



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00043463424>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/9395>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex 공통

1. 닫힌구간 $[0, 12]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}, \quad g(x) = -3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1$$

이 있다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 α_1, α_2 라 할 때, $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 이다. 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 β_1, β_2 라 할 때, $|\beta_1 - \beta_2|$ 의 값은? (단, k 는 $-1 < k < 1$ 인 상수이다.)

[2023학년도 9월 09]

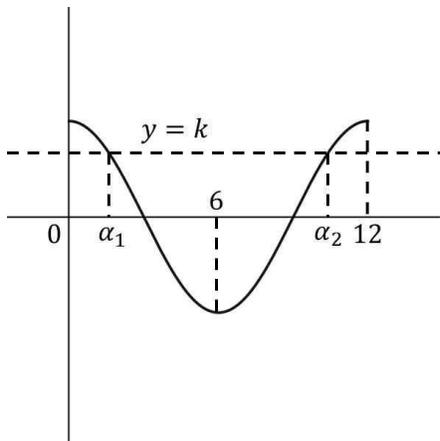
- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

1. 정답 ③ [2023학년도 9월 09]

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$[0, 12]$ 에서 $f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}$, $g(x) = -3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1$ 가 있습니다. 이때 $y = f(x)$ 와 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 α_1, α_2 라고 하네요. 일단 우리는 작은 걸 α_1 , 큰 걸 α_2 라고 부를게요. 이때 $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 라고 하네요.

일단 그래프를 그려봅시다. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}$ 는

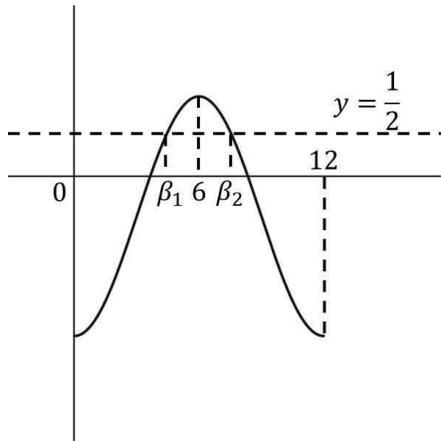


이렇게 됩니다. 이 그래프를 잘 관찰해보세요. $x = 6$ 에 대하여 대칭이죠?

그러면 $y = k$ 와 만나는 두 점의 x 좌표인 α_1, α_2 도 $x = 6$ 에 대하여 대칭이라는 말이 되겠네요. 따라서 두 점의 중점이 $x = 6$ 이니까 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 6$ 이고 $\alpha_1 + \alpha_2 = 12$ 입니다.

이때 $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 이죠? 우리는 α_2 를 더 큰 걸로 하자고 했으니까 $\alpha_2 - \alpha_1 = 8$ 입니다. $\alpha_1 + \alpha_2 = 12$ 와 연립하면 $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$ 이네요. 이걸 $y = f(x)$ 에 넣어보면 그 점에서의 y 좌표가 k 가 되겠죠? 따라서 $k = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 입니다.

이때 $y = g(x)$ 와 $y = k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표가 β_1, β_2 라 할 때 $|\beta_1 - \beta_2|$ 의 값을 구하라네요. 일단 아까랑 마찬가지로 작은 걸 β_1 , 큰 걸 β_2 라고 부를게요. 먼저 $g(x) = -3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1$ 의 경우



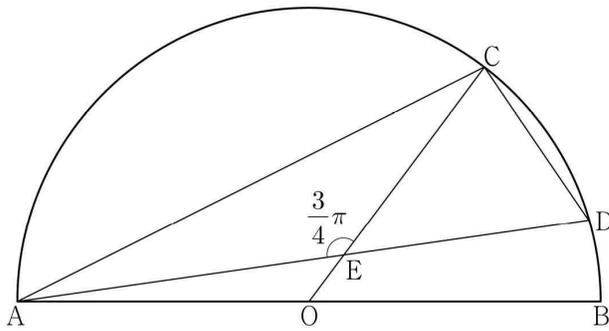
이렇게 되겠네요. $-3\cos\frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}$ 이라 하면 $\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$ 입니다.

x 는 4, 8이네요. 이게 각각 β_1, β_2 이니까 $|\beta_1 - \beta_2| = 4$ 입니다. 답은 ③번이네요.

2. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE} = 4, \overline{ED} = 3\sqrt{2}, \angle CEA = \frac{3}{4}\pi$$

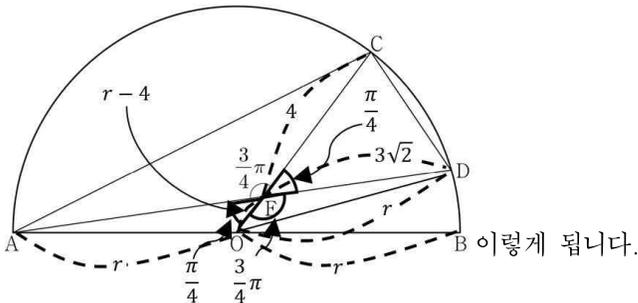
이다. $\overline{AC} \times \overline{CD}$ 의 값은? [2023학년도 9월 13]



- ① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
 ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

2. 정답 ⑤ [2023학년도 9월 13]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각 일단 문제를 이해하는 건 어렵지 않네요. 일단 점 D는 원 위의 점이니까 중심과 연결해줄게요. 그리고 $\overline{CE}=4$, $\overline{ED}=3\sqrt{2}$, $\angle CEA = \frac{3}{4}\pi$ 를 표시해보면



$\angle AEO = \frac{\pi}{4}$, $\angle DEO = \frac{3}{4}\pi$ 이라는 건 선분 AD, CO가 한 점 E를 기준으로 서로 교차된다는 걸 이용한 거예요. 또한 $\overline{OC}=r$ 인데 $\overline{CE}=4$ 이니까 나머지는 $\overline{OE}=r-4$ 가 되죠.

우리가 구해야 하는 건 $\overline{AC} \times \overline{CD}$ 이예요. 일단 \overline{CD} 는 바로 구할 수 있겠어요. 두 변의 길이와 한 각이 있죠?

바로 가봅시다. 코사인법칙을 사용하면 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4^2 + (3\sqrt{2})^2 - \overline{CD}^2}{2 \times 4 \times 3\sqrt{2}}$ 이고 $\overline{CD}^2 = 10$ 입니다.

$\overline{CD} = \sqrt{10}$ 이네요.

