2019학년도 수능 대비 백인대장 모의고사

수학 영역(가 형)

Final

정답 및 해설

2019학년도 수능 대비 백인대장 모의고사

Final 정답

1. ③	11. ④	21. ⑤
2. ②	12. ③	22. 35
3. ⑤	13. ①	23. 2
4. ④	14. ④	24. 6
5. ⑤	15. ①	25. 3
6. ③	16. ④	26. 36
7. ③	17. ②	27. 7
8. ③	18. ④	28. 6
9. ③	19. ④	29. 201
10. ⑤	20. ④	30. 20

1) ③

$\vec{a}-\vec{b}=(6,\ 2)$

위 벡터의 모든 성분의 합은 $6+2=8$

2) ②

$\frac{12}{3}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(12x+1)}{12x}=4$

3) ⑤

$\mathrm{H}(1,\ 0,\ 0)$

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

4) ④

$\mathrm{P}(A)=p,\ \mathrm{P}(B)=q\ \ (p<q)$라 하면 두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=pq=\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=p+q-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$\therefore\ p+q=\frac{7}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 두 수 $p,\ q$는 이차방정식

$t^2-\frac{7}{6}t+\frac{1}{3}=0$의 두 근이다.

$6t^2-7t+2=0,\ (3t-2)(2t-1)=0$

$\therefore\ t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

따라서 $p<q$이므로 $q=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

5) ⑤

$a=3$

그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로 $a-(-1)=4,\ a=5$

최댓값: $f\left(-\frac{5}{2}\right)=6$

최솟값: $f(5)=2$

$6+2=8$

6) ③

$(x^3$의 계수$)={}_5\mathrm{C}_4\cdot1^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{2}$

7) ③

$\cos2x=2\cos^2x-1$, $\sin^2x=1-\cos^2x$이므로 주어진 식을 변형하면

$2\cos^2x-1+\cos x=1-\cos^2x$

$\cos x$에 대해 내림차순으로 정리하면

$3\cos^2x+\cos x-2=0$

$(\cos x+1)(3\cos x-2)=0$

i) $\cos x=-1$일 때, $x=\pi$

ii) $\cos x=\frac{2}{3}$일 때, 이를 만족하는 x를 $\alpha,\ \beta$라고 하면

$\beta=2\pi-\alpha$ 이다.

따라서 모든 근의 합은

$\pi+\alpha+\beta=\pi+2\pi=3\pi$

$\therefore\ p=3$

8) ③

$\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2=6^2+8^2=100$

$\overline{\mathrm{PF}}=10$

쌍곡선의 주축의 길이는 $10-6=4$이다.

9) ③

$f'(x)=ae^{ax}+\frac{\cos x}{\sin x+1}$이고 $f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=a+1=12$

10) ⑤

주어진 확률분포표로부터 $a+b=\frac{3}{4}$이고

$\frac{19}{4}=\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times b$에서 $a+9b=\frac{15}{4}$가

된다. 따라서 $a=\frac{3}{8},\ b=\frac{3}{8}$이고

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{8}=2$이다.

11) ④

$2\lim_{h\to0}\frac{g(1+2h)-g(1)}{2h}=2g'(1)$

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$일 만족하므로 $g(1)=\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$f'(x)=(-\sin x)e^{\cos x}$이므로 $\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-1$

따라서 구하고자 하는 값은 $2\times(-1)=-2$

12) ③

$k=\int_1^{\sqrt{e}}\{f(x)\}^2dx$

$=\int_1^{\sqrt{e}}x\ln x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{2}x\,dx$

$= \frac{1}{4}e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{4}$

$60k = 15$

13) ①

여섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ (가지)이다.

먼저 네 개의 문자 $a,\ a,\ b,\ b$를 나열하면 다음과 같이 6가지 경우가 있고, 나열된 문자의 사이에 두 문자 $c,\ c$를 끼워 넣으면 된다.

(ⅰ) $a,\ a,\ b,\ b \to a,\ c,\ a,\ b,\ c,\ b$와 같이 1가지

(ⅱ) $a,\ b,\ a,\ b \to$ 문자와 문자 사이 5곳 중에 두 문자 $c,\ c$를 넣으면 되므로 ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ (가지)

(ⅲ) $a,\ b,\ b,\ a \to b,\ b$ 사이에 c가 하나 반드시 들어가야 하고, 나머지 문자와 문자 사이 네 곳 중 한 곳에 c를 넣으면 되므로 ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ (가지)

(ⅳ) $b,\ b,\ a,\ a \to b,\ c,\ b,\ a,\ c,\ a$와 같이 1가지

(ⅴ) $b,\ a,\ b,\ a \to$ (ⅱ)와 같이 10가지

(ⅵ) $b,\ a,\ a,\ b \to$ (ⅲ)과 같이 4가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{1+10+4+1+10+4}{90} = \frac{1}{3}$

[다른 풀이]

같은 문자끼리는 이웃하지 않도록 여섯 개의 문자를 나열하였을 때, 정 가운데에 나열되는 두 문자는 여섯 가지 $ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$ 중 어느 하나이다.

