfrac{2 \times (3^5 - 1)}{3-1} = 242$

이므로 주어진 부등식에서 $31 < n^2 < 242$이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값은 6, 7, 8, $\cdots$, 15이므로 그 합은

$\dfrac{10 \times (6+15)}{2} = 105$

31 ②

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n} + b_{2n} = 0$이고

$a_{2n+1} + b_{2n+1} = 3(a_{2n-1} + b_{2n-1})$이다.

$$\sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=1}^{8} b_n = \sum_{n=1}^{8} (a_n + b_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{4} (a_{2n-1} + b_{2n-1})$$
$$= \frac{(a_1 + b_1)(3^4 - 1)}{3-1}$$
$$= 80a_1 = 160$$

에서 $a_1 = 2$

따라서 $a_3 + b_3 = 3(a_1 + b_1) = 12$

32 13

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = c\sum_{k=1}^{5} a_k$$
$$= c \times 10$$
$$= 10c$$

이고

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

에서

$10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

따라서

$c = 13$

33 3

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a) = 4\sum_{k=1}^{10}k + 10a$

$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10a$

$= 220 + 10a$

즉, $220 + 10a = 250$이므로

$10a = 30$

따라서 $a = 3$

34 ②

$a_1 = \frac{1}{2}$이므로

$a_2 = -2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$

$a_3 = -2 \times 0 + 1 = 1$

$a_4 = -2 \times 1 + 1 = -1$

$a_5 = -1 + 1 = 0$

$\vdots$

이때, $a_{n+3} = a_n \ (n \geq 2)$이므로

$a_{10} = a_7 = a_4 = -1$

$a_{20} = a_{17} = a_{14} = \cdots = a_2 = 0$

따라서 $a_{10} + a_{20} = -1 + 0 = -1$

35 ③

조건 (가)에 의하여

$\sum_{n=1}^{8} a_n = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_7) + (a_4 + a_8)$

$= 15 \times 4 = 60$

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$이므로 $\sum_{n=5}^{8} a_n = 54$

조건 (나)에 의하여

$a_6 = a_5 + 5,$

$a_7 = a_6 + 6 = a_5 + 11,$

$a_8 = a_7 + 7 = a_5 + 18$

따라서 $\sum_{n=5}^{8} a_n = 4a_5 + 34 = 54$에서 $a_5 = 5$

36 ①

$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2}$

이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n \ (n \geq 2)$이다.

$S_1 = a_1$에서 $3S_1 = 3a_1$이므로

$3S_n = (n+2) \times a_n \ (n \geq 1)$

이다.

$3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$

$= (n+2) \times a_n - (\boxed{n+1}) \times a_{n-1} \ (n \geq 2)$

$(n-1) \times a_n = (n+1) \times a_{n-1}$이고 $a_1 \neq 0$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\frac{n+1}{n-1}} \ (n \geq 2)$

따라서

$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9}$

$= 2 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} = \boxed{110}$

$f(n) = n + 1,\ g(n) = \frac{n+1}{n-1},\ p = 110$

따라서 $\frac{f(p)}{g(p)} = \frac{111}{\frac{111}{109}} = 109$

37 70

$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$ ...... ㉠

이고 $1 < a_1 < 2$에서 $a_1 \geq 0$이므로

$a_2 = a_1 - 2 < 0$

$a_3 = -2a_2 = -2(a_1 - 2) > 0$

$a_4 = a_3 - 2 = -2(a_1 - 2) - 2 = -2(a_1 - 1) < 0$

$a_5 = -2a_4 = 4(a_1 - 1) > 0$

$a_6 = a_5 - 2 = 4(a_1 - 1) - 2 = 4a_1 - 6$

이때 ㉠에서 $a_6 < 0$이면 $a_7 = -2a_6 > 0$이므로

$a_7 = -1 \leq 0$에서 $a_6 \geq 0$이다.

$a_7 = a_6 - 2 = (4a_1 - 6) - 2 = 4a_1 - 8 = -1$

$a_1 = \frac{7}{4}$

따라서

$40 \times a_1 = 40 \times \frac{7}{4} = 70$

수학II 해설

01 ④

$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) = 0 + 1 = 1$

02 ②

$x \to 0-$일 때 $f(x) \to -2$이고, $x \to 1+$일 때 $f(x) \to 1$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$

$= (-2) + 1 = -1$

03 ②

$\lim_{x \to -1} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

따라서 $\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

04 ①

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2}{\sqrt{2x-5}+1} = 1$$

05 ④

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$에서 $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$, $f(1) = 0$

$f(x) = (x-1)(2x+a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+a)}{x-1} = 2 + a = 3$, $a = 1$

$f(x) = (x-1)(2x+1)$

따라서 $f(3) = 14$

06 ⑤

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1-}|f(x)|=\lim_{x \to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$이어야

한다.

이때

$$\lim_{x \to -1-}|f(x)|=\lim_{x \to -1-}|x+a|$$
$$=|-1+a|,$$
$$\lim_{x \to -1+}|f(x)|=\lim_{x \to -1+}|x|=1,$$

$|f(-1)|=|-1|=1$이므로

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로 $a=2$

(ⅱ) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 3-}|f(x)|=\lim_{x \to 3+}|f(x)|=|f(3)|$이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \to 3-}|f(x)|=\lim_{x \to 3-}|x|=3,$$
$$\lim_{x \to 3+}|f(x)|=\lim_{x \to 3+}|bx-2|$$
$$=|3b-2|$$

$|f(3)|=|3b-2|$이므로

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

07 ③

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-}(x-1)=\lim_{x \to 2+}(x^2-ax+3)=f(2)$

$1=7-2a$

따라서 $a=3$

08 ①

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면
$x=a$에서 연속이어야 한다.

즉,

$f(a)=\lim_{x \to a-}f(x)=\lim_{x \to a+}f(x)$

가 성립해야 한다.

$f(a)=-2a+a=-a$

$$\lim_{x \to a-}f(x)=\lim_{x \to a-}(-2x+a)$$
$$=-2a+a=-a$$
$$\lim_{x \to a+}f(x)=\lim_{x \to a+}(ax-6)=a^2-6$$

이므로 $f(a)=\lim_{x \to a-}f(x)=\lim_{x \to a+}f(x)$에서

$-a=a^2-6$

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$(-3)+2=-1$

09 ②

$f(x)=x^3+9$에서

$f'(x)=3x^2$이므로

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=12$$

10 ①

$f(x)=2x^2+5$에서

$f'(x)=4x$

이므로

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4\times2=8$$

11 ③

$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=4a-1=7$에서 $a=2$이다.

한편 $f'(x)=4x-3$이므로

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{h \to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$
$$=2f'(a)$$
$$=2f'(2)=10$$

12 ④

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$이고 $\lim_{x \to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x \to 3}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로 $f(3)=g(3)$이고

$f(3)=2$이므로 $g(3)=2$

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}$

$=\lim_{x \to 3} \frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$

$=f'(3)-g'(3)=1$

$f'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$

$g(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+a$

$g(3)=9+3a+b=2$, $g'(3)=6+a=0$

에서 $a=-6$, $b=11$

따라서 $g(1)=1-6+11=6$

13 ②

$f'(x)=3x^2+4x+3$이므로

$f'(-1)=3-4+3=2$

14 ⑤

$f'(x)=3x^2+7$에서 $f'(1)=10$

15 ①

$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(1)=5$

16 ①

$y=x^3-4x+5$에서

$y'=3x^2-4$

이므로 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$

$y=-x+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또한, $y=x^4+3x+a$에서

$y'=4x^3+3$

이고 곡선 $y=x^4+3x+a$와 직선 ㉠이 접하므로

접점의 x좌표는

$4x^3+3=-1$, $x^3=-1$

$\therefore\ x=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4)$이고 이 점은 곡선

$y=x^4+3x+a$ 위의 점이므로

$4=1-3+a$

$\therefore\ a=6$

17 ⑤

$f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$\quad\quad=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로

$f(0)=k=9$

따라서

$f(x)=x^3-3x^2+9$

이고 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)$이므로 구하는 극솟값은

$f(2)=2^3-3\times2^2+9=5$

18 2

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=4+2a=0$에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

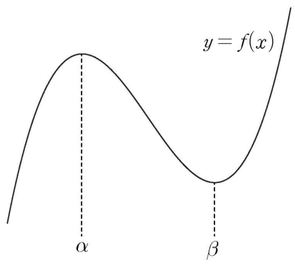
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

19 ③

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(ⅰ) $\alpha<\beta\le-2$인 경우
$x\ge-2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.
$f(-2)<g(-2)<g(2)$
$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순이다.

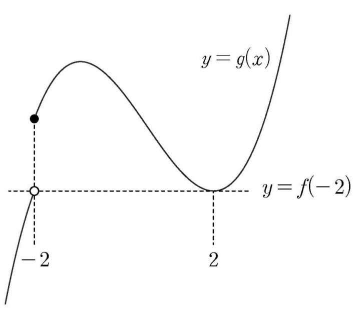
(ⅱ) $\alpha<-2<\beta$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty,\ \alpha)$에서 존재하므로 모순이다.

(ⅲ) $\alpha=-2$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$$f(x)=x^3-12x+\frac{1}{2}$$

$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순이다.

(ⅳ) $-2<\alpha<\beta$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$이므로 $f(2)+8=f(-2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{1}{2}$ (a, b는 상수)라 하자.

$$8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$$

$$b=-6,\ f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$$f'(2)=12+4a-6=0,\ a=-\frac{3}{2}$$

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

20 4

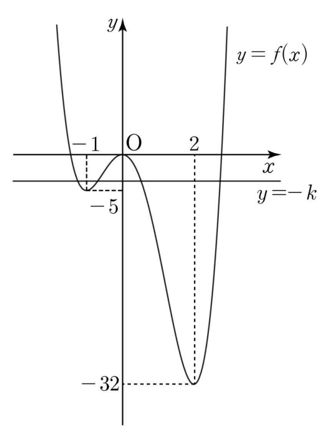
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=12x^3-12x^2-24x\\&=12x\left(x^2-x-2\right)\\&=12x(x+1)(x-2)\end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 사차함수 $f(x)$는
$x=0$에서 극댓값 $f(0)=0$을 갖고,
$x=-1$, $x=2$에서 각각 극솟값
$f(-1)=3+4-12=-5$
$f(2)=48-32-48=-32$
를 갖는다.