이제 \overline{AC} 를 구해야 합니다. \overline{AC} 가 속한 삼각형이 있네요. 바로 ACE이네요. 마침 한 각과 한 변의 길이가 있습니다. 그러면 한 각이 더 있거나 한 변의 길이가 더 있으면 되겠죠? 이때 나머지 변의 길이에 해당하는 \overline{AE} 가 속한 삼각형 OEA는 한 변의 길이와 한 각이 있네요. 그럼 이것도 나머지 하나만 찾으면 연쇄적으로 \overline{AC} 를 구할 수 있게 되겠어요.

그 옆을 보니까 삼각형 ODE는 두 변의 길이와 한 각이 있습니다. 바로 가보죠. 코사인법칙에 의하여

$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (r-4)^2 - r^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times (r-4)}$ 이고 정리하면 $r=5$ 가 나오네요.

$r=5$ 이니까 OEA는 두 변의 길이와 한 각이 밝혀졌죠? 따라서 코사인법칙을 사용하면

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{AE}^2 + 1^2 - 5^2}{2 \times \overline{AE} \times 1}$ 입니다. 정리하면 $\overline{AE} = 4\sqrt{2}$ 가 나오네요.

이제 마지막으로 코사인법칙을 사용해서 \overline{AC} 를 구해보시다. $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 4^2 - \overline{AC}^2}{2 \times 4\sqrt{2} \times 4}$ 이고

$\overline{AC}^2 = 80$ 이네요. $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$ 입니다. $\overline{AC} \times \overline{CD} = \sqrt{10} \times 4\sqrt{5} = 20\sqrt{2}$ 이네요. 답은 ⑤번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$ 인

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \int_t^{t+1} f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[2023학년도 9월 14]

————<보 기>————

ㄱ. $g(0)=0$ 이면 $g(-1)<0$ 이다.

ㄴ. $g(-1)>0$ 이면 $f(k)=0$ 을 만족시키는 $k<-1$ 인
실수 k 가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$ 이면 $g(0)<-1$ 이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

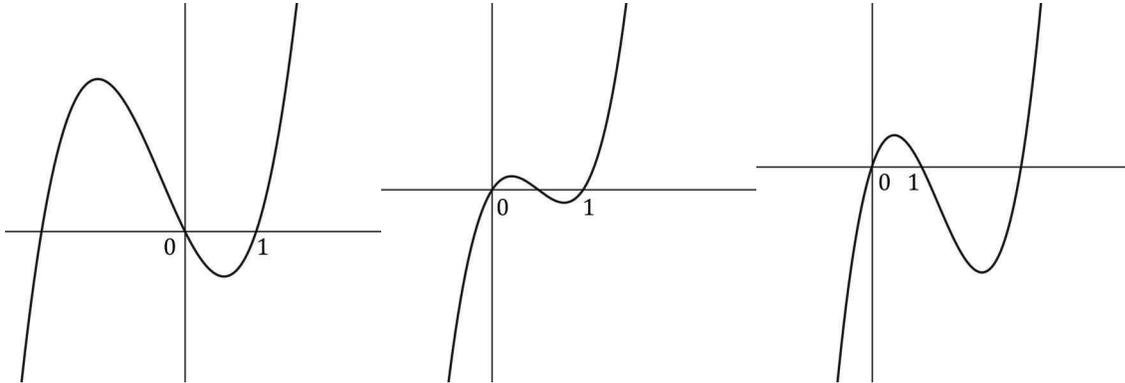
④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ⑤ [2023학년도 9월 14]

1) 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 있습니다. 이러면 개형은



이렇게 셋 중에서 하나가 되겠죠?

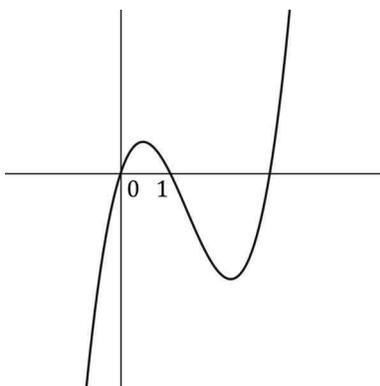
이때 $g(t) = \int_t^{t+1} f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$ 가 있네요. 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있어서 이걸 함부로

미분하거나 할 수는 없을 것 같습니다. 거기에 $\int_0^1 |f(x)|dx$ 는 사실상 상수 취급하면 되겠어요.

그러면 $g(0)=0$ 이면 $g(-1) < 0$ 이냐고 묻네요. $g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx = 0$ 이라는 거고 이러면

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx$ 이라는 거죠? 그러니까 사실상 0부터 1의 범위에서 $f(x)$ 에 절댓값을 씌우나 안

씌우나 정적분값이 같아진다는 거니까 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) > 0$ 이어야 하겠네요. 그래야 절댓값을 벗겨도 그대로 $f(x)$ 가 나오니까요. 위의 세 번째 케이스죠?



이거예요.

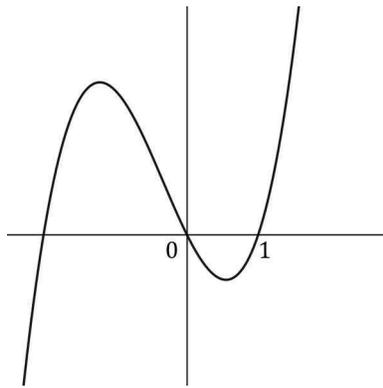
이때 $g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$ 인데 $\int_{-1}^0 f(x)dx$ 는 무조건 음수입니다. $\int_0^1 |f(x)|dx$ 은 무조건 양수죠. 절댓값을 씌우고 정적분을 했으니깐요. 그런데 지금 앞에 (-)가 붙어 있으니깐 전체값은 무조건 음수가 나오게 됩니다. $g(-1) < 0$ 맞네요. ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $g(-1) > 0$ 이면 $f(k) = 0$ 를 만족시키는 $k < -1$ 인 실수 k 가 존재하냐고 묻네요. 일단

$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$ 인데 이게 0보다 커야 하니까 $\int_{-1}^0 f(x)dx > \int_0^1 |f(x)|dx$ 입니다. 이때

$\int_0^1 |f(x)|dx$ 는 무조건 양수니까 $\int_{-1}^0 f(x)dx > \int_0^1 |f(x)|dx > 0$ 이죠? 개형 중에서 $\int_{-1}^0 f(x)dx$ 가 양수가

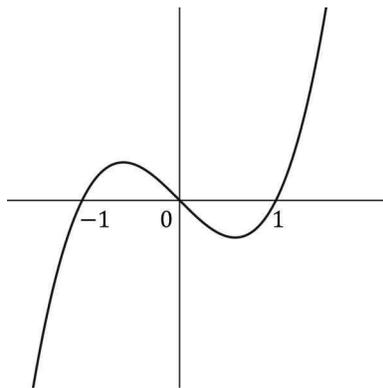
되는 개형은 첫 번째입니다.



