29

2022학년도 6월 평가원(공통) 22번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 61

sol1)

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 또는 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$

$x-f(x)=t$

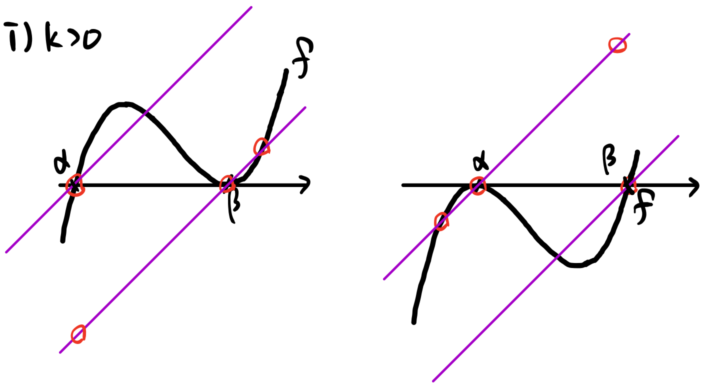
$f(t)=0$ 의 서로 다른 실근 개수 : 3

$\longrightarrow t=\alpha$ 또는 $t=\beta$

$\longrightarrow x-f(x)=\alpha$, $x-f(x)=\beta$

$\longrightarrow f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$

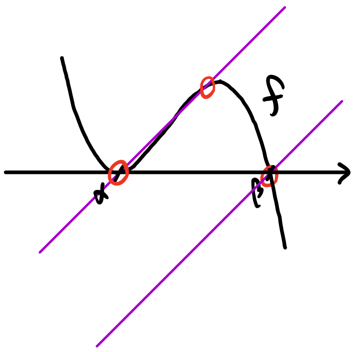
i) $k>0$

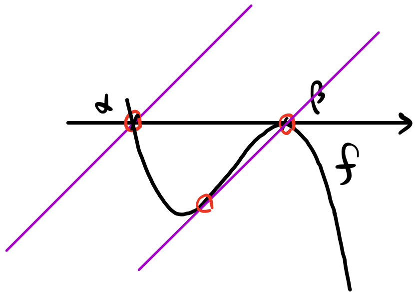


$\longrightarrow$ 모순

29 2022학년도 6월 평가원(공통) 22번

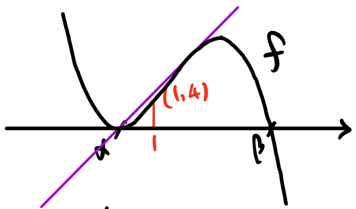
ii) $k<0$

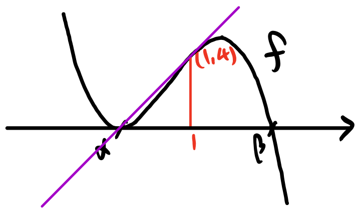




$\longrightarrow f(1)=4,\ f'(1)=1$

$\longrightarrow$ 왼쪽 그림 $(f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta))$





$\downarrow$

$f'(0)>1$ 인 지점을 잡을 수 없음.

$\therefore y=x+\alpha$ 가 $(1,4)$ 지나야 함.

$\longrightarrow \alpha=-3$

$\therefore f(x)-(x+3)=k(x-1)^2(x+3)$

$f'(x)=2k(x-1)(x+3)+k(x-1)^2+1$

$f'(-3)=16k+1=0$

$\therefore k=-\frac{1}{16}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{16}(x-1)^2(x+3)+x+3$

$\therefore f(0)=\frac{45}{16}$

$\therefore p+q=61$

29

Sol2) 현장풀이

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

나 : $x-f(x)=\alpha \longrightarrow f(x)=x-\alpha$

$x-f(x)=\beta \longrightarrow f(x)=x-\beta$

$k(x-\alpha)^2(x-\beta)=x-\alpha \longrightarrow k(x-\alpha)(x-\beta)=1$

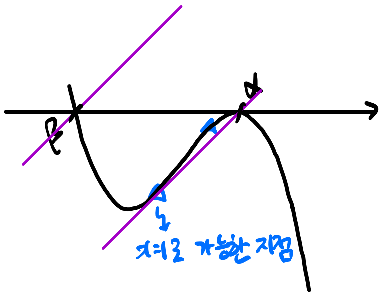
$k(x-\alpha)(x-\beta)=x-\beta \longrightarrow k(x-\alpha)^2=1$

$\longrightarrow$ α, β 가 아닌 실근이 1개 있어야 함.

$\longrightarrow$ $p>0$ 일 수 없음.

$k=\dfrac{-4}{(\beta-\alpha)^2}<0$ ($\because$ $k(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 에 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 대입)

i) $\alpha>\beta$

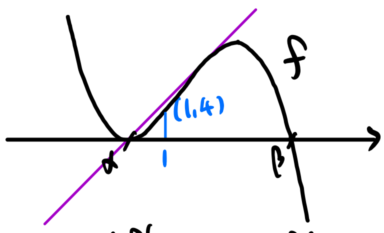


: $f(0)<0 \rightarrow$ 모순

29

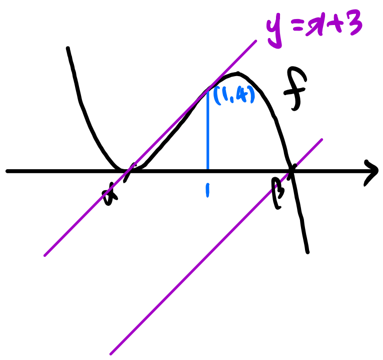
2022학년도 6월 평가원(공통) 22번

ii) $\alpha < \beta$



$\because f'(0) < 1 \longrightarrow$ 모순

$\therefore$



$\longrightarrow$ 변곡점 $= x = -\frac{1}{3}$

$\longrightarrow \beta = 5$ ($\because$ 비율관계)

$\therefore f(x) = k(x+3)^2(x-5)$

$f(1) = -64k = 4$

$\therefore k = -\frac{1}{16}$

$\therefore f(0) = \frac{45}{16}$

$\therefore p+q = 61$

29

sol3) 수식적 풀이

⋮

$f(x)-(x-\alpha)=k(x-\alpha)(x-p)^2 \quad (k<0,\ \alpha<p)$

$f'(x)-1=2k(x-\alpha)(x-p)+k(x-p)^2$

$f'(1)-1=2k(1-\alpha)(1-p)+k(1-p)^2=0$

$k(1-p)(3-2\alpha-p)=0$

i) $p=3-2\alpha$

$f'(0)-1=k(2\alpha-3)^2+2k(-\alpha)(2\alpha-3)>0$
$-3k(2\alpha-3)>0$
$\longrightarrow k<0,\ \alpha>\frac{3}{2}$

$p=-2\alpha+3<\alpha$
$\longrightarrow$ 모순

$\therefore p=1$

⋮