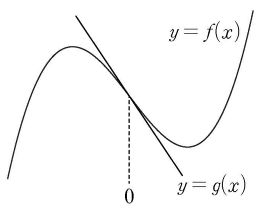
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수와 같으므로

주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은
위의 그래프에서
$-5 < -k < 0$, 즉 $0 < k < 5$
이어야 한다.
따라서 구하는 자연수 k의 개수는 4이다.

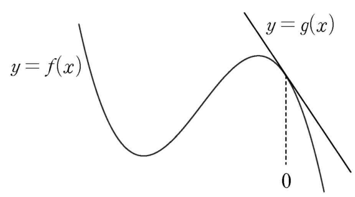
21 121

$f(0)=0$이므로
$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(0)=c$, $g(x)=cx$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기 c에 대하여

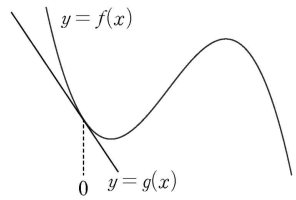
(i) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ii) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(iii) $c<0$, $a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



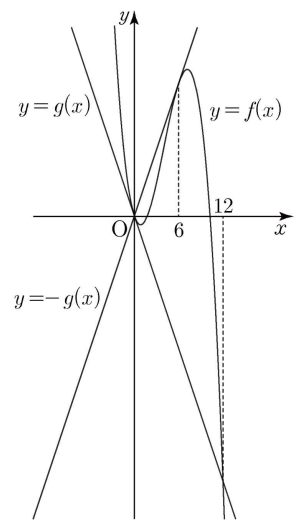
(iv) $c<0$, $a<0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여
$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2$ …… ㉠
조건 (나)에 의하여
$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12)$ …… ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$
$6-k=0$, $k=6$
$g(x)=18ax$
$f(x)=ax(x-6)^2-18ax$
$\quad=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을
α, β ($\alpha<\beta$)라 하면
$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$
함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha \le x < \beta) \\ -ax^2(x-12) & (0 \le x < \alpha \text{ 또는 } x \ge \beta) \end{cases}$$

$\alpha<3<\beta$이므로
$h(3)=a\times3\times(3-6)^2=27a=-\dfrac{9}{2}$

$a=-\dfrac{1}{6}$, $c=-3$

$$h(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha \le x < \beta) \\ \dfrac{1}{6}x^2(x-12) & (0 \le x < \alpha \text{ 또는 } x \ge \beta) \end{cases}$$

$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$ 이므로

$\alpha<6<\beta<11$

$h(6)=0$, $h(11)=\dfrac{1}{6}\times 11^2\times(-1)=-\dfrac{121}{6}$

따라서

$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\dfrac{121}{6}\right)\right\}=121$

22 32

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\quad=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극소, $x=0$에서 극대이다.

이때 $f(-1)=-5+k$, $f(2)=-32+k$이므로

$f(-1)>f(2)$

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $f(2)=-32+k\ge 0$, 즉 $k\ge 32$이어야 한다.

따라서 실수 k의 최솟값은 32이다.

23 11

$f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-11$	$\nearrow$	$a+16$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-11$을 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^4-4x^3+16x+a\ge 0$이 항상 성립하기 위해서는

$a-11\ge 0$, $a\ge 11$

따라서 a의 최솟값은 11

24 ⑤

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$h(x)\ge 0$이 성립하려면 $x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$h'(x)=3x^2-2x-1$

$\quad=(3x+1)(x-1)$

이므로

$h'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

즉, $x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로

주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\ge 0$이어야 한다.

따라서 $a\le 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

25 15

$f(x)=\displaystyle\int(8x^3+6x^2)dx$

$\quad=2x^4+2x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(0)=C=-1$

따라서

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

그러므로

$f(-2)=32-16-1=15$

26 16

$f(x)=\displaystyle\int(6x^2-4x+3)dx$

$\quad=2x^3-2x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(1)=2-2+3+C=3+C=5$

에서

$C=2$

따라서

$f(2)=16-8+6+2=16$

27 13

$$f(x)=\int(6x^2-2x-1)dx$$

$$=2x^3-x^2-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=2-1-1+C=3$, $C=3$

$f(x)=2x^3-x^2-x+3$

따라서 $f(2)=16-4-2+3=13$

28 9

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$

$$f(x)=\int(3x-6)dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2-6x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$

따라서 $f(2)=6-12+15=9$

29 24

$$\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(2x^3+6|x|)dx+\int_{-2}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(2x^3+6|x|)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}6x\,dx=2\left[3x^2\right]_0^2=24$$

30 ④

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

$f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(0)=f(1)=f(2)=k$ (k는 상수)

$f(x)=x(x-1)(x-2)+k=x^3-3x^2+2x+k$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

따라서 $f'(1)=-1$

31 8

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$$

$$=2x\int_0^x f(t)dt$$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(ⅰ) $h(x)=ax^2(x-3)$ (a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^3(x-3)$이고 함수 $g(x)$는

$x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순이다.

(ⅱ) $h(x)=ax(x-3)^2$ (a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$h'(x)=f(x)$

$$=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$

$f(x)=3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3|f(x)|dx$$

$$=3\int_0^3|(x-1)(x-3)|dx$$

$$=3\int_0^1(x-1)(x-3)dx-3\int_1^3(x-1)(x-3)dx$$

$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$$

$$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$$

32 30

$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(ⅰ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\geq 0$

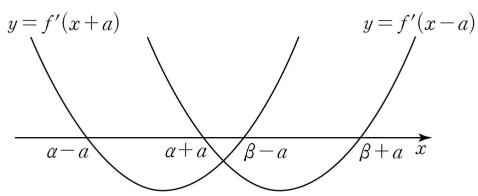
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



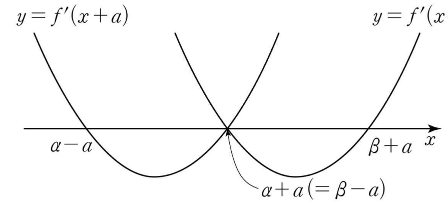
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta-a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$ $(=\beta-a)$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}=6$

$\beta-\alpha=2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

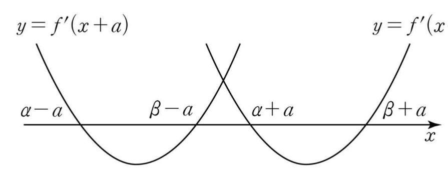
$4a=6$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha=2$, $\beta=5$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$$f(x)=\int(3x^2-21x+30)dx$$

$$=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x-\frac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{21}{2}+30-\frac{1}{2}\right)=30$

33 ①

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

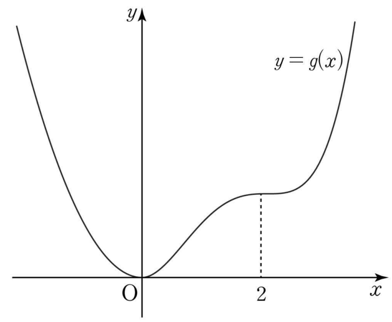
$$g(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0)\\ \displaystyle\int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\ne\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\ne\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 γ ($\gamma<0$), 2라 하면

$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\ne\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$$

$x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\displaystyle\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는

모든 a의 값의 곱은 $2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

34 ②

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A$(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(3)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-3=2(x-3)$, $y=2x-3$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 \{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$$

$$=\int_0^3 (x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3=9$$

35 32

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^2 \left|-x^2+4x-4\right|dx$$

$$=\int_0^2 (x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

따라서 $12S=32$

36 ①

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지의 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$v(t)=3t^2+at$이므로

$$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^6 (3t^2+at)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6$$

$$36\left(6+\frac{a}{2}\right)=0$$

$a=-12$

$v(t)=3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|dt=\int_0^6 \left|3t^2-12t\right|dt$$

$$=\int_0^4 (-3t^2+12t)dt+\int_4^6 (3t^2-12t)dt$$

$$=\left[-t^3+6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^6$$

$$=32+32=64$$

37 ②

점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로 $x(0)=0$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$$

$$=\int_0^t 3(t-2)(t-a)dt$$

$$=\int_0^t \{3t^2-3(a+2)t+6a\}dt$$

$$=t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at$$

점 P가 $0<t<2$, $t>a$에서 양의 방향으로, $2<t<a$에서 음의 방향으로 움직이고 $t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번뿐이므로 $x(a)=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$에서 $a>2$이므로 $a=6$

따라서 $v(8)=3\times 6\times 2=36$

38 ⑤

점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$$x_1(t)=\int_0^t (2-t)dt$$

$$=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^t$$

$$=2t-\frac{1}{2}t^2$$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$2t-\frac{1}{2}t^2=0$, $t^2-4t=0$

$t(t-4)=0$

$t=4$
이므로
출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t|\,dt = \int_0^4 3t\,dt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4 = 24$$

39 16

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (3t^2+6t-a)dt$$
$$=\left[t^3+3t^2-at\right]_0^3=54-3a=6$$

따라서 $a=16$

40 ④

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (3t^2+at)dt=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2=8+2a$$

점 $\mathrm{P}(8+2a)$와 점 $\mathrm{A}(6)$ 사이의 거리가 10이므로
$|(8+2a)-6|=10$
$2a+2=\pm 10$
$\therefore a=4\ (\because a>0)$

확률과 통계 해설

01 ⑤

A 학교 학생 5명을 배열하는 원순열의 수는
$(5-1)!=24$
A 학교 학생 사이에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times 20=480$

02 ⑤

조건 (가)에서 4명의 1학년 학생과 4명의 2학년 학생은 원 모양의 탁자에 교대로 둘러앉아야 한다.
4명의 1학년 학생이 앉는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=6$
조건 (나)에서 A와 B는 이웃하므로
학생 B가 앉는 경우의 수는 2
학생 B를 제외한 3명의 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 2\times 6=72$

03 ④

${}_3\Pi_4=3^4=81$

04 ③

함수 $f: X\to Y$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.