이거 말이죠.

이때 $\int_{-1}^0 f(x)dx > \int_0^1 |f(x)|dx$ 를 만족시켜야 합니다. 여기서 잘 생각을 해볼게요. 왜 하필 $k < -1$ 일까요?

만약에 $k = -1$ 이라면?



이런 그래프가 됩니다. 이 개형은 정확히 변곡점이 원점인 함수입니다. 다시

말하면 원점 대칭 함수라는 거죠. 이러면 $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx = -\int_0^1 f(x)dx$ 가 됩니다. 그런데

-1부터 0까지의 정적분값이 더 커야 하잖아요? 이러면 0과 1을 제외한 나머지 x 축과 만나는 x 좌표인 k 가 -1보다 더 작아져서 더 정적분값을 키워야겠네요. ㄴ도 맞습니다.

2) ㄱ, ㄴ, ㄷ 유기성, 함수 구하기 - 인수정리

ㄷ에서 $g(-1) > 1$ 이면 $g(0) < -1$ 이냐고 묻네요. 일단 $g(-1) > 1$ 이라는 건 ㄴ에서 말했던 $g(-1) > 0$ 인 경우에 해당하죠? 따라서 $f(k) = 0$ 를 만족시키는 $k < -1$ 인 실수 k 가 존재합니다. 그리고 개형 역시 같은 걸 사용할 수 있겠구요.

$$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx > 1 \text{인데 이때 } \int_0^1 |f(x)| dx = - \int_0^1 f(x) dx \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx > 1 \text{입니다.}$$

이때 $f(x)$ 는 $f(k) = f(0) = f(1) = 0$ 이므로 인수정리에 의하여 $f(x) = x(x-1)(x-k)$ 라 할 수 있죠? 전개하면

$$f(x) = x^3 - (k+1)x^2 + kx \text{입니다. } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 - (k+1)x^2 + kx dx \text{이죠. 기함수 정적분할 때}$$

홀수차항은 다 지우고 시작할 수 있잖아요? 따라서

$$\int_{-1}^1 - (k+1)x^2 dx = \left[-\frac{(k+1)}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{3}(k+1) > 1 \text{이고 } k < -\frac{5}{2} \text{입니다.}$$

$$\text{한편 } g(0) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx \text{인데 } \int_0^1 |f(x)| dx = - \int_0^1 f(x) dx \text{이므로 } g(0) = 2 \int_0^1 f(x) dx \text{이네요.}$$

$$\text{계산해볼까요? } 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x^3 - (k+1)x^2 + kx dx = 2 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{(k+1)}{3} x^3 + \frac{k}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} k - \frac{1}{6} \text{입니다.}$$

그런데 $k < -\frac{5}{2}$ 이니까 $g(0) = \frac{1}{3} k - \frac{1}{6} < -1$ 이네요. 맞네요! ㄷ도 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은

⑤번이네요.

4. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k 에 대하여 $a_{4k} = r^k$ 이다.

(단, r 는 $0 < |r| < 1$ 인 상수이다.)

(나) $a_1 < 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m| \geq 5$ 를 만족시키는 100 이하의 자연수 m 의 개수를 p 라 할 때, $p + a_1$ 의 값은? [2023학년도 9월 15]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

4. 정답 ③ [2023학년도 9월 15]

1) 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건 해석

일단 먼저 (가)조건에서 모든 자연수 k 에 대하여 $a_{4k} = r^k$ 라고 합니다. 이때 $-1 < r < 1$ ($r \neq 0$)이라고 하네요. 일단 대충 넣어보면 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$, $a_{12} = r^3$, ... 이런 식으로 4를 주기로 등비수열이 되는 수열인가봐요.

(나)조건에서 $a_1 < 0$ 이고 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$ 이라고 합니다. 조금만 고쳐보면

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (-5 < a_n < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (a_n \geq 5, a_n \leq -5) \end{cases} \text{이네요.}$$

그리고는 $|a_m| \geq 5$ 를 만족시키는 100 이하 자연수 m 의 개수를 p 라 하면 $p + a_1$ 을 구하래요.

일단 (나)조건을 보면 5와 -5를 기준으로 어떤 라인을 따라가는지가 달라집니다. 이때 (가)조건을 생각해 보세요. $a_4 = r$, $a_8 = r^2$, $a_{12} = r^3$, ... 였는데 $-1 < r < 1$ 이라고 했었죠? 공비가 $-1 < r < 1$ 이면 무조건 그 수열은 -1과 1 사이에 있게 됩니다. 0.9를 계속 곱한다고 생각해 보세요. 계속 곱해도 절대로 1보다 커지지 않습니다.

그럼 무조건 $a_{4n+1} = a_{4n} + 3$ 이 되겠네요. 따라서 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$, $a_{12} = r^3$, ... 이면서 $a_5 = r + 3$, $a_9 = r^2 + 3$, $a_{13} = r^3 + 3$, ... 입니다.

이때 다시 한 번 생각해 보세요. $-1 < a_{4n} < 1$ 이라면 $-5 < a_{4n} + 3 = a_{4n+1} < 5$ 아닌가요? $-1 < a_{4n} < 1$ 에 3을 더했다고 해서 -5와 5 밖으로 넘어가진 못하잖아요. 따라서 $a_{4n+2} = a_{4n+1} + 3$ 가 됩니다.

$a_6 = r + 6$, $a_{10} = r^2 + 6$, $a_{14} = r^3 + 6$, ... 이네요.

여기서 다시 생각해볼게요. $-1 < a_{4n} < 1$ 이라면 $5 < a_{4n} + 6 < 7$ 이잖아요? 이러면 5를 넘게 되네요? 따라서

$$a_{4n+3} = -\frac{1}{2}a_{4n+2} \text{가 됩니다. } a_7 = -\frac{1}{2}(r+6), a_{11} = -\frac{1}{2}(r^2+6), a_{15} = -\frac{1}{2}(r^3+6), \dots$$

여기서 한 번 더 가죠! $5 < a_{4n} + 6 < 7$ 이니까 $-\frac{7}{2} < -\frac{1}{2}(a_{4n} + 6) < -\frac{5}{2}$ 이죠? 이걸 -5 와 5 사이네요?

