2019학년도 수능 대비 백인대장 모의고사

수학 영역(나형)

Final

정답 및 해설

2019학년도 수능 대비 백인대장 모의고사

Final 정답

1. ④	11. ⑤	21. ③
2. ②	12. ③	22. 35
3. ⑤	13. ⑤	23. 9
4. ①	14. ④	24. 24
5. ⑤	15. ①	25. 9
6. ②	16. ③	26. 4
7. ①	17. ④	27. 31
8. ③	18. ④	28. 21
9. ①	19. ④	29. 5
10. ④	20. ⑤	30. 90

1) ④

$\log_3 36 - \log_9 16 = \log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 9 = 2$

2) ②

$A - B = \{1,\ 2\}$이므로 $n(A-B) = 2$

3) ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2(n+1)}+3}{4^n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\times 4^n+3}{4^n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{4^n}}{1+\frac{2}{4^n}} = 4$$

4) ①

$f(3)=1$

$(f\circ f\circ f)(4) = f(f(f(4))) = 2$

5) ⑤

$\lim\limits_{n\to 1+} f(x) = 2,\ \lim\limits_{n\to -1+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{n\to -1-} f(x) = 0$

6) ②

$|x-1| \le 3$에서

$-3 \le x-1 \le 3$이므로 $-2 \le x \le 4$ ⋯ ㉠

$x^2 - 2ax + a^2 - 1 \le 0$에서

$(x-a)^2 - 1^2 \le 0,\ (x-a+1)(x-a-1) \le 0$

$a-1 \le x \le a+1$ ⋯ ㉡

이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면

㉡이 ㉠에 포함되어야 하므로 $a-1 \ge -2$이고 $a+1 \le 4$이어야 한다.

따라서 $-1 \le a \le 3$이고 실수 a의 최댓값과 최솟값은 각각

$3,\ -1$이므로 그 합은 2이다.

7) ①

세 수 중 가장 큰 값이 점수가 되므로 6점을 받기 위해서는 6은 반드시 나와야 한다.

2가 나오는 사건을 A, 6점을 받을 사건을 B라고 하면

구하고자 하는 값은 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.

2가 반드시 나오는 확률은

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{3}{7}$

2와 6이 모두 나오고 7이 나오지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B) = \dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{35}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{4}{35}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{4}{15}$

8) ③

$P(9,\ 4)$는 자연수 9를 4개의 자연수의 합으로 분할하는 경우의 수이다.

자연수 9를 4개의 자연수의 합으로 분할하면

$9 = 6+1+1+1$

$\ \ = 5+2+1+1$

$\ \ = 4+3+1+1$

$\ \ = 4+2+2+1$

$\ \ = 3+3+2+1$

$\ \ = 3+2+2+2$

이다. 따라서 $P(9,\ 4) = 6$이다.

9) ①

$$\int_0^3 (ax^2+1)dx = \left[\frac{ax^3}{3}+x\right]_0^3 = 9a+3 = 66$$

따라서 $a=7$

10) ④

$\mathrm{P}(B^C) + \mathrm{P}(A^C) = \dfrac{5}{4}$

$\mathrm{P}(A) = a,\ \mathrm{P}(B) = b$라 두자.

$(1-a)+(1-b) = \dfrac{5}{4}$

$2-(a+b) = \dfrac{5}{4}$

$a+b = \dfrac{3}{4}$

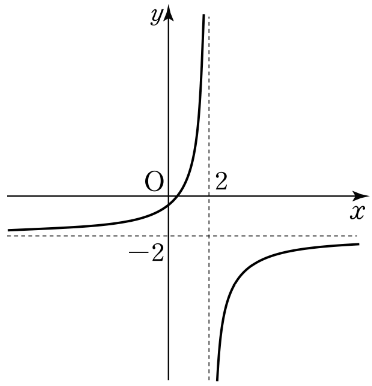
$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{4}$

11) ⑤

$y = \dfrac{-2x-2a+8}{x-2} = \dfrac{-2a+4}{x-2} - 2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=-2$이다.