(i) $x\le 3$일 때
$x\times f(x)\le 10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은 1 또는 2 또는 3이다.
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_3=3^3=27$

(ii) $x\ge 4$일 때
$x\times f(x)\le 10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은 1 또는 2이다.
$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로

다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{2}\Pi_{2}=2^2=4$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$27\times4=108$

05 115

구하는 모든 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만든 모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서 숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는

2 ...... ㉠

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2\times81=162$

(ii) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

1, 2의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{2}\Pi_{5}=2^5=32$

(iii) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는

1 ...... ㉢

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$ ...... ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$1\times16=16$

(iv) 숫자 0, 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

자연수 22222의 1개다.

따라서 (i)~(iv)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$162-(32+16-1)=115$

06 ③

조건 (가)에서 양 끝에 나열되는 문자는 X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로 양 끝에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는 ${}_{2}\Pi_{2}=2^2=4$

조건 (나)에서 문자 a의 위치를 정하는 경우의 수는 4

나머지 3곳에 나열할 문자는 b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로 나머지 3곳에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는 ${}_{3}\Pi_{3}=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times4\times27=432$

07 ②

(i) 일의 자리의 수가 1인 경우

1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우

1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $20+10=30$

08 ②

5개의 문자 중 a의 개수가 3이므로 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

09 ④

(i) 한 개의 문자를 3개 선택하는 경우

${}_{3}C_{1}\times\frac{5!}{3!}=60$

(ii) 두 개의 문자를 각각 2개씩 선택하는 경우

${}_{3}C_{2}\times\frac{5!}{2!\times2!}=90$

따라서 경우의 수는 $60+90=150$

10 ①

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.
A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$이다.
P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 3개의 c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!\times3!}=20$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times20=200$

11 ①

조건 (가)에서
(ⅰ) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 A가 적힌 공인 경우
조건 (나)에서 남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는
3개의 문자 B, B, C를 X, X, X로 놓고 5개의 문자 D, D, X, X, X를 일렬로 나열한 후 X의 자리에 왼쪽부터 순서대로 B, B, C 또는 B, C, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!\times3!}\times2=20$
(ⅱ) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 B가 적힌 공인 경우
남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는 5개의 문자 A, B, C, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!}=60$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$20+60=80$

12 708

(ⅰ) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY 꼴인 경우
4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$
(ⅱ) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ 꼴인 경우
4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$
Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=4$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
그러므로 구하는 경우의 수는
$4\times3\times4\times12=576$
(ⅲ) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우
각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_4=16$
D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $16\times6=96$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$36+576+96=708$

13 720

함수 $f:X\rightarrow X$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.
조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 홀수의 개수를 n이라 하면
$n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$이다.
(ⅰ) $n=0$일 때
치역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X의 원소 중 짝수는 2개뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $n=2$일 때
조건 (나)에서 홀수인 두 함숫값이 서로 같으면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인

원소가 2개이고

홀수인 두 함숫값이 서로 다르면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개다.

(a) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3$ …… ㉠

치역의 세 원소 중 홀수를 a, 두 짝수를 b, c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, a, b, c, c 또는 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times 2!} + \frac{5!}{2!\times 2!} = 60$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$3\times 60 = 180$

(b) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$ …… ㉢

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!} = 20$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$6\times 20 = 120$

(a), (b)에 의하여 $180+120=300$

(iii) $n=4$일 때

짝수인 함숫값이 1개이므로 조건 (나)에서 치역의 세 원소 중 홀수인 원소는 2개, 짝수인 원소는 1개다.

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$ …… ㉤

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

문자 a, b, b, b, c 또는 문자 a, a, b, b, c 또는 문자 a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!\times 2!} + \frac{5!}{3!} = 70$ …… ㉥

㉤, ㉥에 의하여

$6\times 70 = 420$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

구하는 함수 f의 개수는 $300+420=720$

14 ④

${}_nH_2 = {}_{n+2-1}C_2 = {}_9C_2$에서 $n+1=9$, $n=8$

15 ④

조건 (가)의 $a+b+c+d+e=10$과

조건 (나)의 $-2 \le a-b+c-d+e \le 2$에서

$8 \le 2a+2c+2e \le 12$

$4 \le a+c+e \le 6$

(i) $a+c+e=4$일 때

$b+d=6$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=4$, $b+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_4 \times {}_2H_6 = {}_6C_4 \times {}_7C_6 = 15\times 7 = 105$

(ii) $a+c+e=5$일 때

$b+d=5$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=5$, $b+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_5 \times {}_2H_5 = {}_7C_5 \times {}_6C_5 = 21\times 6 = 126$

(iii) $a+c+e=6$일 때

$b+d=4$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=6$, $b+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_6 \times {}_2H_4 = {}_8C_6 \times {}_5C_4 = 28\times 5 = 140$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $105+126+140=371$

16 ③

8권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_8 = {}_{3+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$

첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수는 먼저 첫 번째 칸에 6권의 책을 꽂고 남은 2권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

마찬가지로 두 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수도 6이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$45-6-6=33$

17 65

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 -1과 1을 적어도 1개씩 선택하거나, 0을 적어도 2개 선택해야 한다.

(ⅰ) -1과 1을 적어도 1개씩 선택하는 경우

-1과 1을 1개씩 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_3 = {}_{5+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

(ⅱ) 0을 적어도 2개 선택하는 경우

0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_3 = {}_{5+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

(ⅲ) 위의 (ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족시키는 경우

-1을 1개, 0을 2개, 1을 1개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_1 = {}_{5+1-1}\mathrm{C}_1 = {}_5\mathrm{C}_1 = 5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35+35-5=65$

18 ②

조건 (가)에서

$\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$ 의 값이 자연수인 경우는 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 하나의 수가 1 또는 4이고 나머지 두 수가 서로 같은 경우이다.

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 1,\ 1)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3$

그러므로 $1\times{}_5\mathrm{H}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

(ⅱ) $f(3)=2$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 2,\ 2)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3$

그러므로 $1\times{}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 3,\ 3)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3$

그러므로 $1\times{}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$

(ⅳ) $f(3)=4$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은

$(1,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 4)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3$

그러므로 $5\times{}_2\mathrm{H}_3 = 5\times{}_4\mathrm{C}_3 = 20$

(ⅴ) $f(3)=5$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은

$(1,\ 5,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 5)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_3$

그러므로 $2\times{}_1\mathrm{H}_3 = 2\times{}_3\mathrm{C}_3 = 2$

따라서 (ⅰ) ~ (ⅴ)에 의하여 함수 f의 개수는

$35+20+10+20+2=87$

19 ②

다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서

일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r x^r 2^{n-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_n\mathrm{C}_2\times 2^{n-2}$

x^3의 계수는 $r=3$일 때이므로 ${}_n\mathrm{C}_3\times 2^{n-3}$

${}_n\mathrm{C}_2\times 2^{n-2} = {}_n\mathrm{C}_3\times 2^{n-3}$

$$\frac{n!}{2!\times(n-2)!}\times 2=\frac{n!}{3!\times(n-3)!}$$
$6=n-2$, $n=8$

20 ②

$(4x+1)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\times(4x)^{6-r}\times 1^r={}_6C_r\times 4^{6-r}\times x^{6-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

x의 계수는 $r=5$일 때 ${}_6C_5\times 4={}_6C_1\times 4=24$

21 ①

주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수를 a, 주머니 B에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수를 b라 하면 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3\times 5=15$

이때 $|a-b|=1$인 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$이고, 그 개수는 5이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

22 ③

8개의 공 중 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_4$

(i) 꺼낸 공 중 검은 공이 0개일 확률은

$\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}=\frac{1}{70}$

(ii) 꺼낸 공 중 검은 공이 1개일 확률은

$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_3}{{}_8C_4}=\frac{16}{70}$

따라서 꺼낸 공 중 검은 공이 2개 이상일 확률은

$1-\left(\frac{1}{70}+\frac{16}{70}\right)=\frac{53}{70}$

23 ②

7명이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

A가 B와 이웃하는 사건을 E

A가 C와 이웃하는 사건을 F라 하면

구하는 확률은 $\mathrm{P}(E\cap F)$이다.

(i) A가 B와 이웃하는 경우

A와 B를 한 명이라 생각하고 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

5!

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

2

즉, $\mathrm{P}(E)=\frac{5!\times 2}{6!}=\frac{1}{3}$

(ii) A가 C와 이웃하는 경우

A와 C를 한 명이라 생각하고 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

5!

A와 C가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

2

즉, $\mathrm{P}(F)=\frac{5!\times 2}{6!}=\frac{1}{3}$

(iii) A가 B, C와 모두 이웃하는 경우

A, B, C를 한 명이라 생각하고 5명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

4!

A를 가운데 두고 B, C가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

2

즉, $\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{4!\times 2}{6!}=\frac{1}{15}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E\cup F)&=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)-\mathrm{P}(E\cap F)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

24 ③

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이고,

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

이므로

$\frac{\frac{1}{4}}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{P(A)}$에서 $P(A)=P(B)$

따라서

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=P(A)+P(A)-\frac{1}{4}$

$\therefore\ P(A)=\frac{5}{8}$

25 133

정육면체 모양의 상자를 한 번 던져 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 각각 1, 2일 확률은 각각

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$이다.

$a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6$일 사건을 A,

$a_1=a_4=1$일 사건을 B라 하자.

$a_1+a_2+a_3>a_4+a_5+a_6\geq 3$

(i) $a_1+a_2+a_3=4$인 경우

$a_1+a_2+a_3=4$일 확률은 ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$

$a_4+a_5+a_6=3$일 확률은 ${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3^3}=\frac{6}{3^6}$

(ii) $a_1+a_2+a_3=5$인 경우

$a_1+a_2+a_3=5$일 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$3\leq a_4+a_5+a_6\leq 4$일 확률은

${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{7}{3^3}=\frac{84}{3^6}$

(iii) $a_1+a_2+a_3=6$인 경우

$a_1+a_2+a_3=6$일 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$3\leq a_4+a_5+a_6\leq 5$일 확률은

${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)+{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{19}{3^3}=\frac{152}{3^6}$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$P(A)=\frac{6}{3^6}+\frac{84}{3^6}+\frac{152}{3^6}=\frac{242}{3^6}$

$a_1=a_4=1$이면 $a_2+a_3>a_5+a_6\geq 2$이다.