따라서 $a_{4n+4} = a_{4n+3} + 3$ 이고

$$a_8 = -\frac{1}{2}(r+6)+3, a_{12} = -\frac{1}{2}(r^2+6)+3, a_{16} = -\frac{1}{2}(r^3+6)+3, \dots \text{입니다.}$$

이러면 아까 구했던 $a_4 = r, a_8 = r^2, a_{12} = r^3, \dots$ 와 겹치네요? $-\frac{1}{2}(r+6)+3 = r^2$ 이고 정리하면

$$r^2 + \frac{1}{2}r = r\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0 \text{입니다. } -1 < r < 1 \text{ (} r \neq 0 \text{)} \text{이므로 } r = -\frac{1}{2} \text{이네요.}$$

값을 정리해보죠. $a_4 = -\frac{1}{2}, a_5 = \frac{5}{2}, a_6 = \frac{11}{2}, a_7 = -\frac{11}{4}, a_8 = \frac{1}{4}, a_9 = \frac{13}{4}, a_{10} = \frac{25}{4}, \dots$ 입니다.

뒤로도 가볼까요? $a_3 = -\frac{7}{2}$ ($-5 < a_3 < 5$) 이거나 $a_3 = 1$ ($a_3 \geq 5, a_3 \leq -5$)인데 조건을 만족시키는 건

$$a_3 = -\frac{7}{2} \text{이네요.}$$

$a_2 = -\frac{13}{2}$ ($-5 < a_2 < 5$) 이거나 $a_2 = 7$ ($a_2 \geq 5, a_2 \leq -5$)인데 조건을 만족시키는 건 $a_2 = 7$ 입니다.

$a_1 = 4$ ($-5 < a_1 < 5$) 이거나 $a_1 = -14$ ($a_1 \geq 5, a_1 \leq -5$)인데 아까 $a_1 < 0$ 이라고 했었죠? 따라서

$$a_1 = -14 \text{입니다.}$$

2) 규칙 찾으면 일반화

패턴을 파악해보세요. a_{4n}, a_{4n+1} 은 -5 와 5 사이이다가 a_{4n+2} 에서 5 를 넘어버리고, a_{4n+3}, a_{4n+4} 에서 다시 -5 와 5 사이가 되는 패턴이네요. 이게 계속 반복이 돼요, 따라서 $2, 6, 10, 14, \dots$ 에서 5 를 넘어버립니다.

따라서 $a_1 = -14, p = 26$ 이므로 더하면 12 입니다. 답은 ③번이네요.

5. 상수 $k(k < 0)$ 에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,

두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자.

$30 \times S$ 의 값을 구하시오. [2023학년도 9월 20]

5. 정답 80 [2023학년도 9월 20]

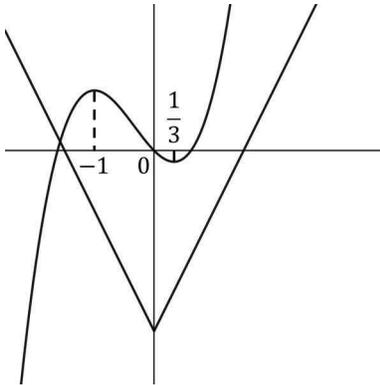
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 문제해석

음의 상수 k 가 있는데 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 2입니다.

일단 관찰부터 해보죠. $f(x)$ 는 $f(x)=x(x^2+x-1)$ 이라서 $x=0$ 에서 x 축을 지나구요, 미분하면

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$ 이니까 $x=-1$ 에서 극대, $x=\frac{1}{3}$ 에서 극소가 되는 함수입니다.

$g(x)$ 는 $x=0$ 을 기준으로 V자 모양의 함수이구요, 거기에 k 값에 따라 오르락내리락하는 함수네요. 대충



이렇게 되겠어요.

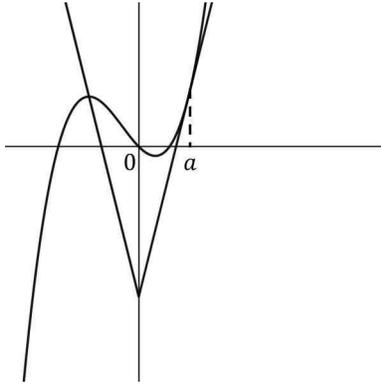
일단 먼저 확인해야 하는 게 변곡점에서의 접선의 기울기예요. 왜냐하면 접선의 기울기가 -4 가 되면 접할

가능성이 생기거든요. $f'(x)=3x^2+2x-1$ 을 다시 한 번 미분하면 $f''(x)=6x+2$ 이고 $x=-\frac{1}{3}$ 에서 변곡점을

가지게 됩니다. $f'(-\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 와 변곡점에서는 접하지 않겠네요.

이제 만나는 점의 개수가 2가 되려면 어떻게 해야 하는지 확인해봅시다. k 는 음수이므로 무조건 $x < 0$ 부분에서는 한 번 만나게 되어 있습니다. 그래프에서 $g(x)$ 를 움직여 확인해보세요. 그럼 관건은 $x > 0$ 부분인데 여기는 두 번 만나거나, 한 번 만나거나, 아예 안 만나는 케이스가 있네요. 우리는 $x > 0$ 에서도 한 번 만나야 총 두 번 만나게 되는 거잖아요? 따라서 $x > 0$ 에서는 한 번만 만나게 하면 됩니다.

그래프를 움직여보세요.



이렇게 될 때죠?

$x = a$ 에서 접할 때 접선의 기울기는 4여야 합니다. $g(x)$ 의 $x > 0$ 에서의 기울기가 4이니깐요. 따라서 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 4$ 라고 하면 $3x^2 + 2x - 5 = (x-1)(3x+5) = 0$ 이므로 $a = 1$ 입니다. 접하는 점에서의 $f(x)$ 의 함숫값은 1이므로 $g(1) = 1$ 이구요, $4 + k = 1$ 이므로 $k = -3$ 입니다.

이제 두 함수로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해보도록 하죠. 먼저 어느 부분에서 만나는지를 알아야 합니다.

$x > 0$ 에서는 $x = 1$ 에서 만나는 걸 방금 확인했으니 $x < 0$ 을 확인해야겠네요. $x < 0$ 일 때

$g(x) = -4x - 3$ 이므로 $x^3 + x^2 - x = -4x - 3$ 이라 하면 $x^3 + x^2 + 3x + 3 = (x+1)(x^2 + 3) = 0$ 이고

$x = -1$ 이네요.

