지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다 .곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 $\alpha_1,\ \alpha_2$라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 $\beta_1,\ \beta_2$라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)
〔2023학년도 9월 09〕

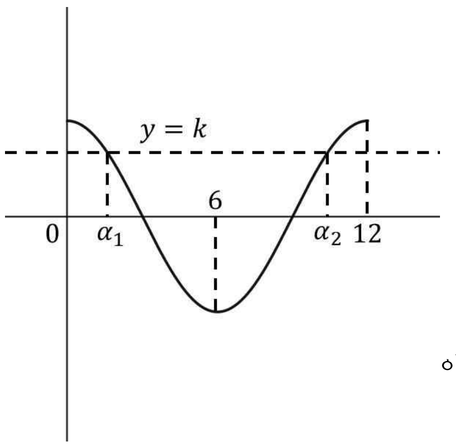
① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

1. 정답 ③ 〔2023학년도 9월 09〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$[0,\ 12]$에서 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$, $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$가 있답니다. 이때 $y=f(x)$와 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표가 α_1, α_2라고 하네요. 일단 우리는 작은 걸 α_1, 큰 걸 α_2라고 부를게요. 이때 $|\alpha_1-\alpha_2|=8$라고 하네요.

일단 그래프를 그려봅시다. $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$는

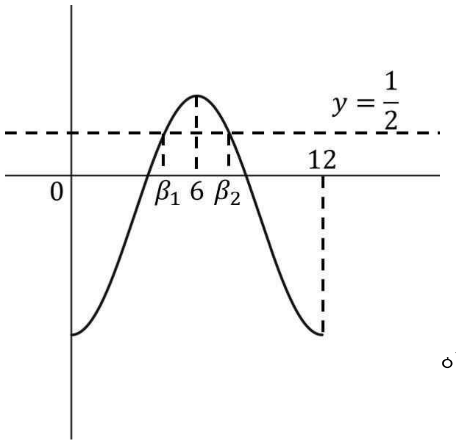


이렇게 됩니다. 이 그래프를 잘 관찰해보세요. $x=6$에 대하여 대칭이죠?

그러면 $y=k$와 만나는 두 점의 x좌표인 α_1, α_2도 $x=6$에 대하여 대칭이라는 말이 되겠네요. 따라서 두 점의 중점이 $x=6$이니까 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=6$이고 $\alpha_1+\alpha_2=12$입니다.

이때 $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이죠? 우리는 α_2를 더 큰 걸로 하자고 했으니까 $\alpha_2-\alpha_1=8$입니다. $\alpha_1+\alpha_2=12$와 연립하면 $\alpha_1=2$, $\alpha_2=10$이네요. 이걸 $y=f(x)$에 넣어보면 그 점에서의 y좌표가 k가 되겠죠? 따라서 $k=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$입니다.

이때 $y=g(x)$와 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표가 β_1, β_2라 할 때 $|\beta_1-\beta_2|$의 값을 구하라네요. 일단 아까랑 마찬가지로 작은 걸 β_1, 큰 걸 β_2라고 부를게요. 먼저 $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$의 경우



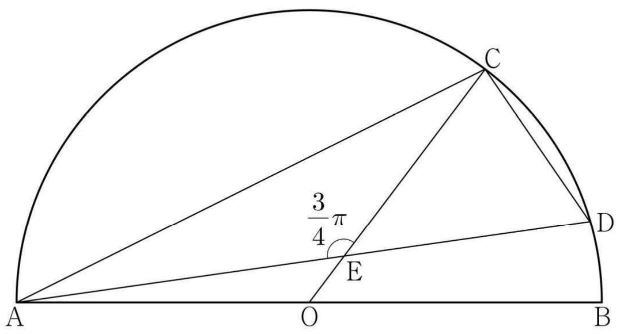
이렇게 되겠네요. $-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$이라 하면 $\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$입니다.

x는 4, 8이네요. 이게 각각 β_1, β_2이니까 $|\beta_1-\beta_2|=4$입니다. 답은 ③번이네요.

2. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\ \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\ \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? 〔2023학년도 9월 13〕

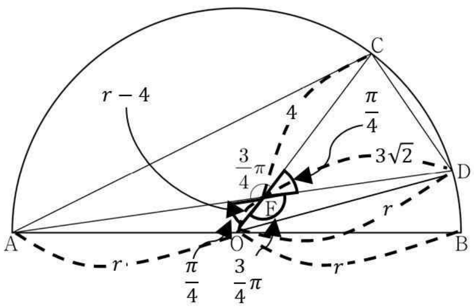


① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

2. 정답 ⑤ 〔2023학년도 9월 13〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

일단 문제를 이해하는 건 어렵지 않네요. 일단 점 D는 원 위의 점이니까 중심과 연결해줄게요. 그리고 $\overline{CE}=4$, $\overline{ED}=3\sqrt{2}$, $\angle CEA=\frac{3}{4}\pi$를 표시해보면



이렇게 됩니다.

$\angle AEO=\frac{\pi}{4}$, $\angle DEO=\frac{3}{4}\pi$이라는 건 선분 AD, CO가 한 점 E를 기준으로 서로 교차된다는 걸 이용한 거예요. 또한 $\overline{OC}=r$인데 $\overline{CE}=4$이니까 나머지는 $\overline{OE}=r-4$가 되죠.

우리가 구해야 하는 건 $\overline{AC}\times\overline{CD}$이에요. 일단 $\overline{CD}$는 바로 구할 수 있겠어요. 두 변의 길이와 한 각이 있죠? 바로 가봅시다. 코사인법칙을 사용하면 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4^2+(3\sqrt{2})^2-\overline{CD}^2}{2\times4\times3\sqrt{2}}$이고 $\overline{CD}^2=10$입니다. $\overline{CD}=\sqrt{10}$이네요.

이제 $\overline{AC}$를 구해야 합니다. $\overline{AC}$가 속한 삼각형이 있네요. 바로 ACE이네요. 마침 한 각과 한 변의 길이가 있습니다. 그러면 한 각이 더 있거나 한 변의 길이가 더 있으면 되겠죠? 이때 나머지 변의 길이에 해당하는 $\overline{AE}$가 속한 삼각형 OEA는 한 변의 길이와 한 각이 있네요. 그럼 이것도 나머지 하나만 찾으면 연쇄적으로 $\overline{AC}$를 구할 수 있게 되겠어요.

그 옆을 보니까 삼각형 ODE는 두 변의 길이와 한 각이 있습니다. 바로 가보죠. 코사인법칙에 의하여 $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{2})^2+(r-4)^2-r^2}{2\times3\sqrt{2}\times(r-4)}$이고 정리하면 $r=5$가 나오네요.

$r=5$이니까 OEA는 두 변의 길이와 한 각이 밝혀졌죠? 따라서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2+1^2-5^2}{2\times\overline{\mathrm{AE}}\times 1}$ 입니다. 정리하면 $\overline{\mathrm{AE}}=4\sqrt{2}$ 가 나오네요.

이제 마지막으로 코사인법칙을 사용해서 $\overline{\mathrm{AC}}$를 구해봅시다. $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{(4\sqrt{2})^2+4^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\times 4\sqrt{2}\times 4}$ 이고 $\overline{\mathrm{AC}}^2=80$이네요. $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{5}$ 입니다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}\times 4\sqrt{5}=20\sqrt{2}$ 이네요. 답은 ⑤번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2023학년도 9월 14〕

<보 기>

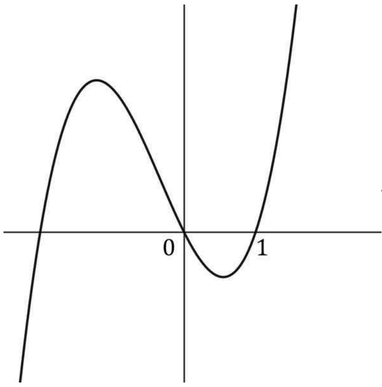
ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

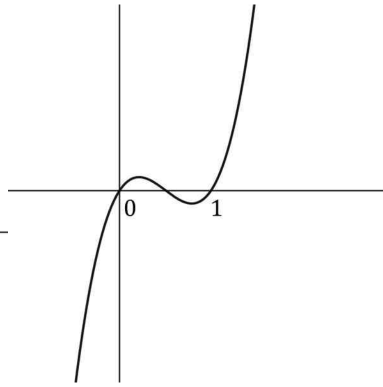
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