예를 들면, □□ab□□ 와 같이 ab가 정 가운데에 위치한다면 $acabcb$, $bcabac$, $bcabca$, $cbabac$, $cbabca$와 같이 다섯 가지 경우가 나오고, 이것은 정 가운데에 나머지 $ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$ 중 어느 하나가 위치할 경우도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는

$6 \times 5 = 30$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

14) ④

$\angle\mathrm{AFE} = \alpha,\ \angle\mathrm{BFE} = \beta$라 하자.

$\overline{\mathrm{AH}} = x$라 하면 $\tan\alpha = \frac{x}{4}$, $\tan\beta = \frac{x}{8}$

$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{3}{8}x}{1-\frac{x^2}{32}} = 3$$

정리하면 $x^2 + 4x - 32 = 0$

$(x+8)(x-4) = 0,\ x = 4$

$\overline{\mathrm{AE}} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{AE}} = 4\sqrt{5}$

15) ①

$\int_0^x tf(x-t)dt = -4\sin 3x + ax$ 에서

$x - t = z$로 놓으면 $dt = -dz$,

$t = 0$일 때 $z = x$, $t = x$일 때 $z = 0$이므로

$$\int_0^x tf(x-t)dt = -\int_x^0 (x-z)f(z)dz$$
$$= \int_0^x (x-z)f(z)dz$$
$$= x\int_0^x f(z)dz - \int_0^x zf(z)dz$$

$$\therefore\ x\int_0^x f(z)dz - \int_0^x zf(z)dz$$
$$= -4\sin 3x + ax \ \cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(z)dz + xf(x) - xf(x) = -12\cos 3x + a$$

$$\therefore\ \int_0^x f(z)dz = -12\cos 3x + a \ \cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$0 = -12 + a \quad \therefore\ a = 12$

16) ④

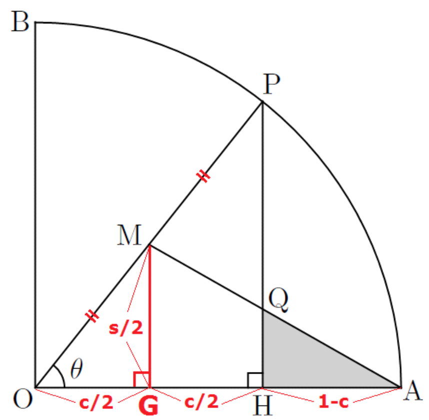
$\vec{v}$를 적분하여 점 P의 위치벡터를 구하면 $(\sin^2 t,\ \sin t + 1)$이므로, $\sin t + 1 = 2\sin^2 t$의 근을 구하면 된다.

$2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$에서 $\sin t = 1,\ -\frac{1}{2}$

두 번째로 만나는 점은 $t = \frac{7}{6}\pi$일 때이다.

17) ②

점 M에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 G라 하자.



$\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{HQ}} = \overline{\mathrm{AG}} : \overline{\mathrm{GM}}$, $\overline{\mathrm{HQ}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$

$S(\theta) = \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{AH}}\,\overline{\mathrm{HQ}} = \dfrac{\frac{1}{4}\sin\theta(1-\cos\theta)^2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5} = \frac{1}{8}$

18) ④

BABABA로 두고

각 자리에 들어갈 문자의 개수를 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$이라 할 때,

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=8$이고

$x_1 \geq 0,\ x_6 \geq 0,$
$x_2 \geq 1,\ x_3 \geq 1,\ x_4 \geq 1,\ x_5 \geq 1$

에서 ${}_6H_4=126$

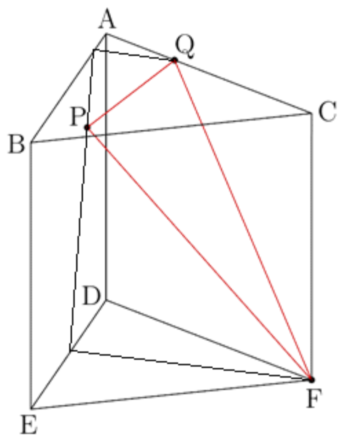
19) ④

$a=\frac{5}{12}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{2}{9}, d=\frac{11}{4}$

(나) 정육각형의 대각선 하나와 나머지 4개의 점들 중 하나를 고르면 된다.