(ⅰ) $-2a+4<0$



그래프가 제2 사분면을 지나지 않으려면 그림과 같이 $x=0$에서 함숫값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$\dfrac{-2a+8}{-2} \le 0$

$-a+4 \ge 0$

$\therefore\ 2 < a \le 4$

(ii) $-2a+4>0$일 때,

그래프가 항상 제2사분면을 지나지 않는다.

$\therefore\ a<2$

(i), (ii)에 의하여

$a<2$, $2<a\le 4$이므로 만족하는 자연수 1, 3, 4 이고, 그 합은 $1+3+4=8$이다.

12) ③

$\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^5$의 전개식의 x^3항은

${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r x^{5-2r}\left(\dfrac{1}{2}\right)^r$이므로

(x^3의 계수)$={}_5\mathrm{C}_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{5}{2}$

13) ⑤

$a_1=1,\ a_2=2$

$a_3=\dfrac{p}{a_1}=\dfrac{p}{1}=p$

$a_4=\dfrac{p}{a_2}=\dfrac{p}{2}$

$a_5=\dfrac{p}{a_3}=\dfrac{p}{p}=1$

$a_6=\dfrac{p}{a_4}=\dfrac{p}{\frac{p}{2}}=2$

$a_7=\dfrac{p}{a_5}=p$

$a_8=\dfrac{p}{a_6}=\dfrac{p}{2}$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ 2,\ p,\ \dfrac{p}{2}$가 반복되어 나타난다.

즉, 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}a_n=5\times\sum_{n=1}^{4}a_n=5\times\left(1+2+p+\frac{p}{2}\right)$

$=15+15\times\dfrac{p}{2}=75$

$15\times\dfrac{p}{2}=60,\ \dfrac{p}{2}=4$

따라서 $p=8$

14) ④

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k=n^2+1\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k=(n-1)^2+1\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡에서 $(2n+1)a_n=2n-1\ \ (n\ge 2)$

㉠에 $n=1$을 대입하면 $3a_1=2$, $a_1=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{2}{3} & (n=1)\\ \dfrac{2n-1}{2n+1} & (x\ge 2)\end{cases}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\log a_k=\log\left\{\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\ \cdots\ \times\frac{9}{11}\right)\right\}=\log\frac{2}{11}$

15) ①

$\hat{p}=0.8$

모비율을 추정할 때의 표준편차는 $\sqrt{\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{n}}=\dfrac{2}{5\sqrt{n}}$ 이므로

$0.056=1.96\times\dfrac{2}{5\sqrt{n}}$

$\therefore\sqrt{n}=14,\ n=196$

16) ③

$\log_a b=4\log_b a$ 에서

$\dfrac{1}{\log_b a}=4\log_b a$, $(\log_b a)^2=\dfrac{1}{4}$

$\log_b a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\log_b a=-\dfrac{1}{2}$

두 실수 a, b 가 1 보다 크므로

$\log_b a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a^{\log_b 9}=9^{\log_b a}=9^{\frac{1}{2}}=3$

17) ④

$f(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$g(n)=\dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{2n+4}{3}$

$h(n)=\dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)^2=\frac{(3n+5)(n+2)}{6}$

$f(5)\times g(8)+h(7)=139$

18) ④

(i) $|f(x)|<1$일 때, $g(x)=1$

(ii) $|f(x)|=1$일 때, $g(x)=\dfrac{2}{3}$

(iii) $|f(x)|>1$일 때, $g(x)=0$

따라서 함수 $y=g(x)$ 는

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$일 때, 불연속이다.