이때 $g(x)$ 는 $x = 0$ 을 기준으로 함수가 바뀌는 걸 고려해주면 결국 구하는 값은 $x < 0$ 에서는

$f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 3x + 3$ 를 -1 부터 0 까지 정적분하고, $x > 0$ 에서는 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ 을 0 부터 1 까지 정적분해주면 되겠네요. 따라서

$\int_{-1}^0 x^3 + x^2 + 3x + 3 dx + \int_0^1 x^3 + x^2 - 5x + 3 dx$ 입니다. 계산하면 답은 $S = \frac{8}{3}$ 이네요. $30S = 80$ 입니다.

6. 최고차항의 계수가 1이고 $x = 3$ 에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x) + 2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 가 $t = a$ 에서 불연속인 a 의 값이 두 개일 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오. [2023학년도 9월 22]

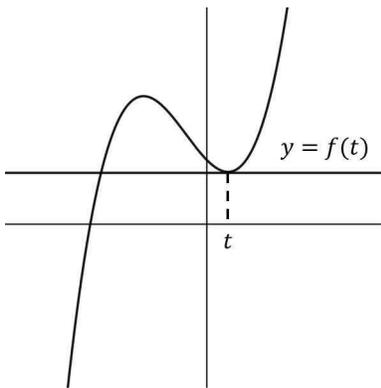
6. 정답 58 [2023학년도 9월 22]

1) 문제해석

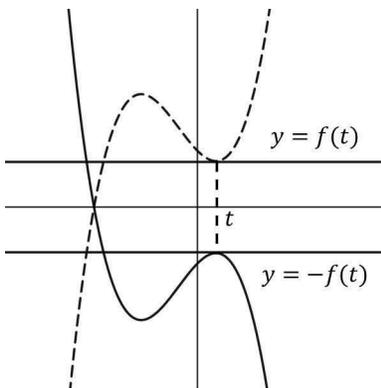
최고차항의 계수가 1이고 $x=3$ 에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수가 있습니다. 일단 $f(3)=8$, $f'(3)=0$ 이죠?
그리고 최고차항의 계수가 양수인데 $x=3$ 에서 극댓값을 갖는다고 했으니까 극소가 되는 x 는 3보다는 커야
합니다. 대충 개형은 그럴 수 있겠죠?

이때 $g(x)$ 는 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$ 이라고 합니다. 어디서 많이 본 듯한 형태네요. 일단 해석부터

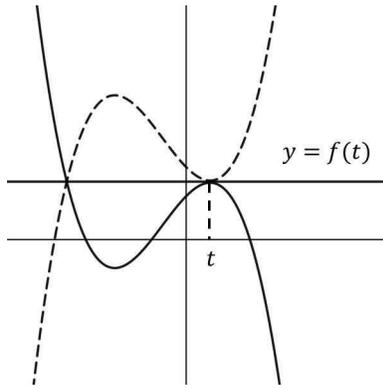
해보죠. $x \geq t$ 일 때는 $g(x)=f(x)$ 입니다. 그냥 $f(x)$ 그대로 두면 되네요. 그런데 $x < t$ 일 때는
 $g(x)=-f(x)+2f(t)$ 입니다. 일단



이런 함수를 설정해볼게요. 일단 먼저 (-)를 곱해야 합니다.



이후에는 $f(t)$ 만큼 두 번 위로 올리면 되겠네요.



이렇게! $y = f(t)$ 를 축으로 해서 뒤집은 모양이죠? 그리고 난 후 $x < t$

부분만 찢르면 됩니다. 이게 $g(x)$ 네요.

정리하면 $x \geq t$ 부분은 그대로 두고, $x < t$ 부분은 $y = f(t)$ 를 축으로 해서 뒤집은 함수입니다.

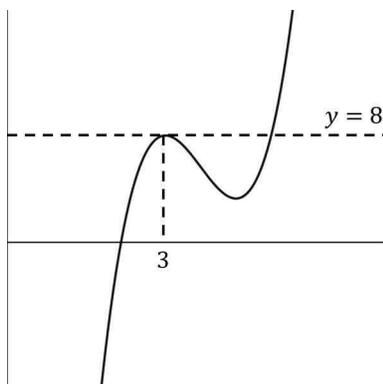
2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이런 함수가 있는데 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자고 하네요. 이걸 다시 말하면 $y = g(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 개수죠? 이때 $h(t)$ 가 $t = a$ 에서 불연속인 a 의 값이 두 개일 때 $f(8)$ 의 값을 구하랍니다.

$h(t)$ 가 불연속이라는 건 무슨 말일까요? 일단 불연속은 좌극한, 우극한, 함숫값 중 어느 하나라도 같지 않은 상태를 말합니다. 결국 $x = t$ 를 설정할 때 $y = g(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 개수가 변하는 지점을 말하는 거죠. 그게 두 개 존재해야 한답니다.

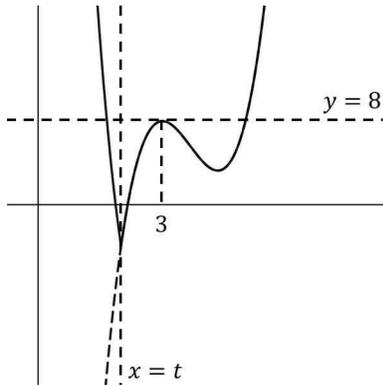
이제 제대로 $f(x)$ 를 설정해서 $g(x)$ 를 그려보죠. 일단 문제에서 물어보는 포인트가 $g(x)=0$ 이 되는 부분이잖아요? 자연스럽게 x 축과 만나는 부분에 집중할 수밖에 없어요. 극댓값은 8으로 양수인데, 극솟값은 양수일까요? 0일까요? 아니면 음수일까요?

만약 극솟값이 양수라면



이런 그래프가 그려질 거예요. 이제 t 를 설정하고 $g(x)$ 를 그려봅시다. 그리는

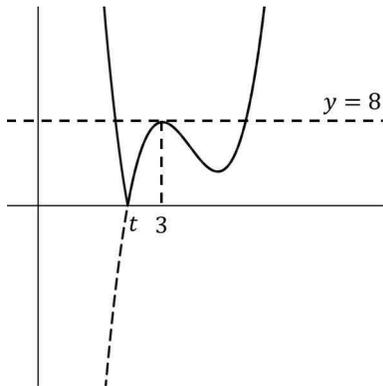
방법은 아까 말했듯이 $x \geq t$ 부분은 그대로 두고, $x < t$ 부분은 $y = f(t)$ 를 축으로 해서 뒤집으면 됩니다.