20) ④

두 평면 PFQ와 ABED가 서로 수직이려면
세 점 P, Q, F를 평면 ABED위로 정사영 시킨
세 점 P, Q', F'이 일직선 위에 있어야 한다.
또한 두 직선 PQ, PF가 평면 ABED와 이루는 각의 크기가 서로 같기 위해서는
삼각형 PQQ'과 삼각형 PFF'이 닮음이어야 한다.
또한$\overline{QQ'}=2\sqrt{3},\ \overline{FF'}=6\sqrt{3}$이므로 닮음비는 1:3이 된다. 따라서
점 P는 점 Q'와 점 F'의 1:3 내분점이 된다.



한편 점 P, Q를 평면 DEF위로 정사영한 점들을 각각 P'', Q''이라 하면 $\overline{DQ''}=4,\ \overline{DP''}=3$이므로 삼각형 P''FQ''의 넓이는 $6\sqrt{3}$이 된다.

21) ⑤

조건 (다)에 의하여 $g(0)=0$이므로 $g(x)$가 미분가능하기 위해서는
$\lim_{h\to0+}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{g(h)}{h}$이 성립한다. 따라서 $\frac{-1}{\beta+1}=\frac{1}{\alpha+1}$이고
이를 간단히 하면 $\alpha+\beta=-2$가 된다. 변곡점의 x좌표가 1인 삼차함수 $h(x)$가 존재하여 합성 함수 $(h\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수가 되므로 일단 연속함수가 되기 위해서는
$h(\alpha)=h(\beta)=h(\gamma)$를 만족해야 하고 따라서
$h(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+c$의 꼴이다 이 함수가 변곡점의 x좌표가 1이기 위해서는 $\alpha+\beta+\gamma=3$이어야 하므로 $\gamma=5$가 된다.
조건 (나)에 의해 $\lim_{x\to0-}f'(x)=2\lim_{x\to0+}f'(x)\neq0$이고
$\lim_{x\to0+}f'(x)=\ell$이라 하면 $\lim_{x\to0-}f'(x)=-2\ell$이 된다. 한편
$h\circ f(x)$가 미분가능하기 위해서는
$\lim_{x\to0-}h'(f(x))f'(x)=\lim_{x\to0+}h'(f(x))f'(x)$를 만족해야 하고 즉,
$h'(\alpha)\times(-2\ell)=h'(\beta)\times\ell$로 $-2h'(\alpha)=h'(\beta)$를 얻는다.
따라서 $-2k(\alpha-\beta)(\alpha-5)=k(\beta-\alpha)(\beta-5)$이고
$2\alpha-\beta=5$가 된다. 위에서 $\alpha+\beta=-2$임을 알고 따라서
$\alpha=1,\ \beta=-3$을 얻는다.

22) 35

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

23) 2

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}=2f'(1)$

$f'(x)=\ln x+1$이므로

(주어진 식)$=2f'(1)=2(\ln1+1)=2$

24) 6

주어진 곡선의 방정식의 양변을 x에 대해 미분하면

$4x+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}-2\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$

$(3y^2-2x)\cdot\frac{dy}{dx}=2y-4x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-4x}{3y^2-2x}$

$(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{2-8}{3-4}=6$

25) 3

직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{d_1},\ \overrightarrow{d_2}$라 하면

$\overrightarrow{d_1}=(2,\ a),\ \overrightarrow{d_2}=(3,\ 1)$로 나타낼 수 있다.

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}|}{|\overrightarrow{d_1}||\overrightarrow{d_2}|}=\frac{|a+6|}{\sqrt{a^2+4}\times\sqrt{10}}$