이차함수 $f(x)$의 x절편이 1과 3이므로

$f(x)=k(x-1)(x-3)$

y절편이 3이므로

$3=k(-1)(-3)$, $k=1$

$\therefore f(x)=x^2-4x+3$

① $f(x)=1$ 일 때

$f(x)=x^2-4x+3=1$

$\therefore\ x^2-4x-1=0$

a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의해 4

② $f(x)=-1$일 때

$f(x)=x^2-4x+3=-1$

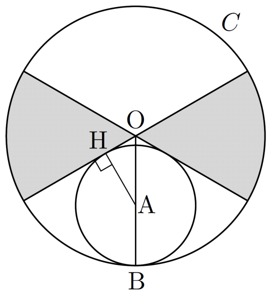
$\therefore\ x^2-4x+4=0,\ x=2$

따라서 $4+2=6$

19) ④

$S_1=\pi\times1^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\pi$

그림 R_2에서 반지름의 길이가 1인 원 C의 중심을 O, 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 중 하나에 내접하는 원의 중심을 A, 직선 OA가 원 C와 만나는 점을 B, 점 A에서 점 O를 지나는 두 직선 중 하나에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}}=r$이라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$1=\frac{2}{\sqrt{3}}r+r$ ($\because \angle\mathrm{AOH}=60^\circ$)

$\therefore\ r=2\sqrt{3}-3$

S_n은 첫째항이 S_1이고, 공비가 $2r^2$인 등비수열의 첫째항부터 n번째 항까지의 합이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-2r^2}$$
$$=\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{1-2(2\sqrt{3}-3)^2}$$
$$=\frac{41+24\sqrt{3}}{141}\pi$$

20) ⑤

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(1)=f'(1)-g'(1)=0$이고

$0<x<1$에서 $f'(x)-g'(x)>0$이고 $1<x<3$에서

$f'(x)-g'(x)<0$이므로 $x=1$에서 극대이다. (참)

ㄴ. 주어진 그래프에서 $x=0,\ 1,\ 3$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

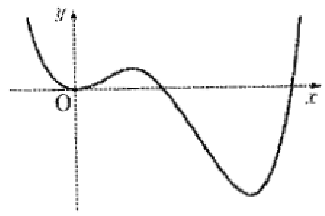
$x=0,\ 3$에서 극소, $x=1$에서 극대

$h(x)$는 사차함수이고 $f(0)=g(0)$이므로 $h(0)=0$

$h(1)>0,\ h(3)=f(3)-g(3)=f(0)-\left\{g(0)+\int_0^3 g'(x)dx\right\}$

$$=-\int_0^3 g'(x)dx<0$$

따라서 그래프 개형을 그려보면 서로 다른 3개의 근을 가진다. (참)



ㄷ. $h'(x)=ax(x-1)(x-3)$이라 하면 $(a\neq 0)$

$f'(x)=ax\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)$ ($\because\ f(0)=f(3)$)

$g'(x)=f'(x)-h'(x)$

$=ax(x-3)\left(x-\frac{3}{2}-x+1\right)=-\frac{1}{2}ax(x-3)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h'(x)}{xg'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax(x-1)(x-3)}{-\frac{1}{2}ax^2(x-3)}=-2$$ (참)

21) ③

$\alpha=4,\ \beta=5,\ \gamma=6$

$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-4)^2+1$

$f(f(x))=f(x)$이려면

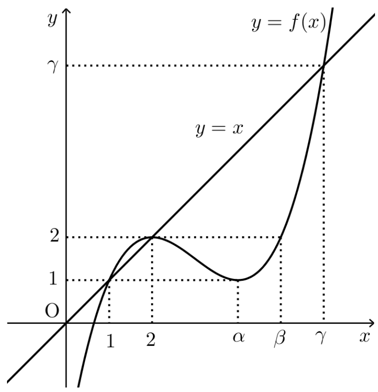
i) $f(x)=x$이거나

ii) $f(a)=a$인 a에 대하여 $f(x)=a$이다.