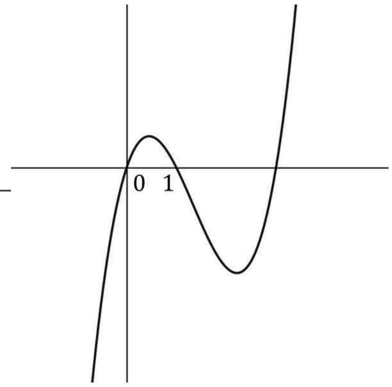
3. 정답 ⑤ 〔2023학년도 9월 14〕

1) 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있답니다. 이러면 개형은



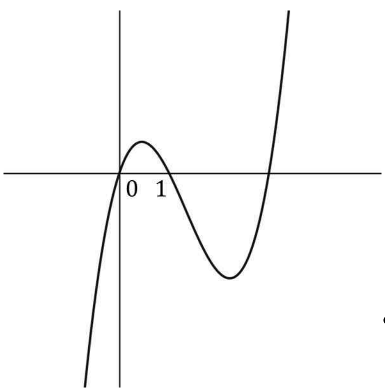




이렇게 셋 중에서 하나가 되겠죠?

이때 $g(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx$가 있다네요. 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있어서 이건 함부로 미분하거나 할 수는 없을 것 같습니다. 거기에 $\int_0^1 |f(x)|dx$는 사실상 상수취급하면 되겠구요.

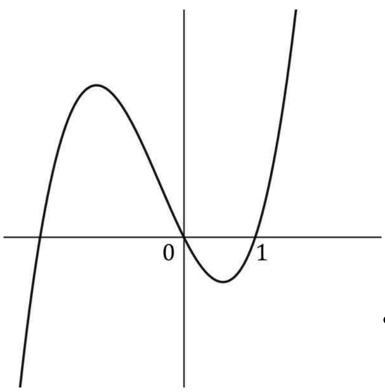
ㄱ에서 $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이냐고 묻네요. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx=0$이라는 거고 이러면 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 |f(x)|dx$이라는 거죠? 그러니까 사실상 0부터 1의 범위에서 $f(x)$에 절댓값을 씌우나 안 씌우나 정적분값이 같아진다는 거니까 $0<x<1$에서 $f(x)>0$이어야 하겠네요. 그래야 절댓값을 벗겨도 그대로 $f(x)$가 나오니까요. 위의 세 번째 케이스죠?



이거예요.

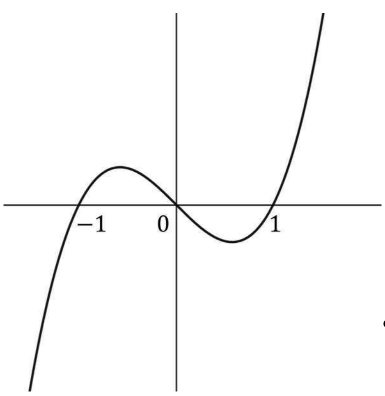
이때 $g(-1)=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$인데 $\int_{-1}^{0}f(x)dx$는 무조건 음수입니다. $\int_{0}^{1}|f(x)|dx$은 무조건 양수죠. 절댓값을 씌우고 정적분을 했으니까요. 그런데 지금 앞에 $(-)$가 붙어 있으니까 전체값은 무조건 음수가 나오게 됩니다. $g(-1)<0$ 맞네요. ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$를 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재하냐고 묻네요. 일단 $g(-1)=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$인데 이게 0보다 커야 하니까 $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}|f(x)|dx$입니다. 이때 $\int_{0}^{1}|f(x)|dx$는 무조건 양수니까 $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}|f(x)|dx>0$이죠? 개형 중에서 $\int_{-1}^{0}f(x)dx$가 양수가 되는 개형은 첫 번째입니다.



이거 말이죠.

이때 $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}|f(x)|dx$를 만족시켜야 합니다. 여기서 잘 생각을 해볼게요. 왜 하필 $k<-1$일까요? 만약에 $k=-1$이라면?



이런 그래프가 됩니다. 이 개형은 정확히 변곡점이 원점인 함수입니다. 다시 말하면 원점 대칭 함수라는 거죠. 이러면 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}|f(x)|dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx$가 됩니다. 그런데 -1부터 0까지의 정적분값이 더 커야 하잖아요? 이러면 0과 1을 제외한 나머지 x축과 만나는 x좌표인 k가 -1보다 더 작아져서 더 정적분값을 키워야겠네요. ㄴ도 맞습니다.