(iv) $a_1=a_4=1$이고 $a_2+a_3=3$인 경우

$a_1=a_4=1$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_2+a_3=3$일 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3^2}$

$a_5+a_6=2$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{4}{3^2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3^6}$

(v) $a_1=a_4=1$이고 $a_2+a_3=4$인 경우

$a_1=a_4=1$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_2+a_3=4$일 확률은 ${}_2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$2\leq a_5+a_6\leq 3$일 확률은

${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3^2}$

그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{5}{3^2}=\frac{20}{3^6}$

(iv), (v)에 의하여

$P(A\cap B)=\frac{4}{3^6}+\frac{20}{3^6}=\frac{24}{3^6}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{24}{242}=\frac{12}{121}$

따라서 $p=121$, $q=12$이므로 $p+q=133$

26 ④

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

6의 약수가 아닐 확률은

$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상이려면 4번의 시행 중 주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 2번 이상이면 된다.

주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 0번일 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 1번일 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\left(\frac{1}{81}+\frac{8}{81}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

27 ⑤

3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3인 사건을 X, 주머니에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀있는 두 수의 합이 소수인 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

주머니 A에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 다음과 같다.

(i) 1이 적혀 있는 카드를 2장 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

(ii) 1과 2가 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$

(iii) 2와 3이 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{40}$$

주머니 B에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 3과 4가 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우이다.

$$\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{7}{8}\times\frac{4}{15}=\frac{7}{30}$$

$$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{3}{40}+\frac{7}{30}=\frac{37}{120}$$

28 ④

이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$에서 $\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$,

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2n}{9}$$

$$\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times\frac{n}{3}-1=17$$

$n=18$

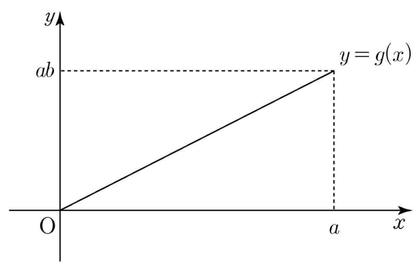
따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{2\times18}{9}=4$

29 5

확률밀도함수의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(0\le x\le a)=1$에서 $ab=1$ ······ ㉠

$g(x)=\mathrm{P}(0\le X\le a)=bx$



확률밀도함수의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(0\le Y\le a)=\frac{1}{2}\times a\times ab=\frac{a^2b}{2}=1$ ······ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$

그러므로 $g(x)=\frac{1}{2}x$에서

$$\mathrm{P}(0\le Y\le c)=\frac{1}{2}\times c\times\frac{c}{2}=\frac{c^2}{4}=\frac{1}{2},\ c^2=2$$

따라서 $(a+b)\times c^2=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times2=5$

30 ④

A 제품 1개의 중량을 X라 하면
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ 0.4^2)$을 따르고
$Z=\dfrac{X-9}{0.4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포
$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
또 B 제품 1개의 중량을 Y라 하면
확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 1^2)$을 따르고
$Z=\dfrac{X-20}{1}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포
$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)=\mathrm{P}(19\le Y\le k)$에서
$\mathrm{P}\left(\dfrac{8.9-9}{0.4}\le\dfrac{X-9}{0.4}\le\dfrac{9.4-9}{0.4}\right)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{19-20}{1}\le\dfrac{Y-20}{1}\le\dfrac{k-20}{1}\right)$
$\mathrm{P}(-0.25\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le k-20)$
따라서
$\mathrm{P}(-0.25\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.25)$이므로
$k-20=0.25$에서
$k=20.25$

미적분 해설

01 ⑤

$b_n=3a_n-5n$이라 하면
$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2,\ a_n=\dfrac{b_n+5n}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2}\times\frac{b_n+5n}{3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(b_n\times\frac{1}{n}+5\right)}{12}\\&=\frac{(2+0)(2\times 0+5)}{12}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

02 ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+2}{2}=6$에서 $\dfrac{a_n+2}{2}=b_n$이라 하면
$a_n=2b_n-2$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$
따라서,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{\frac{2b_n}{n}-\frac{2}{n}+2}\\&=\frac{2\times 6-2+0}{0-0+2}\\&=5\end{aligned}$$

03 ④

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\frac{a+1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an})=\frac{5}{4}$에서 $\frac{a+1}{2\sqrt{a}}=\frac{5}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2-17a+4=0$, $(4a-1)(a-4)=0$,

$a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

04 ④

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2)(\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2)}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}+\frac{5}{n^4}}+1}=\frac{5}{2}$$

05 ①

주어진 식의 분자와 분모에 $\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}$을 각각 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1$$

06 ③

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

수열 $\{b_n\}$은 $n\geq2$일 때,

$$\frac{1}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_k}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

에서 $b_n=\frac{1}{2n-1}$이고 $b_1=1$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\frac{1}{2n-1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

07 ①

점 A_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

규칙 (나)에서 $x_{2n}=x_{2n-1}+a$, $y_{2n}=y_{2n-1}$

규칙 (다)에서 $x_{2n+1}=x_{2n}$, $y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

$x_{2n+2}=x_{2n+1}+a=x_{2n}+a$,

$y_{2n+2}=y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\}$, $\{y_{2n}\}$은 공차가 각각 a, $a+1$인 등차수열이고, 규칙 (가)에서

$x_2=x_1+a=a$, $y_2=y_1=0$이므로

$x_{2n}=a+(n-1)a=an$,

$y_{2n}=0+(n-1)(a+1)=(a+1)(n-1)$

그러므로

$$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}^2={x_{2n}}^2+{y_{2n}}^2=a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a^2+(a+1)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$에서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2+4a-15=0$, $(2a+5)(2a-3)=0$,

$a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

따라서 양수 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

08 ①

$a_n^2 < 4na_n + n - 4n^2$에서 $a_n^2 - 4na_n + 4n^2 < n$,

$(a_n - 2n)^2 < n$, $2n - \sqrt{n} < a_n < 2n + \sqrt{n}$,

$2 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{a_n}{n} < 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$이므로 수열의

극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+3}{2+\frac{4}{n}}=\frac{2+3}{2+0}=\frac{5}{2}$

09 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

$$=\frac{2\times 0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$$

10 ④

$|x|>2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}=\frac{\frac{3}{2}x-0}{1+0}=\frac{3}{2}x$$

$x=2$일 때, $f(2)=\frac{3-1}{1+1}=1$

$x=-2$일 때, $f(-2)=\frac{-3-1}{1+1}=-2$

$|x|<2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (|x|>2)\\ 1 & (x=2)\\ -2 & (x=-2)\\ -1 & (|x|<2)\end{cases}$$

$|k|>2$이면 $f(k)=\frac{3}{2}k$이므로 $|k|>2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=2$이면 $f(2)=1$이므로 $k=2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=-2$이면 $f(-2)=-2$이므로 $k=-2$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

$|k|<2$이면 $f(k)=-1$이므로 $k=-1$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

따라서 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

11 ②

직선 $y=x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의

크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 각 변은 x축

또는 y축과 평행하다.

점 P_n의 x좌표를 α_n, 점 Q_n의 x좌표를 β_n이라 하면

정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n-\beta_n|$이므로

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$ …… ㉠

α_n, β_n은 이차방정식

$x^2-2nx-2n=x+1$

$x^2-(2n+1)x-(2n+1)=0$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에

의하여 $\alpha_n+\beta_n=2n+1$, $\alpha_n\beta_n=-2n-1$

㉠에서

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$

$=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n$

$=(2n+1)^2-4(-2n-1)$

$=4n^2+12n+5$

$=(2n+1)(2n+5)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+5)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$$

12 ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$a_n=4+(n-1)d$

이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(n-1)d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d+\frac{4-d}{n}}{1}-\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$=d-3=0$

그러므로 $d=3$

이때, $a_n=3n+1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

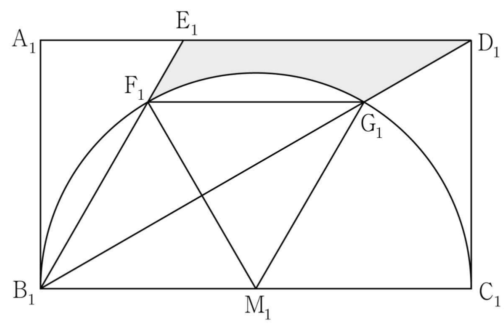
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

13 ②



선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $B_1C_1D_1$에서 $\tan(\angle C_1B_1D_1)=\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle C_1B_1G_1=\frac{\pi}{6}$이고

$\angle C_1M_1G_1=\frac{\pi}{3}$ …… ㉠

점 E_1은 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{A_1E_1}=2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $A_1B_1E_1$에서 $\tan(\angle E_1B_1A_1)=\frac{\overline{A_1E_1}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle E_1B_1A_1=\frac{\pi}{6}$

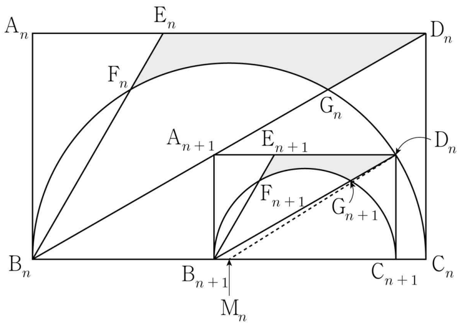
$\angle G_1B_1E_1=\frac{\pi}{2}-\angle C_1B_1G_1-\angle E_1B_1A_1=\frac{\pi}{6}$에서

$\angle G_1M_1F_1=\frac{\pi}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 삼각형 $B_1M_1F_1$, $F_1M_1G_1$은 모두 정삼각형이므로
$\angle F_1M_1B_1 = \angle M_1F_1G_1$이 되어 두 선분 F_1G_1, B_1C_1은 서로 평행하다.
삼각형 $B_1G_1F_1$의 넓이는 삼각형 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같고,
두 선분 B_1F_1, B_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같으므로