$f(x)=x$의 근이 $1,\ 2,\ \gamma$이므로

$f(\alpha)$과 $f(\beta)$의 값은 $1,\ 2,\ \gamma$ 중 하나이다.

위 조건과 $2<\alpha<\beta<\gamma$ 만족하는 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 $f(x)=k(x-1)(x-\alpha)^2+1\ (k\neq 0)$

으로 둘 수 있고 $f(2)=2,\ f'(2)=0$이므로 $k=\frac{1}{4},\ \alpha=4$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-4)^2+1$이므로 $f(8)=29$이다.

22) 35

$${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

23) 9

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(3)=\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^3-4x^2+9x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(2x^2-4x+9)=9$$

24) 24

집합 X는 집합 $\{2,\ 4,\ 6\}$의 한 부분집합에서 집합 A의 원소 중 2개를 포함한 집합이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2^3\times{}_3C_2=24$

25) 9

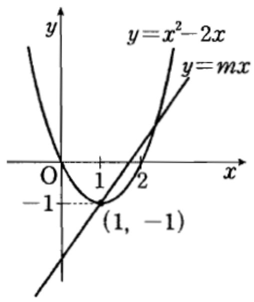
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\{f(x)-4g(x)\}=5$$

$\lim_{x\to\infty}\left\{1-4\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)+5}{f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}}{1-2\frac{g(x)}{f(x)}}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{4}}=\frac{7}{2}$$

$\therefore p+q=9$

26) 4



점 $(1,-1)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은 $y=m(x-1)-1$

직선 l 과 이차함수 $y=x^2-2x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구하면

두 직선과 이차함수의 교점은

$m(x-1)-1=x^2-2x$

$(x-m-1)(x-1)=0$ 이므로

$x=m+1$ 또는 $x=1$

$$S=\int_1^{m+1}(-x^2+2x+mx-m-1)dx$$
$$=\int_1^{m+1}\{-x^2+(2+m)x-m-1\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{(2+m)x^2}{2}-(m+1)x\right]_1^{m+1}$$
$$=-\frac{(m+1)^3}{3}+\frac{(2+m)(m+1)^2}{2}-(m+1)^2+\frac{1}{3}-\frac{(2+m)}{2}+(m+1)$$
$$=\frac{32}{3}$$

이를 정리하면

$m^3=64$, $m=4$

> 공식을 이용해도 좋다.
>
> $S=\frac{|1|}{6}(m+1-1)^3=\frac{m^3}{6}=\frac{32}{3}$
>
> $\therefore m=4$

27) 31

$a_n=2n+1$이므로

$$\frac{1}{a_k\times a_{k+1}}=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\times a_{k+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$$

$\frac{n}{3(2n+3)}>\frac{10}{63}$에서

$63n>60n+90$, $n>30$

따라서 자연수 n의 최솟값은 31이다.

28) 21

다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지면 $f(1)=0$이므로

$$f(1)=\sum_{n=1}^{6}a_n=0$$

즉, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 3회씩으로 같아야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

29) 5

$a<0$이고 조건 (가)에 의하여 $f(-1)=2+b=-1$이므로 $b=-3$이다. 따라서 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 조건 (나)에서 $g(x)=f^{-1}(x)$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 점 $(-1,\ -1)$에서 만나고

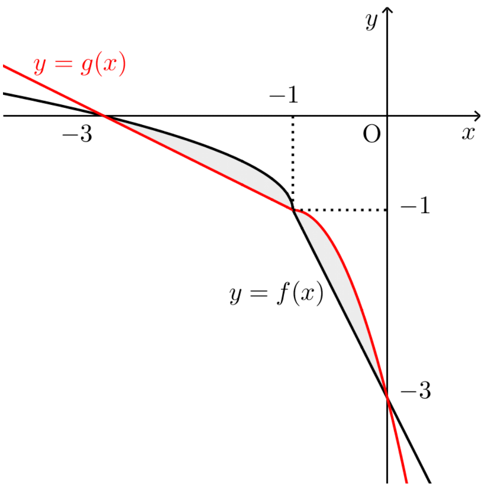
$t>-1$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 점 $(t,\ -2t-3)$에서 만나면 점 $(-2t-3,\ t)$에서도 만난다. 즉 $-t-3=-3$이 될 때, 방정식 $g(x)=0$의 실근은 $x=-3$이고