$4(a+6)^2=2(10a^2+40)$

정리하면 $a^2-3a-4=0$

이를 만족하는 모든 실수 a의 값의 합은 3

26) 36

(가) 조건에서 $m=18$,

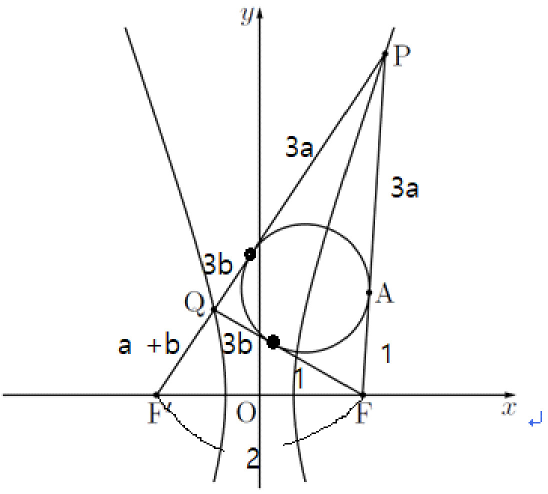
(나) 조건에서 $g(t)$의 최댓값은 $P(17\leq Z\leq19)$이고

$\mathrm{P}(17\leq X\leq19)=\mathrm{P}\left(\frac{-1}{\sigma}\leq Z\leq\frac{1}{\sigma}\right)$이고

함수 $g(t)$의 최댓값이 0.9544이므로 $\dfrac{1}{\sigma}=2$, 따라서 $\sigma=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 값은 $\dfrac{m}{\sigma}=36$

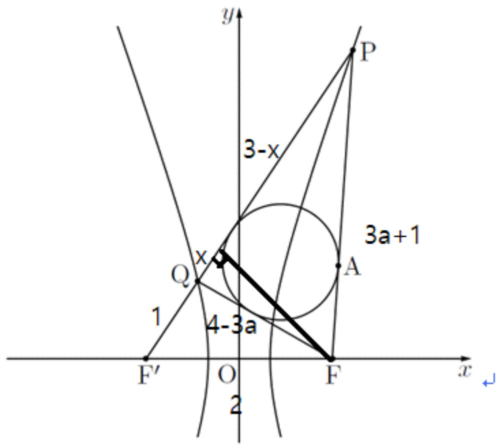
27) 7



쌍곡선의 정의를 이용하면

$(3b+1)-(a+b)=4(a+b)-(3a+1)$

$\therefore a+b=1$



$2^2-(x+1)^2=(4-3a)^2-x^2=(3a+1)^2-(3-x)^2$

$\therefore a=\dfrac{7}{9},\ x=\dfrac{1}{9},$

$\therefore \overline{PQ}\cdot\overline{PA}=3\times\dfrac{7}{3}=7$

[다른 풀이]

닮음비로 풀이해도 좋다. 즉, 삼각형 PFF'과 삼각형 FQF'이 닮음임을 이용하면

된다.

$4:3a+1=2:4-3a$

$6a+2=-12a+16$

$a=\dfrac{7}{9}$

28) 6 ($p=3,\ q=3$)

(가), (나)에서

$P_2+P_3+P_4+P_5=1$이고

$n\geq 6$에서 $P_n=0$이므로 두 상자 A, B에 들어 있는 최대의 숫자는 3이고,

두 상자 모두에 3이 들어갈 수 없다.

$P_2=\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{3\times 5}$에서 각각의 상자에 1이 1장씩 있다.

(i) 상자 A에 $(1,\ 2,\ 3)$의 카드가 있을 경우

상자 B에는 3이 들어 있을 수 없으므로 $(1,2,2,2,2)$가 된다.

이 때, $P_3=\dfrac{1\times 4+1}{15}=\dfrac{1}{3}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) 상자 A에 $(1,\ 3,\ 3)$의 카드가 있을 경우

상자 B에는 3이 들어 있을 수 없으므로 $(1,2,2,2,2)$가 된다.

이 때, $P_3=\dfrac{1\times 4}{15}=\dfrac{4}{15}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) 상자 A에 $(1,\ 2,\ 2)$의 카드가 있을 경우

상자 B에는 3이 들어 있을 수 있다. 상자 B에 들어갈 2의 개수를 m개 3의 개수를 $4-m$개라 두면

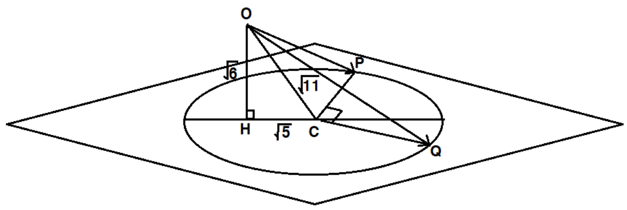
$P_3=\dfrac{1\times m+2\times 1}{15}=\dfrac{1}{5},\ \therefore m=1$

따라서 상자 B에는 $(1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3)$이 들어 있다.

29) 201

주어진 조건을 정리해서 그림으로 나타내면 다음과 같다.