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right) - \left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}\right\}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하자.
$\overline{A_nB_n} = a_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a_{n+1}$이라 하면
$\overline{A_nB_n} : \overline{B_nC_n} = 1 : \sqrt{3}$에서 $\overline{B_nC_n} = \sqrt{3}a_n$이고
$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 1 : \sqrt{3}$에서
$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \sqrt{3}a_{n+1}$이다.
직각삼각형 $B_nB_{n+1}A_{n+1}$에서

$$\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\tan\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}a_{n+1}$$ 이므로

$$\overline{B_nC_{n+1}} = \overline{B_nB_{n+1}} + \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2\sqrt{3}a_{n+1}$$

직각삼각형 $M_nC_{n+1}D_{n+1}$에서

$$\overline{M_nC_{n+1}}^2 + \overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2 = \overline{M_nD_{n+1}}^2$$

이고 $\overline{M_nD_{n+1}} = \frac{1}{2}\overline{B_nC_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$$\left(\overline{B_nC_{n+1}} - \overline{B_nM_n}\right)^2 + \overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2 = \frac{3}{4}a_n^2$$

$$\left(2\sqrt{3}a_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2 + a_{n+1}^2 = \frac{3}{4}a_n^2$$

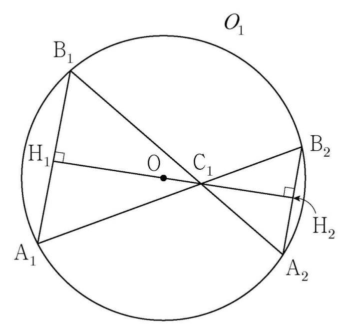
$$13a_{n+1}^2 - 6a_na_{n+1} = 0$$

$a_{n+1} = \frac{6}{13}a_n$이므로 두 사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $13 : 6$이고 넓이의 비는 $169 : 36$이다.
따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$이고 공비가 $\frac{36}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}}{1 - \frac{36}{169}} = \frac{169}{798}(8\sqrt{3} - 3\pi)$$

14 ②

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 A_1B_1, A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H_1은 선분 A_1B_1의 중점이고 점 H_2는 선분 A_2B_2의 중점이다.
또, $\overline{A_1B_1}$와 $\overline{A_2B_2}$가 서로 평행하므로 세 점 H_1, O, H_2는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1H_1} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$= 1 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.
또,

$$\angle A_1B_2A_2 = \angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$$

$\angle \mathrm{A_2C_1B_2} = \angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \dfrac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 $\mathrm{C_1A_2B_2}$는 정삼각형이다.

이때, $\overline{\mathrm{C_1A_2}} = \overline{\mathrm{B_1A_2}} - \overline{\mathrm{B_1C_1}} = 3-2=1$이므로 삼각형 $\mathrm{C_1A_2B_2}$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\times(\triangle \mathrm{A_1A_2B_1} - \triangle \mathrm{A_1C_1B_1}) \\ &= 2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

또, 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$, $\mathrm{A_2A_3B_2}$에서

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}$와 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$, $\overline{\mathrm{A_2B_1}}$와 $\overline{\mathrm{A_3B_2}}$가 각각 서로 평행하고

세 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$은 한 직선 위의 점이며

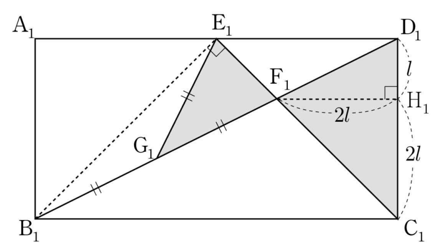
$\overline{\mathrm{A_1B_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = 1$이므로 두 삼각형

$\mathrm{A_1A_2B_1}$, $\mathrm{A_2A_3B_2}$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

15 ②



점 $\mathrm{F_1}$에서 선분 $\mathrm{C_1D_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하자.

$\overline{\mathrm{D_1H_1}} = l$ $(l>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{F_1H_1}} = \overline{\mathrm{C_1H_1}} = 2l$

$\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 3l = 1$

따라서 $l = \dfrac{1}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{D_1H_1}} = \dfrac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{F_1H_1}} = \dfrac{2}{3}$

삼각형 $\mathrm{C_1D_1F_1}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\angle \mathrm{B_1E_1F_1} = \dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{G_1E_1}} = \overline{\mathrm{G_1F_1}}$이므로

점 $\mathrm{G_1}$은 삼각형 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 외접원의 중심이다.

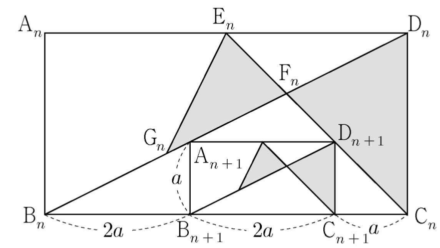
$\overline{\mathrm{B_1G_1}} = \overline{\mathrm{G_1F_1}}$이므로 삼각형 $\mathrm{G_1F_1E_1}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$배이다.

$\overline{\mathrm{B_1E_1}} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{E_1F_1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$이므로

삼각형 $\mathrm{G_1F_1E_1}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{B_1E_1}}\times\overline{\mathrm{E_1F_1}}\right) = \frac{1}{4}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

$S_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$



두 삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{F}_n$, $\mathrm{G}_n\mathrm{F}_n\mathrm{E}_n$으로 만들어진 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}} = a$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}} = 2a$, $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = 2a$, $\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n} = a$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} = 5a$

$\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = \dfrac{2}{5}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

두 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비는 $1:\dfrac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$이다.

$T_{n+1} = \dfrac{4}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\dfrac{4}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}} = \frac{25}{42}$

16 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4^x-1)-(2^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{x}$$
$$=\ln 4-\ln 2$$
$$=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$$

17 ⑤

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$

$f'(2)=(a+3)e^2=8e^2$에서 $a=5$

18 ③

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}$$
$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)}{\frac{2x}{3}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\ln\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{\frac{3}{2x}}$$
$$=\frac{2}{3}\ln e=\frac{2}{3}$$

19 ①

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$에서 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$

20 18

두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$이고

$0<m_1<m_2<1$에서 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$이다.

직선 l_3은 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이므로

$\angle\mathrm{CBA}=2\alpha$, $\angle\mathrm{BAC}=\beta-\alpha$

$\angle\mathrm{ACB}=\pi-2\alpha-(\beta-\alpha)=\pi-(\alpha+\beta)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{9}{\sin 2\alpha}=\frac{12}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}=15\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$\sin 2\alpha=\dfrac{3}{5}$이고 $0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$, $\tan 2\alpha=\dfrac{3}{4}$

$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$

$3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$

$(3\tan\alpha-1)(\tan\alpha+3)=0$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $m_1=\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$이고

$0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{3}$

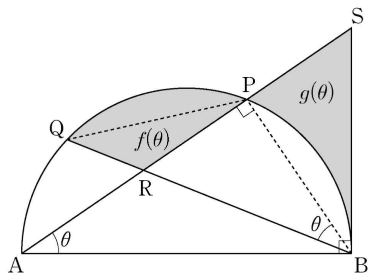
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\tan\beta}{1-\frac{1}{3}\tan\beta}=\frac{4}{3}$$

$1+3\tan\beta=4-\dfrac{4}{3}\tan\beta$

$\dfrac{13}{3}\tan\beta=3$에서 $m_2=\tan\beta=\dfrac{9}{13}$

따라서 $78\times m_1\times m_2=78\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{13}=18$

21 4



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle\text{PAB} = \angle\text{QBP} = \theta$

$\angle\text{ABS} = \angle\text{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ 이고

$\angle\text{PBA} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 $\angle\text{SBP} = \theta$

두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로 두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.

선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다.

그러므로 $f(\theta) + g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.

$\overline{\text{PB}} = \overline{\text{PQ}} = 2\sin\theta$

$$f(\theta) + g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\text{PB}} \times \overline{\text{PQ}} \times \sin(\pi - 2\theta)$$
$$= \frac{1}{2} \times (2\sin\theta)^2 \times \sin 2\theta$$
$$= 2\sin^2\theta \sin 2\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\sin^2\theta \sin 2\theta}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(2 \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \frac{\sin 2\theta}{\theta}\right)$$
$$= 2 \times \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \times \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2\right)$$
$$= 2 \times 1^2 \times 2 = 4$$

22 135

$f(x) = a\cos x + x\sin x + b$에서

$f'(x) = (1-a)\sin x + x\cos x$

$\cos x = 0$이면 $\sin x \neq 0$이고 $a < 1$이므로 $f'(x) \neq 0$

그러므로 $f'(x) = 0$이면 $\cos x \neq 0$이고

$f'(x) = 0$에서

$x\cos x = (a-1)\sin x$

$\tan x = \dfrac{x}{a-1}$ ...... ㉠

함수 $y = \tan x$의 그래프와 직선 $y = \dfrac{x}{a-1}$는 모두 원점에 대하여 대칭이고

$a < 1$에서 직선 $y = \dfrac{x}{a-1}$의 기울기가 음수이므로

$-\pi < x < \pi$에서 함수 $y = \tan x$의 그래프와 직선 $y = \dfrac{x}{a-1}$는 원점을 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 원점을 제외한 두 점의 x좌표는 α, β이고 원점을 제외한 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha = -\beta$이다.