2) ㄱ, ㄴ, ㄷ 유기성, 함수 구하기 - 인수정리

ㄷ에서 $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이냐고 묻네요. 일단 $g(-1)>1$이라는 건 ㄴ에서 말했던 $g(-1)>0$인 경우에 해당하죠? 따라서 $f(k)=0$를 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재합니다. 그리고 개형 역시 같은 걸 사용할 수 있겠구요.

$g(-1)=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx>1$인데 이때 $\int_{0}^{1}|f(x)|dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx>1$입니다.

이때 $f(x)$는 $f(k)=f(0)=f(1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)=x(x-1)(x-k)$라 할 수 있죠? 전개하면

$f(x)=x^3-(k+1)x^2+kx$입니다. $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^3-(k+1)x^2+kxdx$이죠. 기함수 정적분할 때

홀수차항은 다 지우고 시작할 수 있잖아요? 따라서

$\int_{-1}^{1}-(k+1)x^2dx=\left[-\frac{(k+1)}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}(k+1)>1$이고 $k<-\frac{5}{2}$입니다.

한편 $g(0)=\int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$인데 $\int_{0}^{1}|f(x)|dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx$이므로 $g(0)=2\int_{0}^{1}f(x)dx$이네요.

계산해볼까요? $2\int_{0}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}x^3-(k+1)x^2+kxdx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{(k+1)}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}k-\frac{1}{6}$입니다.

그런데 $k<-\frac{5}{2}$이니까 $g(0)=\frac{1}{3}k-\frac{1}{6}<-1$이네요. 맞네요! ㄷ도 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

4. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다. (단, r는 $0 < \lvert r \rvert < 1$인 상수이다.) (나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (\lvert a_n \rvert < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (\lvert a_n \rvert \geq 5) \end{cases}$ 이다.

$\lvert a_m \rvert \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은? 〔2023학년도 9월 15〕

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

4. 정답 ③ 〔2023학년도 9월 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건해석

일단 먼저 (가)조건에서 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$라고 합니다. 이때 $-1<r<1$ $(r\neq 0)$이라고 하네요. 일단 대충 넣어보면 $a_4=r,\ a_8=r^2,\ a_{12}=r^3,\ \cdots$이런 식으로 4를 주기로 등비수열이 되는 수열인가봐요.

(나)조건에서 $a_1<0$이고 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$이라고 합니다. 조금만 고쳐보면

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (-5<a_n<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (a_n\geq 5,\ a_n\leq -5) \end{cases}$이네요.

그리고는 $|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하 자연수 m의 개수를 p라 하면 $p+a_1$을 구하래요.

일단 (나)조건을 보면 5와 -5를 기준으로 어떤 라인을 따라가는지가 달라집니다. 이때 (가)조건을 생각해보세요. $a_4=r,\ a_8=r^2,\ a_{12}=r^3,\ \cdots$였는데 $-1<r<1$이라고 했었죠? 공비가 $-1<r<1$이면 무조건 그 수열은 -1과 1 사이에 있게 됩니다. 0.9를 계속 곱한다고 생각해보세요. 계속 곱해도 절대로 1보다 커지지 않습니다.

그럼 무조건 $a_{4n+1}=a_{4n}+3$이 되겠네요. 따라서 $a_4=r,\ a_8=r^2,\ a_{12}=r^3,\ \cdots$이면서 $a_5=r+3,\ a_9=r^2+3,\ a_{13}=r^3+3,\ \cdots$입니다.

이때 다시 한 번 생각해보세요. $-1<a_{4n}<1$이라면 $-5<a_{4n}+3=a_{4n+1}<5$ 아닌가요? $-1<a_{4n}<1$에 3을 더했다고 해서 -5와 5 밖으로 넘어가진 못하잖아요. 따라서 $a_{4n+2}=a_{4n+1}+3$가 됩니다.
$a_6=r+6,\ a_{10}=r^2+6,\ a_{14}=r^3+6,\ \cdots$이네요.