단면 위에 있는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{19}$이다.



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OH}|^2+\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HQ}$

점 P와 점 Q의 중점을 N이라 하고 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HQ}$을 원의 중심 C로 분해하면

$\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HQ}=(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CP})\cdot(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CQ})=5+\overrightarrow{HC}\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ})$

$=5+2\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{CN}$

위 값이 최대가 되려면 세 점 H, C, N이 일직선 위에 있어야 한다.

$5+2\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}=5+\sqrt{190}$

따라서 최댓값은 $11+\sqrt{190}$

30) 20

$\left(a=2^{-\frac{1}{2}},\ k=\ln 2,\ \dfrac{M}{c}=2^{25}\right)$

먼저 $a\geq 1$인 경우 $F(x)=0$이 무한히 많은 실근을 갖는 것이 불가능함을 알 수 있다.(충분히 큰 L이 존재하여 $x>L$이면 ka^x가 $f(x)$보다 크게 되고 따라서 $x>L$에서 F는 감소함수가 된다.) 따라서

$0<a<1$이어야 한다. $y=f(x)$와 $y=ka^x$는 자연수 n에 대하여 구간 $[2n-2,\ 2n]$에서 많아야 2개의 교점을 가지므로 $F(x)=0$은 구간 $[2n-2,\ 2n]$에서 많아야 3개의 근을 갖는다. 따라서 $F(x)=0$이 무한히 많은 실근을 가지면 실근의 값은 무한대로 발산한다. 실수 α가 $F(x)=0$의 한 근이라 하고 $2n \le \alpha < 2n+2$를 만족하는 자연수 n을 생각하자. 그러면

$$\int_0^\alpha f(t)dt=\int_0^\alpha ka^t dt$$

를 만족하고 또한 α의 범위로부터

$$2-\frac{1}{2^{n-1}} \le \int_0^\alpha f(x)dx < 2-\frac{1}{2^n},$$

$$\frac{k}{\ln a}(a^{2n}-1) \le \int_0^\alpha ka^t dt < \frac{k}{\ln a}(a^{2n+2}-1)$$

이 성립한다. 따라서

$$2-\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{k}{\ln a}(a^{2n+2}-1),\ 2-\frac{1}{2^n} > \frac{k}{\ln a}(a^{2n}-1)$$

이 성립해야 하고 이를 정리하면

$$2\ln a+k > ka^{2n+1}+\frac{\ln a}{2^{n-1}},\ ka^{2n}+\frac{\ln a}{2^n} > 2\ln a+k$$

를 얻는다. 이러한 부등식이 충분히 큰 n에 대하여 성립하므로($n\to\infty$ 를 생각하면) $k=-2\ln a$이고 이를 다시 위의 부등식에 이를 대입하면

$$\frac{1}{2} < (2a^2)^n < \frac{1}{a}$$

를 얻는다. 따라서 $a=2^{-\frac{1}{2}}$, $k=\ln 2$임을 알 수 있다. 이 경우

$$r(x)=\begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

이라 하면

$$\int_0^2 f(x)-\ln 2\times 2^{-\frac{x}{2}}dx=\int_0^2 r(x-1)-\ln 2\times 2^{-\frac{x}{2}}dx=0$$

이고

$$\int_{2n-2}^{2n} f(x)-\ln 2\times 2^{-\frac{x}{2}}dx$$
$$=\int_{2n-2}^{2n}\frac{1}{2^{n-1}}r(x-2n+1)-\ln 2\times 2^{-\frac{x}{2}}dx$$
$$=\int_0^2\frac{1}{2^{n-1}}r(x-1)-\frac{1}{2^{n-1}}\times\ln 2\times 2^{-\frac{x}{2}}dx=0$$

임을 알 수 있다. 또한 $2n-2 \le x < 2n$인 x에 대하여

$$\int_{2n-2}^{x} f(t)-\ln 2\times 2^{-\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{x-2n+2} f(t)-\ln 2\times 2^{-\frac{t}{2}}dt$$

이 성립한다. 이를 통해 구간 $[2n-2,\ 2n]$에는 유일한 극댓값이 존재하고 이 극댓값은 $\frac{1}{2^{n-1}}M$이 된다. 양수 c에 대하여 $F(x)=c$가 정확히 51개의 양의 실수해를 갖기 위해서는 c는 26번째 극댓값과 같아야 하고 따라서 $c=\frac{M}{2^{25}}$가 된다. 이를 종합하면

$a^{12}\times e^k\times\frac{M}{c}=2^{20}$이 된다.