이렇게 $x = t$ 를 잡으면 $g(x)$ 는 그림과 같이 그릴 수 있습니다. $h(t)$ 는

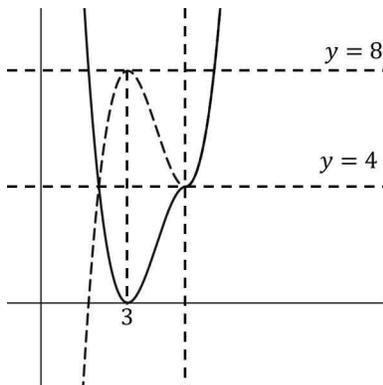
$y = g(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수니까 $h(t) = 2$ 입니다.

t 가 어어어엄청 작을때부터 $f(x) = 0$ 이 되는



이때 직전까지는 $h(t) = 2$ 이다가, 이때 딱 $h(t) = 1$ 이 됩니다. 그리고 t 가

여기서 더 커지면 $h(t) = 0$ 이 되죠. x 축과 만나는 점의 개수가 변하네요? 이후에는?



이때 다시 $h(t) = 1$ 이 되면서 불연속이 됩니다. 이후에는 계속 $h(t) = 0$ 이구요.

불연속점이 딱 두 개네요? 이 개형입니다.

3) 함수 구하기 - 차함수

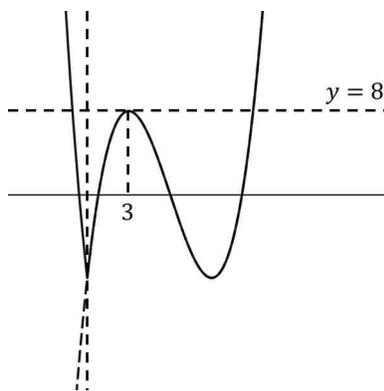
먼저 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 $y = 8$ 에 접하므로 차함수에 의하여 $f(x) - 8 = (x - 3)^2(x - a)$ 라 할 수 있습니다.

$f(x) = (x-3)^2(x-a) + 8$ 인데 $x = \frac{2a+3}{3}$ 에서 극소이므로

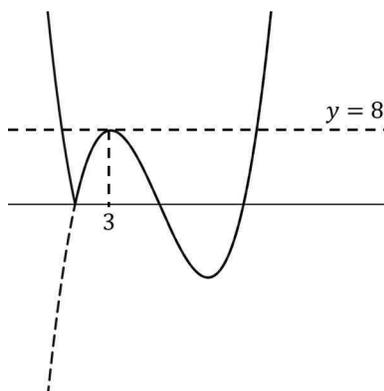
$f(x) = \left(\frac{2a-6}{3}\right)^2\left(\frac{-a+3}{3}\right) + 8 = -\frac{4(a-3)^3}{3^3} + 8 = 4$ 입니다. 정리하면 $a = 6$ 입니다.

$f(x) = (x-3)^2(x-6) + 8$ 이고 $f(8) = 58$ 이네요.

추가적으로 나머지 케이스는 왜 안 되는지도 살펴볼게요! 극솟값이 음수일 때는

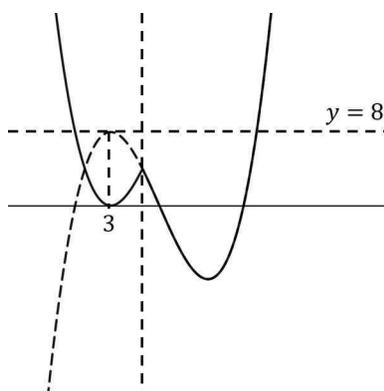


t 가 어어어엄청 작을 때는 이렇게 $h(t) = 4$ 이다가



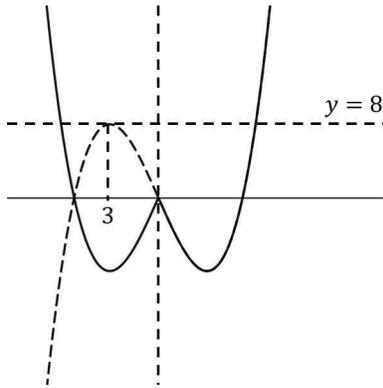
이러면 $h(t) = 3$ 입니다. 일단 불연속점 하나 생겼죠? 이후엔 x 축과 2개의

점에서만 만나니까 $h(t) = 2$ 이다가,



이때 다시 $h(t) = 3$ 이 됩니다. 불연속점이 벌써 두 개네요. 이후에는 x 축과

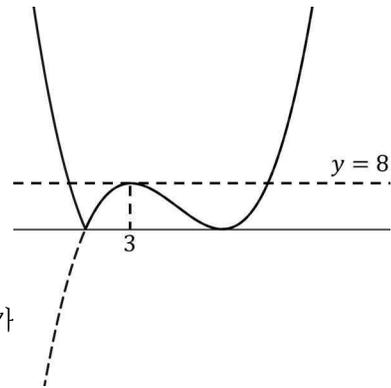
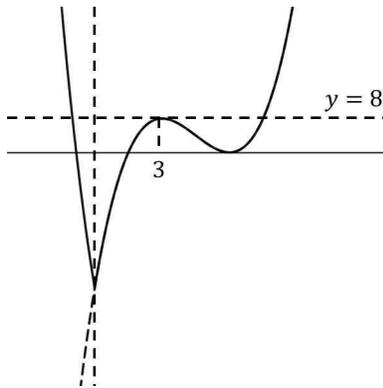
4개의 점에서 만나니까 $h(t)=4$ 이다가



이때 3개의 점에서 만나면서 $h(t)=3$ 이 됩니다. 또다시 불연속점이 생겼어요!

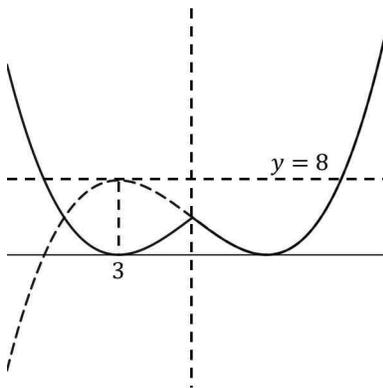
이러면 안 되죠? 이미 두 개를 넘어버렸으니까요. 바로 다음 케이스로 넘어가봅시다. 이후에는 스스로 한 번 해보세요!