여기서 다시 생각해볼게요. $-1<a_{4n}<1$이라면 $5<a_{4n}+6<7$이잖아요? 이러면 5를 넘게 되네요? 따라서 $a_{4n+3}=-\dfrac{1}{2}a_{4n+2}$가 됩니다. $a_7=-\dfrac{1}{2}(r+6),\ a_{11}=-\dfrac{1}{2}(r^2+6),\ a_{15}=-\dfrac{1}{2}(r^3+6),\ \cdots$

여기서 한 번 더 가죠! $5 < a_{4n}+6 < 7$이니까 $-\frac{7}{2} < -\frac{1}{2}(a_{4n}+6) < -\frac{5}{2}$이죠? 이건 -5와 5 사이네요?

따라서 $a_{4n+4} = a_{4n+3}+3$이고

$a_8 = -\frac{1}{2}(r+6)+3,\ a_{12} = -\frac{1}{2}(r^2+6)+3,\ a_{16} = -\frac{1}{2}(r^3+6)+3,\ \cdots$입니다.

이러면 아까 구했던 $a_4 = r,\ a_8 = r^2,\ a_{12} = r^3,\ \cdots$와 겹치네요? $-\frac{1}{2}(r+6)+3 = r^2$이고 정리하면

$r^2 + \frac{1}{2}r = r\left(r+\frac{1}{2}\right) = 0$입니다. $-1 < r < 1\ (r \neq 0)$이므로 $r = -\frac{1}{2}$이네요.

값을 정리해보죠. $a_4 = -\frac{1}{2},\ a_5 = \frac{5}{2},\ a_6 = \frac{11}{2},\ a_7 = -\frac{11}{4},\ a_8 = \frac{1}{4},\ a_9 = \frac{13}{4},\ a_{10} = \frac{25}{4},\ \cdots$입니다.

뒤로도 가볼까요? $a_3 = -\frac{7}{2}\ (-5 < a_3 < 5)$ 이거나 $a_3 = 1\ (a_3 \geq 5,\ a_3 \leq -5)$인데 조건을 만족시키는 건

$a_3 = -\frac{7}{2}$이네요.

$a_2 = -\frac{13}{2}\ (-5 < a_2 < 5)$ 이거나 $a_2 = 7\ (a_2 \geq 5,\ a_2 \leq -5)$인데 조건을 만족시키는 건 $a_2 = 7$입니다.

$a_1 = 4\ (-5 < a_1 < 5)$ 이거나 $a_1 = -14\ (a_1 \geq 5,\ a_1 \leq -5)$인데 아까 $a_1 < 0$이라고 했었죠? 따라서

$a_1 = -14$입니다.

2) 규칙 찾으면 일반화

패턴을 파악해보세요. $a_{4n},\ a_{4n+1}$은 -5와 5사이이다가 a_{4n+2}에서 5를 넘어버리고, $a_{4n+3},\ a_{4n+4}$에서 다시 -5와 5 사이가 되는 패턴이네요. 이게 계속 반복이 돼요, 따라서 2, 6, 10, 14, $\cdots$에서 5를 넘어버립니다.

따라서 $a_1 = -14,\ p = 26$이므로 더하면 12입니다. 답은 ③번이네요.

5. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\ \ g(x)=4|x|+k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30\times S$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 9월 20〕

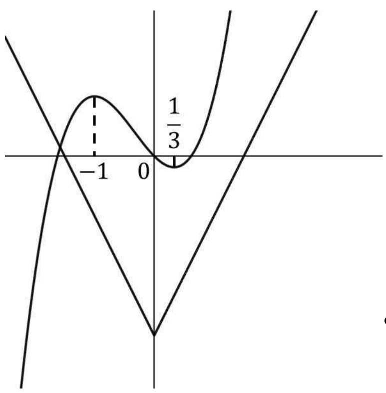
5. 정답 80 〔2023학년도 9월 20〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 문제해석

음의 상수 k가 있는데 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2랍니다.

일단 관찰부터 해보죠. $f(x)$는 $f(x)=x(x^2+x-1)$이라서 $x=0$에서 x축을 지나구요, 미분하면 $f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$이니까 $x=-1$에서 극대, $x=\frac{1}{3}$에서 극소가 되는 함수입니다.