조건 (나)에서

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{\tan\beta - \tan(-\beta)}{\beta - (-\beta)} = -\frac{\tan\beta}{\beta}$$

$\tan\beta = -1$

$0 < \beta < \pi$이므로 $\beta = \dfrac{3}{4}\pi$, $\alpha = -\dfrac{3}{4}\pi$

㉠에 $x = \dfrac{3}{4}\pi$를 대입하면

$\tan\dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{3}{4(a-1)}\pi$, $-4(a-1) = 3\pi$,

$a = 1 - \dfrac{3}{4}\pi$ ...... ㉡

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = c$에서 $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 = 0$이므로

$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (a\cos x + x\sin x + b) = a + b = 0$

$b = -a$이고

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{a(\cos x - 1) + x\sin x}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left\{\frac{a(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left\{\frac{a(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left\{-\frac{a\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x}\right\}$$
$$= -\frac{a}{2} + 1 = c$$

㉡에서 $c = -\dfrac{a}{2} + 1 = -\dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{3}{4}\pi\right) + 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\pi$

따라서

$$f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\pi=p+q\pi$$

$p=-\frac{1}{2}$, $q=\frac{13}{8}$ 이므로 $120\times(p+q)=135$

23 ③

$$\frac{dx}{dt}=2t\ln t+t+3$$

$$\frac{dy}{dt}=6e^{t-1}+6te^{t-1}=6e^{t-1}(1+t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t\ln t+t+3}\quad(2t\ln t+t+3\neq 0)$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{6\times 2}{1+3}=\frac{12}{4}=3$

24 ①

$x^2-y\ln x+x=e$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\frac{dy}{dx}\times\ln x-y\times\frac{1}{x}+1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{y}{x}+1}{\ln x}$$

그러므로 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e-\frac{e^2}{e}+1}{\ln e}=e+1$$

25 ②

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수이므로

$x=y^3+2y+3$ …… ㉠

$x=3$일 때

$3=y^3+2y+3$

$y(y^2+2)=0$

$y=0$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=(3y^2+2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+2}$$

따라서

$$g'(3)=\frac{1}{3\times 0^2+2}=\frac{1}{2}$$

26 ②

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 $f(2)=2$, $f'(2)=\frac{1}{3}$

$f(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $g(2)=2$

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}=3$$

$f(2)\neq 0$이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

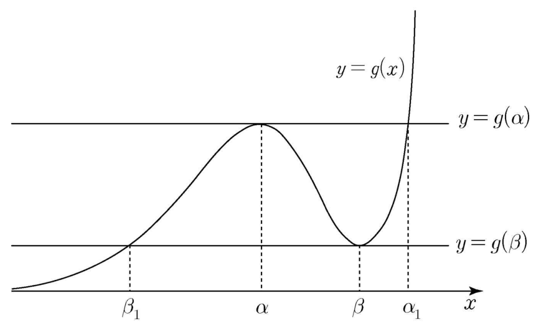
$$h'(2)=\frac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2}$$
$$=\frac{3\times 2-2\times\frac{1}{3}}{2^2}=\frac{6-\frac{2}{3}}{4}=\frac{4}{3}$$

27 129

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$$
$$=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면

$g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$는 $k=t$ $(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서

$\lim_{k\to t-}h(k)=\lim_{k\to t+}h(k)=h(t)$

그러므로 함수 $h(k)$는

$k=t$ $(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로

함수 $h(k)$는

$k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속 또는

$k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속이다.

(ⅰ) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속인 경우

$\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$

$\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1$

$h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$에서

$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$

그러므로 $\alpha=0$

함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 불연속이므로

$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\beta=1,\ g(\beta)=3e$

$g'(0)=0,\ g'(1)=0$이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$

$g(1)=3e$이므로 $a=3$

최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속인 경우

$\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\beta_1$

$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=2\beta+\beta_1$

$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$이므로

$\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$에서

$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$

그러므로 $\beta=0$

함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq 0$

조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1,\ g(\alpha)=3e$

$g'(0)=0,\ g'(-1)=0$이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$

$g(-1)=3e$이므로 $a=e^2$

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times 3e^4=129$

28 ③

$$\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$$

$$=\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx$$

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$

따라서

$$\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx=3\int_0^1 t\,dt$$

$$=3\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

29 ②

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\int_0^\pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$=\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

$$=[-x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx$$

$$=(\pi-0)+[\sin x]_0^\pi$$

$$=\pi$$

30 ③

정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$ 이므로

정사각형의 넓이는

$\left(\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}\right)^2=\dfrac{kx}{2x^2+1}$

그러므로 구하는 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx$ ...... ㉠

이때, $2x^2+1=t$로 놓으면

$4x=\dfrac{dt}{dx}$

또, $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=9$이므로 ㉠은

$\displaystyle\int_3^9 \frac{k}{4}\times\frac{1}{t}dt$

$\displaystyle=\frac{k}{4}\int_3^9 \frac{1}{t}dt$

$=\dfrac{k}{4}[\ln t]_3^9$

$=\dfrac{k}{4}\times(\ln 9-\ln 3)$

$=\dfrac{k}{4}\ln 3$

이 값이 $2\ln 3$이므로

$\dfrac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$

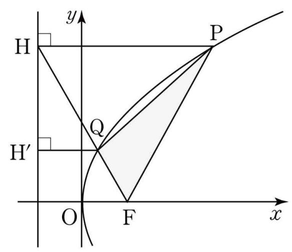
$k=8$

기하 해설

01 ②

포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
점 P와 y축 사이의 거리가 3이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 $2+3=5$
따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=5$

02 ①



점 Q에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
점 Q는 포물선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QH'}}$
조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QH}}=1:2$이므로
$\cos(\angle\mathrm{HFO})=\cos(\angle\mathrm{HQH'})=\dfrac{\overline{\mathrm{QH'}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\dfrac{1}{2}$
그러므로 $\angle\mathrm{HFO}=60°$
두 직선 PH, OF가 서로 평행하므로
$\angle\mathrm{PHF}=\angle\mathrm{HFO}=60°$
이때 삼각형 PHF는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{PFH}=\angle\mathrm{PHF}=60°$
$\angle\mathrm{FPH}=180°-(60°+60°)=60°$ 이므로
삼각형 PHF는 정삼각형이다.
이때 초점 F의 좌표가 $(p,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{FH}}=4p$
조건 (나)에서 삼각형 PQF의 넓이는 정삼각형 PHF의 넓이의 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4p)^2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $p^2=2$

따라서 $p>0$이므로 $p=\sqrt{2}$

03 384

좌표평면에서 점 F_1을 원점, 직선 A_1F_1을 x축, 직선 F_1F_2를 y축이라 하자.

포물선 P_1의 방정식을 $y^2=4p(x+p)$ $(p>0)$이라 하면

$\overline{A_1F_1}=p$, $\overline{F_1C}=2p$에서 $\overline{A_1C}=\sqrt{p^2+(2p)^2}=p\sqrt{5}$

조건 (가)에서 $p\sqrt{5}=5\sqrt{5}$ 이므로

$p=5$

두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치하므로 사각형 $A_1F_1A_2F_2$는 평행사변형이다.

포물선 P_1의 준선 l_1의 방정식은 $x=-10$이고 포물선 P_2의 준선 l_2의 방정식은 $x=10$이다.

점 B에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\overline{BH_1}+\overline{BH_2}=20$ …… ㉠

점 B는 두 포물선이 만나는 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{F_1B}=\overline{BH_1}$, $\overline{F_2B}=\overline{BH_2}$

조건 (나)에서

$\overline{BH_1}-\overline{BH_2}=\frac{48}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{BH_1}=\frac{74}{5}$, $\overline{BH_2}=\frac{26}{5}$

점 B에서 직선 F_1F_2에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=10-\overline{BH_2}=\frac{24}{5}$

직각삼각형 BF_2H에서

$$\begin{aligned}\overline{F_2H}^2&=\overline{F_2B}^2-\overline{BH}^2\\&=\left(\overline{F_2B}-\overline{BH}\right)\left(\overline{F_2B}+\overline{BH}\right)\\&=\left(\frac{26}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{26}{5}+\frac{24}{5}\right)\\&=4\end{aligned}$$

이므로 $\overline{F_2H}=2$

직각삼각형 F_1BH에서

$$\begin{aligned}\overline{F_1H}^2&=\overline{F_1B}^2-\overline{BH}^2\\&=\left(\overline{F_1B}-\overline{BH}\right)\left(\overline{F_1B}+\overline{BH}\right)\\&=\left(\frac{74}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{74}{5}+\frac{24}{5}\right)\\&=196\end{aligned}$$

이므로 $\overline{F_1H}=14$

$\overline{F_1F_2}=\overline{F_1H}+\overline{F_2H}=14+2=16$

그러므로 삼각형 BF_2F_1의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times16\times\frac{24}{5}=\frac{192}{5}$

따라서

$10S=10\times\frac{192}{5}=384$

04 ⑤

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하자.

두 초점의 좌표가 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이므로

$b^2-a^2=9$ …… ㉠

타원이 y축과 만나는 점 $(0,\ 7)$은 장축의 한 끝점이므로

$b=7$

㉠에서 $a=2\sqrt{10}$

따라서 타원의 단축의 길이는

$2a=4\sqrt{10}$

05 ①

직선 $x=-c$는 포물선의 준선이므로 $\overline{PQ}=\overline{FP}=8$

삼각형 FPQ의 넓이가 24이고 $\angle F'QP=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{F'Q}=24$에서 $\overline{F'Q}=6$

직각삼각형 PQF'에서 $\overline{F'P}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

따라서 타원의 장축의 길이는

$\overline{FP}+\overline{F'P}=8+10=18$

06 ⑤

직각삼각형 $AF'F$에서

$\overline{F'F}=\sqrt{\overline{AF'}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

이므로 두 초점 F, F′은

$F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$

이다.

타원의 성질에 의해

$2^2=a^2-5$에서

$a^2=9$

$a > \sqrt{5}$ 이므로

$a = 3$

따라서

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 2a = 6$

이므로 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} + \overline{\mathrm{F'F}} = 6 + 4 = 10$

07 ③

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$의 두 초점의 좌표는

$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$

이고 장축의 길이는 10이므로

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 10,\ \overline{\mathrm{FF'}} = 2 \times 4 = 8$ …… ㉠

세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{FF'}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{PF}} = 2(10 - \overline{\mathrm{PF}}) - 8$

$\overline{\mathrm{PF}} = 4$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} = 6$

$\overline{\mathrm{PF'}} < \overline{\mathrm{FF'}}$이므로 점 P의 x좌표를 t라 할 때,

$0 < t < 4$

점 P에서 선분 FF′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{HF}} = 4 - t,\ \overline{\mathrm{HF'}} = 4 + t$

$\overline{\mathrm{PH}}^2 = \overline{\mathrm{PF'}}^2 - \overline{\mathrm{HF'}}^2 = \overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{HF}}^2$에서

$6^2 - (4+t)^2 = 4^2 - (4-t)^2$,

$t = \frac{5}{4}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이다.