극솟값이 0이라면

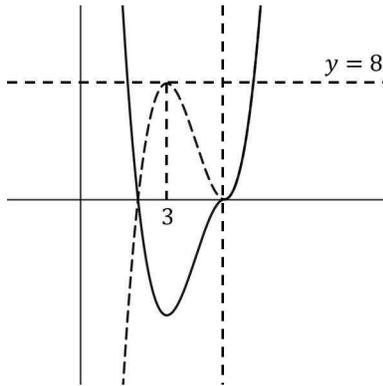


이때 $h(t)=3$ 이죠? 쭈루룩 가다가

이때 $h(t)=2$ 가 됩니다. 불연속점 하나 생겼네요. 이후에는 $h(t)=1$ 이다가

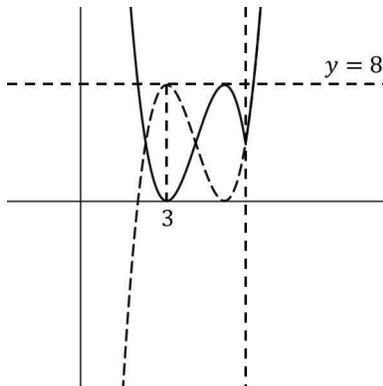


이때 $h(t)=2$ 가 됩니다. 불연속점 하나 더 생겼구요. 이후에는 $h(t)=3$ 이다가



이때 $h(t)=2$ 가 됩니다. 여기도 불연속점이네요. 이후에도 계속

$h(t)=2$ 이다가



이때 $h(t)=1$ 이 됩니다. 불연속점이 하나 더 있네요. 이후에는 계속

$h(t)=0$ 입니다. 총 4개죠? 이 경우도 조건을 만족시키지 못하네요.

확통

7. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [2023학년도 9월 확통 28]

- ① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

7. 정답 ③ [2023학년도 9월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1부터 10까지 10개 중에서 서로 다른 3개를 고르는데 곱이 5의 배수이고 합이 3의 배수일 확률을 구하합니다.

$$\text{구하는 확률은 } \frac{\text{3개 곱이 5의 배수, 합이 3의 배수}}{\text{10개 중에 3개 뽑음}} \text{ 이죠?}$$

일단 분모는 ${}_{10}C_3 = 120$ 입니다. 분자를 구해야 하는데 3개의 곱이 5의 배수이고 합이 3의 배수여야 한답니다. 일단 5의 배수부터 보죠. 이게 좀 더 간단할 것 같거든요. 곱이 5의 배수가 되려면 단순히 5의 배수인 5, 10을 포함하면 됩니다. 여기서 문제는 몇 개를 포함하는지이죠. 5 또는 10을 한 개만 포함하는지, 아니면 둘 다 포함하는지에 따라 경우를 나눠보면 될 것 같네요.

2) 케이스 분류

2-1) 5만 포함

일단 기본적으로 3의 배수 판정법은 각 자리의 합이 3의 배수이면 됩니다. 다만 이번엔 3개 숫자 합이 아무리 커도 $8+9+10=27$ 이잖아요? 그냥 다 더해보고 3의 배수인지 판단하는 게 더 빨라보여요.

만약 가장 작은 수가 1이라면 $1+5$ 는 3의 배수이므로 나머지 하나는 3의 배수이면 됩니다. 따라서 3, 6, 9 3개가 있네요.

가장 작은 수가 2라면 $2+5=7$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 8이면 됩니다. 1개네요.

가장 작은 수가 3이라면 $3+5=8$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 4, 7이면 됩니다. 2개네요.

가장 작은 수가 4라면 $4+5=9$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 6, 9이면 됩니다. 2개네요.

두 번째로 작은 수가 6이라면 $5+6=11$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 7이면 됩니다. 1개네요.

두 번째로 작은 수가 7이라면 $5+7=12$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 9면 됩니다. 1개네요.

두 번째로 작은 수가 8이라면 $5+8=13$ 이므로 3의 배수가 될 수 없습니다.

두 번째로 작은 수가 9이라면 $5+9=14$ 이므로 3의 배수가 될 수 없습니다.

따라서 총 $3+1+2+2+1+1=10$ 입니다.

2-2) 10만 포함

만약 가장 작은 수가 1이라면 $1+10=11$ 이므로 나머지 하나는 4, 7해서 2개가 있네요.

가장 작은 수가 2라면 $2+10=12$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 3, 6, 9해서 3개가 있네요.

가장 작은 수가 3이라면 $3+10=13$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 8이면 됩니다. 1개네요.

가장 작은 수가 4라면 $4 + 10 = 14$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 7이면 됩니다. 1개입니다.

가장 작은 수가 6이라면 $6 + 10 = 16$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 8이면 됩니다. 1개네요.

가장 작은 수가 7이라면 $7 + 10 = 17$ 이므로 3의 배수가 될 수 없습니다.

가장 작은 수가 8이라면 $8 + 10 = 18$ 이므로 3의 배수가 되기 위해서는 9면 됩니다. 1개네요.

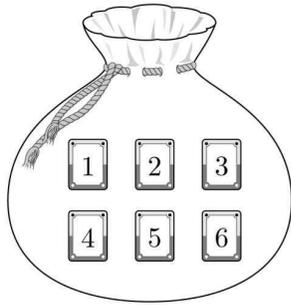
따라서 총 $2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$ 입니다.

2-3) 5, 10 둘 다 포함

이러면 $5 + 10 = 15$ 이기 때문에 3의 배수가 추가로 있으면 되겠네요. 따라서 3, 6, 9 3개입니다.

구하는 경우의 수는 $10 + 9 + 3 = 22$ 이고 구하는 확률은 $\frac{22}{120} = \frac{11}{60}$ 이네요. 답은 ③번입니다.

8. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 \bar{X} 라 할 때, $P\left(\bar{X} = \frac{11}{4}\right) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [2023학년도 9월 확통 29]



8. 정답 175 [2023학년도 9월 확통 29]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

일단 1부터 6까지 6장이 있는데 한 장씩 꺼내서 수를 확인한 후 다시 넣는 걸 4번 한답니다. 그렇게 해서 4개의 수의 평균이 $\frac{11}{4}$ 가 될 확률을 구하라네요.

그럼 사실상 4개 수의 합이 11이 될 확률을 구하면 되겠죠? 평균이 $\frac{11}{4}$ 이니까요. 그러니까 사실상 첫 번째 수부터 마지막 수까지 차례대로 a, b, c, d 라 하면 $a+b+c+d=11$ 인데 $1 \leq a, b, c, d \leq 6$ 인 경우의 수를 구하라는 것과 같아요.