$g(x)$는 $x=0$을 기준으로 V자 모양의 함수이구요, 거기에 k값에 따라 오르락내리락하는 함수네요. 대충

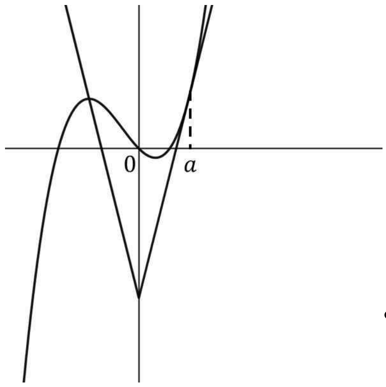


이렇게 되겠어요.

일단 먼저 확인해야 하는 게 변곡점에서의 접선의 기울기에요. 왜냐하면 접선의 기울기가 -4가 되면 접할 가능성이 생기거든요. $f'(x)=3x^2+2x-1$을 다시 한 번 미분하면 $f''(x)=6x+2$이고 $x=-\frac{1}{3}$에서 변곡점을 가지게 됩니다. $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$이므로 $g(x)$는 $f(x)$와 변곡점에서는 접하지 않겠네요.

이제 만나는 점의 개수가 2가 되려면 어떡해야 하는지 확인해봅시다. k는 음수이므로 무조건 $x<0$ 부분에서는 한 번 만나게 되어 있습니다. 그래프에서 $g(x)$를 움직여 확인해보세요. 그럼 관건은 $x>0$ 부분인데 여기는 두 번 만나거나, 한 번 만나거나, 아예 안 만나는 케이스가 있네요. 우리는 $x>0$에서도 한 번 만나야 총 두 번 만나게 되는 거잖아요? 따라서 $x>0$에서는 한 번만 만나게 하면 됩니다.

그래프를 움직여보세요.



이렇게 될 때죠?

$x=a$에서 접할 때 접선의 기울기는 4여야 합니다. $g(x)$의 $x>0$에서의 기울기가 4이니까요. 따라서 $f'(x)=3x^2+2x-1=4$라고 하면 $3x^2+2x-5=(x-1)(3x+5)=0$이므로 $a=1$입니다. 접하는 점에서의 $f(x)$의 함숫값은 1이므로 $g(1)=1$이구요. $4+k=1$이므로 $k=-3$입니다.

이제 두 함수로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해보도록 하죠. 먼저 어느 부분에서 만나는지를 알아야 합니다. $x>0$에서는 $x=1$에서 만나는 걸 방금 확인했으니 $x<0$을 확인해야겠네요. $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로 $x^3+x^2-x=-4x-3$이라 하면 $x^3+x^2+3x+3=(x+1)(x^2+3)=0$이고 $x=-1$이네요.

이때 $g(x)$는 $x=0$을 기준으로 함수가 바뀌는 걸 고려해주면 결국 구하는 값은 $x<0$에서는 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+3x+3$를 -1부터 0까지 정적분하고, $x>0$에서는 $f(x)-g(x)=x^3+x^2-5x+3$을 0부터 1까지 정적분해주면 되겠네요. 따라서

$\int_{-1}^{0} x^3+x^2+3x+3dx+\int_{0}^{1} x^3+x^2-5x+3dx$입니다. 계산하면 답은 $S=\dfrac{8}{3}$이네요. $30S=80$입니다.

6. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

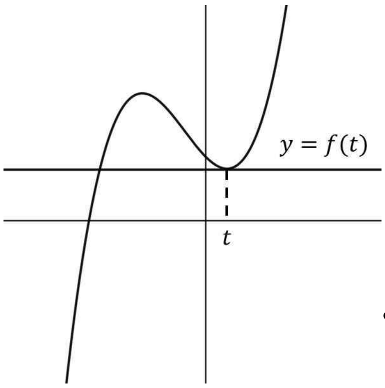
라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 9월 22〕

6. 정답 58 〔2023학년도 9월 22〕

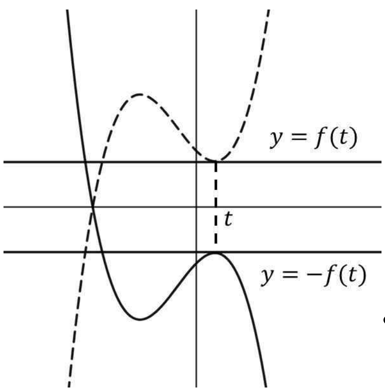
1) 문제해석

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수가 있답니다. 일단 $f(3)=8$, $f'(3)=0$이죠? 그리고 최고차항의 계수가 양수인데 $x=3$에서 극댓값을 갖는다고 했으니까 극소가 되는 x는 3보다는 커야 합니다. 대충 개형은 그릴 수 있겠죠?