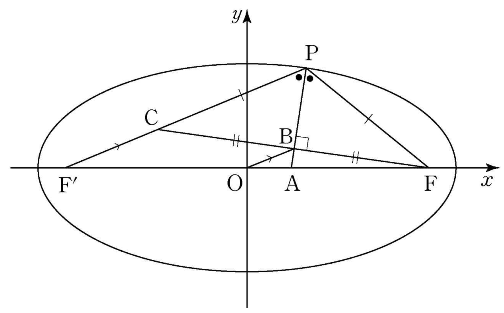
08 ③

$\overline{\mathrm{AF}} = \frac{9}{2},\ \overline{\mathrm{AF'}} = \frac{15}{2}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{PF'}} = 3 : 5$

$\overline{\mathrm{PF}} = 3k,\ \overline{\mathrm{PF'}} = 5k\ (k > 0)$이라 하자.

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 8k = 2a$

그러므로 $a = 4k$



직선 BF와 선분 PF′이 만나는 점을 C라 하면 각 CPF의 이등분선이 선분 CF와 수직으로 만나므로 삼각형 PCF는 이등변삼각형이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BF}}$

두 삼각형 FBO와 FCF′에서

$\overline{\mathrm{FB}} : \overline{\mathrm{FC}} = \overline{\mathrm{FO}} : \overline{\mathrm{FF'}} = 1 : 2$

두 삼각형 FBO, FCF′은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OB}} : \overline{\mathrm{F'C}} = 1 : 2$

$\overline{\mathrm{F'C}} = \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 5k - 3k = 2k$

$\overline{\mathrm{F'C}} = 2\overline{\mathrm{OB}} = 2\sqrt{3}$

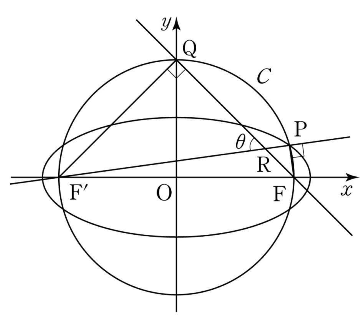
$k = \sqrt{3},\ a = 4\sqrt{3}$

$c^2 = a^2 - b^2$이므로 $36 = 48 - b^2$

$b^2 = 12,\ b = 2\sqrt{3}$

따라서 $a \times b = 24$

09 ④



두 직선 F′P, QF의 교점을 R라 하면 두 직각삼각형 QF′R, PFR가 서로 닮음이고

$\cos(\angle \mathrm{QRF'}) = \cos(\angle \mathrm{PRF}) = \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{4}{5}$

$\overline{\mathrm{QR}} = 3t\ (t > 0)$이라 할 때

$\overline{\mathrm{RF'}} = \frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\cos\theta} = 5t$,

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{RF'}}\sin\theta=4t$,
$\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QR}}=4t-3t=t$,
$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RF}}\cos\theta=\frac{3}{5}t$,
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{RF}}\sin\theta=\frac{4}{5}t$
점 P는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}&=\overline{\mathrm{RF'}}+\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{PF}}\\&=5t+\frac{3}{5}t+\frac{4}{5}t\\&=\frac{32}{5}t\end{aligned}$$
$2a=\frac{32}{5}t$에서 $a=\frac{16}{5}t$
점 F의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 할 때
$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{QF}}$에서 $c=2\sqrt{2}t$
$b^2=a^2-c^2=\frac{256}{25}t^2-8t^2=\frac{56}{25}t^2$
따라서 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\frac{56}{25}t^2}{\frac{256}{25}t^2}=\frac{7}{32}$

10 ③

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OF}}$에서 점 Q는 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이므로
$\angle\mathrm{FQF'}=\frac{\pi}{2}$
$\overline{\mathrm{FQ}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{FQ}}:\overline{\mathrm{F'Q}}=1:4$에서
$\overline{\mathrm{F'Q}}=4k$이고 타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{F'Q}}=5k$
삼각형 PF′Q의 내접원의 반지름의 길이는 2이므로
삼각형 PF′Q의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times2\times(\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}})$
$\frac{1}{2}\times4k\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times2\times\{\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{F'Q}}+(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FQ}})\}$
$2k\times\overline{\mathrm{PQ}}=(\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}})=5k+5k=10k$
이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=5$
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{FQ}}=5-k$에서
$\overline{\mathrm{F'P}}=5k-(5-k)=6k-5$이므로
직각삼각형 PF′Q에서
$(6k-5)^2=(4k)^2+5^2$
$20k^2-60k=20k(k-3)=0$, $k=3$
따라서 직각삼각형 F′QF에서
$\overline{\mathrm{F'F}}^2=\overline{\mathrm{F'Q}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2$
$(2c)^2=12^2+3^2=153$이므로
$c^2=\frac{153}{4}$, $c=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

11 ④

$4x^2-8x-y^2-6y-9=0$에서
$4(x-1)^2-(y+3)^2=4$,
$(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$
쌍곡선 $(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$은 쌍곡선
$x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은
$y-(-3)=2(x-1)$, $y=2x-5$
직선 $y=2x-5$의 x절편, y절편이 각각 $\frac{5}{2}$, -5이다.
따라서 직선 $y=2x-5$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$

12 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이므로
$2a=6$
$a=3$ …… ㉠
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은
$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$
이때, $a>0$, $b>0$이므로
$\frac{b}{a}=2$
$b=2a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=2\times3=6$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을

$F(c,\ 0),\ F'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2$

$=3^2+6^2$

$=45$

$c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$\overline{FF'}=2c=6\sqrt{5}$

13 ②

$c^2=9+16=25,\ c=5$에서 $\overline{FF'}=2c=10$이고

$\overline{FP}=\overline{FF'}=10$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이가 6이므로

$\overline{F'P}-\overline{FP}=6,\ \overline{F'P}=\overline{FP}+6=16$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

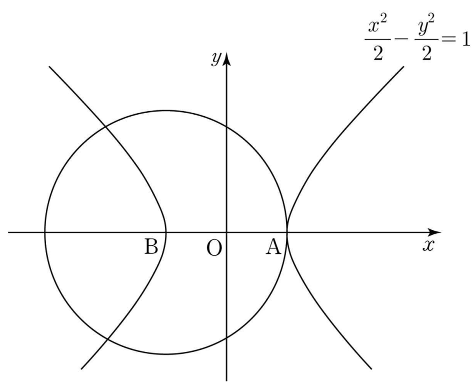
$\overline{F'P}+\overline{FF'}+\overline{FP}=16+10+10=36$

14 ④

쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 B라 하자.

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$

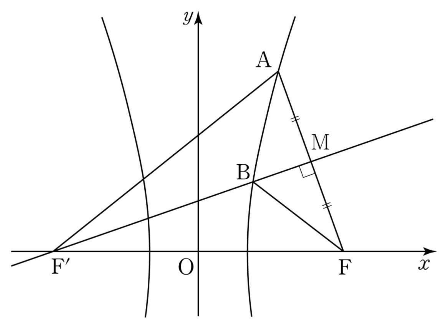
$|\overrightarrow{BP}|=k$를 만족시키는 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 쌍곡선이 만나는 점이다.



그림과 같이 점 P의 개수가 3이려면

$k=\overline{AB}=2\sqrt{2}$

15 128



그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$의 두 초점의 좌표를

$F(6,\ 0),\ F'(-6,\ 0)$이라 하자.

점 F′이 선분 AF의 수직이등분선 위의 점이므로 두 직각삼각형 AF′M, FF′M이 합동이다.

그러므로 $\overline{AF'}=\overline{FF'}=12$

점 A가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{AF'}-\overline{AF}=4$에서 $\overline{AF}=8$

점 M은 선분 AF의 중점이므로

$\overline{AM}=4$

직각삼각형 AF′M에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{MF'}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$

점 B가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{BF}=\overline{BF'}-4$이고

$\overline{BM}=8\sqrt{2}-\overline{BF'}$이므로

삼각형 BFM의 둘레의 길이는

$\overline{BF}+\overline{FM}+\overline{BM}=(\overline{BF'}-4)+4+(8\sqrt{2}-\overline{BF'})$

$=8\sqrt{2}$

따라서 $k=8\sqrt{2}$이므로 $k^2=128$

16 ④

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2(x+9)$

준선의 방정식이 $x=-1$이므로 $a=-1$

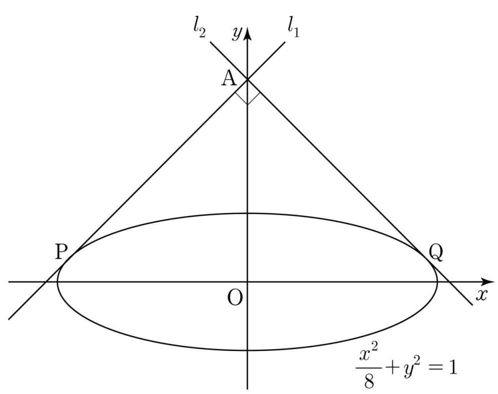
점 $(-1,\ b)$가 접선 위의 점이므로 $b=\dfrac{8}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{5}{3}$

17 21

점 P의 x좌표를 k라 하면
점 P의 좌표는 $(k,\ 2\sqrt{kp})$이다.
직선 QR는 x축과 평행하고
$\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$에서 직선 PR는 y축과 평행하므로
두 점 P, R의 x좌표는 서로 같고 두 점 Q, R의 y좌표는 서로 같다.
그러므로 두 점 R, Q의 좌표는
$R(k,\ -2\sqrt{kp})$, $Q(-p,\ -2\sqrt{kp})$
포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
$2\sqrt{kp}\,y=2p(x+k)$이고 점 Q를 지나므로
$-4kp=2p(-p+k)$, $p=3k$
$\overline{QR}=p+k=4k$에서 $\overline{RF}=\overline{FP}=4k$이고
$\overline{PR}=4\sqrt{kp}=4\sqrt{3}\,k$이므로
직각삼각형 PQR에서
$\overline{PQ}^2=(4k)^2+(4\sqrt{3}\,k)^2=64k^2$
$\overline{PQ}=8k$
사각형 PQRF의 둘레의 길이는
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RF}+\overline{FP}=8k+4k+4k+4k=140$,
$k=7$
따라서 $p=3k=21$