일단 분모는 6장 중에서 한 장 꺼내는 걸 4번 반복하는 거니까 6^4 입니다.
그리고 이제 차례대로 파악해봅시다.

2-1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

a, b, c, d 가 가질 수 있는 경우는 1136, 1145, 1226, 1235, 1244, 1334, 2225, 2234, 2333입니다. 이제 배열까지 해야겠죠? 1136이라고 하더라도 1316이 될 수도 있고, 6311이 될 수도 있잖아요.
같은 숫자가 있는 경우의 수를 사용하면 되겠어요. 같은 숫자만큼 나눠주는 거죠.

1136의 경우 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

1145의 경우 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

1226의 경우 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

1235의 경우 $4! = 24$ 입니다.

1244의 경우 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

1334의 경우 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

2225의 경우 $\frac{4!}{3!} = 4$ 입니다.

2234의 경우 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

2333의 경우 $\frac{4!}{3!} = 4$ 입니다. 총 $12 + 12 + 12 + 24 + 12 + 12 + 4 + 12 + 4 = 104$ 입니다. 따라서 구하는 경우의

수는 $\frac{104}{6^4} = \frac{13}{162}$ 입니다. $q = 13$, $p = 162$ 이므로 $p + q = 175$ 이네요.

2-2) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

$a + b + c + d = 11$ 인데 $1 \leq a, b, c, d \leq 6$ 를 보면 중복조합이 생각나잖아요? 서로 다른 a, b, c, d 라는 상자에 서로 같은 공을 넣는 것과 같은 상황이니깐요. 대신 자연수 중복조합이네요.

다만 여기서 조심해야 할 건 a, b, c, d 중 3개가 1이라고 하면 나머지는 8이 될 수도 있다는 거예요. 그리고 3개 중 하나의 수를 1만큼 늘린다면 나머지는 7도 가능하죠. 이런 경우들은 제거해줘야 합니다.

먼저 전체 경우의 수는 ${}_4H_7 = {}_{10}C_3 = 120$ 입니다. 만약 하나가 7이라면 1127이죠? 배열하면 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

하나가 8이라면 1118입니다. 배열하면 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이네요. 둘을 빼주면 $120 - 12 - 4 = 104$ 입니다. 구하는 확률은

$\frac{104}{6^4} = \frac{13}{162}$ 입니다. $q = 13$, $p = 162$ 이므로 $p + q = 175$ 이네요.

9. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 와 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여
함수 f 의 치역을 A , 합성함수 $f \circ f$ 의 치역을 B 라 할 때,
다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오.
[2023학년도 9월 확통 30]

(가) $n(A) \leq 3$

(나) $n(A) = n(B)$

(다) 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 이다.

9. 정답 260 [2023학년도 9월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 가 있고 $f: X \rightarrow X$ 인데 합성함수 $f \circ f$ 까지 있어요. 일단 기본적으로 X 를 3개 설정해야 합니다.

이때 f 의 치역은 A 이고 합성함수의 치역은 B 인데 (가)조건에서 $n(A) \leq 3$ 라고 합니다. 일단 f 의 치역의 개수는 3개 이하라는 거죠? 1개, 2개, 3개가 될 수 있습니다.

(나)조건에서 $n(A) = n(B)$ 라고 합니다. f 의 치역의 개수와 합성함수의 치역의 개수는 같아야 해요. 여기서 잘 생각해 보세요. 합성함수 $f \circ f$ 는 f 를 거치고 f 를 한 번 더 거친 함수입니다. 다시 말하면 처음 f 를 거칠 때는 X 의 5개의 원소 전부 f 의 치역에 대응이 되지만 두 번째 f 를 거칠 때는 f 의 치역이 다시 정의역이 되어서 $f \circ f$ 의 치역과 대응되게 되는 거죠. 이때 예를 들어 f 의 치역이 2개였다면 $f \circ f$ 의 치역도 2개여야 합니다.

(다)조건에서 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 이라고 하네요. 다시 말하면 $f(1) \neq 1, f(2) \neq 2, f(3) \neq 3, f(4) \neq 4, f(5) \neq 5$ 라는 거죠?

자 여기서 (가)조건을 다시 볼게요. 만약 치역의 개수가 1개라면? $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = k$ 입니다. 이때 k 는 1부터 5까지 아무거나 가능해요. 그러면 k 가 어떤 수든 상관없이 (다)조건을 만족시키게 되잖아요? 치역의 개수가 1일 수는 없습니다.

2) 케이스 분류

2-1) 치역의 개수가 2개일 때

치역의 개수가 2라고 해볼게요. 예를 들어 1, 2를 골랐다고 해볼까요? 이때 X 의 원소 1, 2, 3, 4, 5는 전부 1 또는 2를 골라야 합니다. 대신 1은 2를 골라야 하고, 2는 1을 골라야죠. $f(1) \neq 1, f(2) \neq 2$ 이니까요. 나머지 3개는 그냥 둘 중 아무거나 고르면 되겠네요.

이렇게 되면 자동적으로 1, 2는 다시 정의역이 되어 $f \circ f$ 의 치역인 1과 2에 도달합니다. 왜냐면 $f(1) = 2, f(2) = 1$ 이니까 $f(f(1)) = f(2) = 1, f(f(2)) = f(1) = 2$ 이니까요. 그럼 치역의 개수가 동일해지네요?

일단 치역으로 고를 수 있는 건 5개 수 중에서 2개입니다. ${}_5C_2 = 10$ 이네요. 그리고 나머지 3개는 둘 중 아무거나 고르면 되니까 경우의 수는 $2^3 = 8$ 입니다. 총 $10 \times 8 = 80$ 이네요.

2-2) 치역의 개수가 3개일 때

치역의 개수가 3이면요? 마찬가지로입니다. 5개 중에서 치역 3개를 골라야 합니다. 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$ 이네요.

만약 1, 2, 3을 골랐다고 해볼게요. 이러면 $f(1) \neq 1, f(2) \neq 2, f(3) \neq 3$ 이기 때문에 치역을 잘 골라야 해요. 경우는 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1$ 이거나 $f(1)=3, f(2)=1, f(3)=2$ 이렇게 2가지네요. 경우의 수는 2이구요.

나머지 4, 5는 치역 세 개 중에서 아무거나 고르면 됩니다. 경우의 수는 $3^2 = 9$ 입니다. 이러면 자동적으로 1, 2, 3은 새로운 정의역이 되어 $f \circ f$ 의 치역에 안착합니다. 총 경우의 수는 $10 \times 2 \times 9 = 180$ 이네요. 총 $80 + 180 = 260$ 입니다.