방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근이 $x=-3$, $x=-1$, $x=0$

이므로 조건 (다)를 만족시킨다. 따라서 $f(-3)=0$이므로

$a=-\frac{1}{2}$이다.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-\frac{1}{2}(x+1)}-1 & (x<-1)\\ -2x-3 & (x\ge -1)\end{cases}$$



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분은 그림과 같고

$-1 \le x \le 0$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의

2배이다.

$x\ge -1$에서 $g(x)=-2x^2-4x-3$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_{-1}^{0}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=2\int_{-1}^{0}(-2x^2-2x)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{2}{3}$$

따라서 $p+q=5$

30) 90

$F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다. $G(t)$의 불연속점이 4개 이상 이기 위해서는 $F(x)$가 극대와 극소를 모두 가져야 한다. 이 때, $F(x)$의 두 극솟값이 일치하는 경우는 5개의 불연속 점을 갖고 $F(x)$의 두 극솟값이 일치하지 않는 경우는 7개의 불연속 점을 갖는다.

함수 $\{F(x)-G(x)\}^2$가 연속함수가 되기 위해서는 $G(x)$가 $x=\alpha$에서 불연속일 때,

$$\lim_{x\to\alpha+}\{F(x)-G(x)\}^2=\lim_{x\to\alpha-}\{F(x)-G(x)\}^2=\{F(\alpha)-G(\alpha)\}^2$$

를 만족해야 하므로 $\left\{G(\alpha),\ \lim_{x\to\alpha+}G(x),\ \lim_{x\to\alpha-}G(x)\right\}=\{A,\ B\}$

$(A\ne B)$ 하면 $F(\alpha)=\frac{A+B}{2}$가 되어야 한다. 먼저 $F(x)$의 두 극솟값이 다른 경우에는 $F(\alpha)=3$인 α가 6개 이어야 하는데 이는 사차함수에서 불가능하다. 따라서 $F(x)$의 두 극솟값은 서로 같아야 한다. $G(t)$는 t가 $F(x)$의 극대, 극소점의 x좌표 값 또는 극댓값과 같은 함수값을 갖는 x의 값들에서 불연속이 된다. $F(x)$의 극댓값을 갖는 x좌표를 c라 하고 이와 같은 함수값을 갖는 점들은 x좌표를 각각 $c-d$, $c+d$라 하자. 그러면 $\{F(x)-G(x)\}^2$가 연속이 되기 위해서는 $F(c-d)=F(c)=F(c+d)=3$이어야 하고 $F(x)=(x-c)^2\{(x-c)^2-d^2\}+3$이 된다. 이 때 두 극솟점의 x좌표 값은 $c\pm\frac{d}{\sqrt{2}}$가 되고 이 때, $\{F(x)-G(x)\}^2$가 연속이 되기 위해서는 $F\left(c\pm\frac{d}{\sqrt{2}}\right)=2$를 만족해야 한다. 이를 위의 $F(x)$식에 대입하면 $d=\sqrt{2}$를 얻는다. 따라서 $F(x)$는 $c-1$, c, $c+1$에서 극값을 갖는다. $F'(2)=0$이고 $F'(1)<0$이므로 $c-1=2$이어야 하고 이를 대입하면

$F(x)=(x-3)^2\{(x-3)^2-2\}+3$, $f(x)=4(x-2)(x-3)(x-4)$

를 얻는다. $F(0)=C$로 $C=66$이 되고 $f(1)=-24$가 된다.