18 ⑤



두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로
삼각형 APQ는 직각이등변삼각형이고 직선 l_1의 기울기는 1이다.
타원 C에 접하고 기울기가 1인 직선 l_1의 방정식은
$y=x+\sqrt{8\times1^2+1}=x+3$
타원 C와 직선 $y=x+3$이 만나는 점 P의 x좌표를 k라 하면
$\frac{k^2}{8}+(k+3)^2=1$
$9k^2+48k+64=(3k+8)^2=0$에서 $k=-\frac{8}{3}$
따라서 선분 PQ의 길이는 $\frac{8}{3}\times2=\frac{16}{3}$

19 ⑤

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은
$y=x\pm\sqrt{3\times1+1}$
즉, $y=x\pm2$
직선 $y=x+2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 B이고 직선 $y=x-2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 D일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 최대이다.
두 직선 $y=x+2$, $y=x-1$ 사이의 거리를 구해 보자.
직선 $y=x+2$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면
$$d_1=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
두 직선 $y=x-2$, $y=x-1$ 사이의 거리를 구해 보자.
직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0,\ -2)$에서 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면
$$d_2=\frac{|0-(-2)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
한편, 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점 A, C의 좌표를 구하면 다음과 같다.
$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1$에서
$2x(2x-3)=0$
$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
$x=0$일 때, $y=-1$
$x=\frac{3}{2}$일 때, $y=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$
두 점 A, C가

$A\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $C(0,\ -1)$이므로

$\overline{AC} = \sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d_1 + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 3$

20 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2ax}{a^2} - \sqrt{3}y = 1$

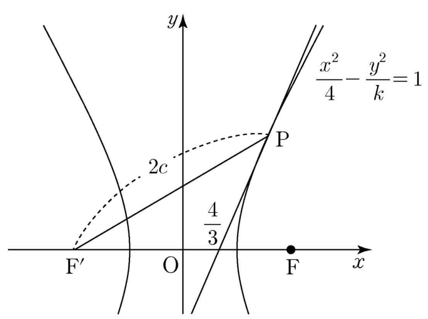
즉, $y = \frac{2}{\sqrt{3}a}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$

이 접선과 직선 $y = -\sqrt{3}x + 1$이 수직이므로

$\frac{2}{\sqrt{3}a} \times (-\sqrt{3}) = -1$

따라서 $a = 2$

21 ④



점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{4} - \frac{y_1 y}{k} = 1$

이 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{4}{x_1}$

$\frac{4}{x_1} = \frac{4}{3}$이므로 $x_1 = 3$

$\overline{PF'} = \overline{FF'}$이므로 $\sqrt{(3+c)^2 + {y_1}^2} = 2c$

${y_1}^2 = 3c^2 - 6c - 9$ …… ㉠

점 $P(3,\ y_1)$이 쌍곡선 위의 점이고 $k = c^2 - 4$이므로

$\frac{9}{4} - \frac{{y_1}^2}{c^2-4} = 1$

${y_1}^2 = \frac{5}{4}(c^2 - 4)$ …… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$3c^2 - 6c - 9 = \frac{5}{4}(c^2 - 4)$

$7c^2 - 24c - 16 = 0$, $(7c+4)(c-4) = 0$

$c > 0$이므로 $c = 4$

따라서 $k = 12$

22 13

쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{a^2} = 1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로

$\overline{PF} = k$라 하면 $\overline{PF'} = k - 2\sqrt{10}$

삼각형 F′FP는 넓이가 15인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2} \times k \times (k - 2\sqrt{10}) = 15$

$k^2 - 2\sqrt{10}k - 30 = (k - 3\sqrt{10})(k + \sqrt{10}) = 0$

$k = 3\sqrt{10}$이므로 $\overline{PF} = 3\sqrt{10}$, $\overline{PF'} = \sqrt{10}$

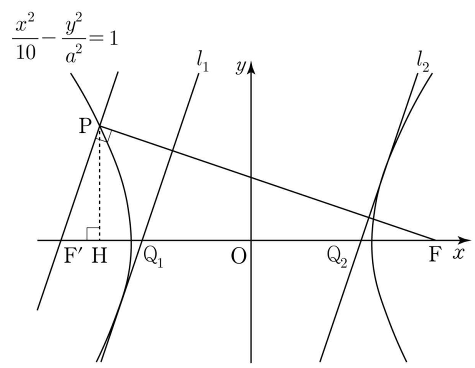
직각삼각형 F′FP에서

$\overline{F'F}^2 = (\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{10})^2 = 100$이므로

$\overline{F'F} = 2c = 10$, $c = 5$

쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{a^2} = 1$에서

$10 + a^2 = c^2 = 25$이므로 $a^2 = 15$



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 F′FP와 삼각형 F′PH는 서로 닮음이므로

직선 PF′의 기울기는

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{F'H}}=\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=3$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10\times3^2-15}=3x\pm5\sqrt{3}$이므로

$l_1 : y=3x+5\sqrt{3}$, $l_2 : y=3x-5\sqrt{3}$

에서 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각

$Q_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$, $Q_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

따라서 $\overline{Q_1Q_2}=\frac{10}{3}\sqrt{3}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$에서

$p=3$, $q=10$이므로 $p+q=3+10=13$

23 ③

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}|&=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DE}|\\&=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|\\&=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}|\\&=|\overrightarrow{BE}|=2\end{aligned}$$

24 ③

두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로

$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$

를 만족시키는 실수 l이 존재한다.

$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$에서

$3\vec{a}+k\vec{b}=l\vec{a}+2l\vec{b}$

$3=l$, $k=2l$

따라서 $k=6$

25 ①

0이 아닌 실수 k에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$이므로

$(2m-1,\ 3m+1)=(3k,\ 12k)$

$2m-1=3k$ ⋯⋯ ㉠

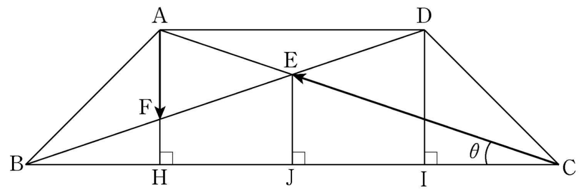
$3m+1=12k$ ⋯⋯ ㉡

따라서 두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $m=1$

26 ④

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=45°$이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=1$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BI}=3$, $\overline{DI}=1$이고

두 삼각형 △BID, △BHF는 서로 닮음이므로

$\overline{BI}:\overline{DI}=\overline{BH}:\overline{FH}$

즉, $3:1=1:\overline{FH}$

$\overline{FH}=\frac{1}{3}$

$\overline{AF}=\overline{AH}-\overline{FH}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

한편 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{BJ}=\overline{CJ}=2$, $\overline{BH}=\overline{HJ}=1$이므로

$\overline{EJ}=2\overline{FH}=\frac{2}{3}$

직각삼각형 JCE에서

$\angle JCE=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}$이고,

두 벡터 $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{CE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}+\theta$이다.

그리고 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EJ}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}&=\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{CE}\\&=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\&=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times(-\sin\theta)\\&=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times\left(-\frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}\right)\\&=-|\overrightarrow{EJ}|^2\\&=-\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&=-\frac{4}{9}\end{aligned}$$

27 ②

두 직선

$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-5}{3}$, $x-1=\dfrac{2-y}{3}$

즉,

$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-5}{3}$, $x-1=\dfrac{y-2}{-3}$

의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$라 하면

$\overrightarrow{d_1}=(4,\ 3)$

$\overrightarrow{d_2}=(1,\ -3)$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}|}{|\overrightarrow{d_1}||\overrightarrow{d_2}|}$$
$$=\frac{|4\times1+3\times(-3)|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$
$$=\frac{5}{5\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

28 ⑤

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$라 하자.

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,\ y)$

$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}=(x-6,\ y-6)$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$에서

$(x+2,\ y)\cdot(x-6,\ y-6)=0$

$(x+2)(x-6)+y(y-6)=0$

$x^2-4x-12+y^2-6y=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 10π

29 ③

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=5$에서

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=5$

$|\overrightarrow{AP}|^2=5$

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{5}$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 $A(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만나므로 점 $A(3,\ 0)$과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+k$, 즉 $x-2y+2k=0$ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

$\dfrac{|3-2\times0+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$에서

$|2k+3|=5$

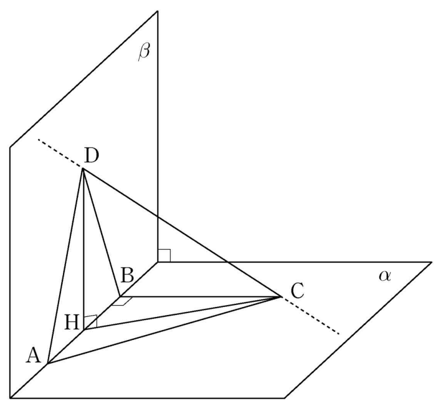
$2k+3=5$ 또는 $2k+3=-5$

$k=1$ 또는 $k=-4$

$k>0$이므로

$k=1$

30 ②



삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{29})^2-6^2}=4\sqrt{5}$

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 DAB가 이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=2\sqrt{5}$, $\overline{DH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$

삼각형 HBC가 직각삼각형이므로

$\overline{CH}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$

두 평면 α, β는 서로 수직이므로 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$

$\overline{DH}\perp\overline{AB}$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 직선 DH는 평면 α와 수직이다.

그러므로 $\angle DHC=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{14})^2}=6\sqrt{2}$

점 D의 평면 α 위로의 정사영이 점 H이므로

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

31 ④

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$이므로

$\dfrac{a+(-5)}{2}=8$, $\dfrac{1+b}{2}=3$

따라서 $a=21$, $b=5$이므로

$a+b=21+5=26$