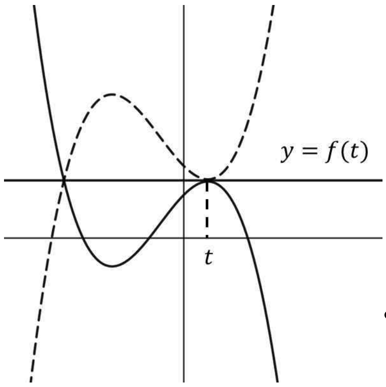
이때 $g(x)$는 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$ 이라고 합니다. 어디서 많이 본 듯한 형태네요. 일단 해석부터 해보죠. $x \geq t$일 때는 $g(x)=f(x)$입니다. 그냥 $f(x)$ 그대로 두면 되네요. 그런데 $x < t$일 때는 $g(x)=-f(x)+2f(t)$입니다. 일단



이런 함수를 설정해볼게요. 일단 먼저 $(-)$를 곱해야 합니다.



이후에는 $f(t)$만큼 두 번 위로 올리면 되겠네요.



이렇게! $y=f(t)$를 축으로 해서 뒤집은 모양이죠? 그리고 난 후 $x<t$ 부분만 짜르면 됩니다. 이게 $g(x)$네요.

정리하면 $x \geq t$ 부분은 그대로 두고, $x<t$ 부분은 $y=f(t)$를 축으로 해서 뒤집은 함수입니다.

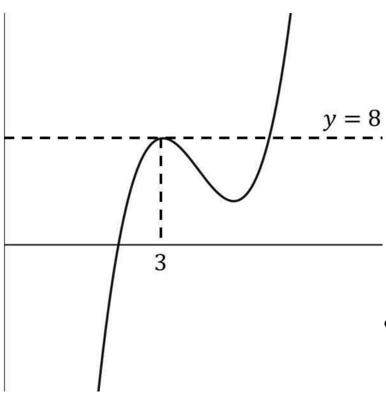
2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이런 함수가 있는데 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자고 하네요. 이건 다시 말하면 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점의 개수죠? 이때 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때 $f(8)$의 값을 구하랍니다.

$h(t)$가 불연속이라는 건 무슨 말일까요? 일단 불연속은 좌극한, 우극한, 함숫값 중 어느 하나라도 같지 않은 상태를 말합니다. 결국 $x=t$를 설정할 때 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점의 개수가 변하는 지점을 말하는 거죠. 그게 두 개 존재해야 한답니다.

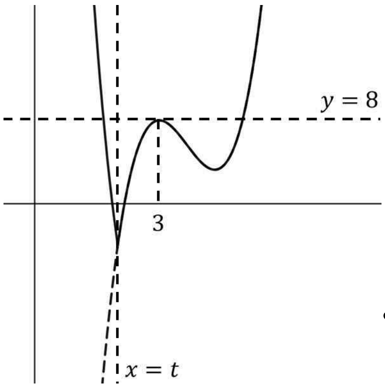
이제 제대로 $f(x)$를 설정해서 $g(x)$를 그려보죠. 일단 문제에서 물어보는 포인트가 $g(x)=0$이 되는 부분이잖아요? 자연스럽게 x축과 만나는 부분에 집중할 수밖에 없어요. 극댓값은 8으로 양수인데, 극솟값은 양수일까요? 0일까요? 아니면 음수일까요?

만약 극솟값이 양수라면



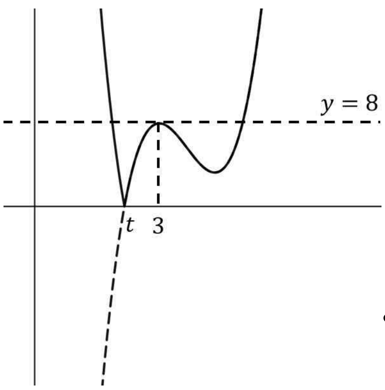
이런 그래프가 그려질 거예요. 이제 t를 설정하고 $g(x)$를 그려봅시다. 그리는

방법은 아까 말했듯이 $x \geq t$ 부분은 그대로 두고, $x < t$ 부분은 $y = f(t)$를 축으로 해서 뒤집으면 됩니다.

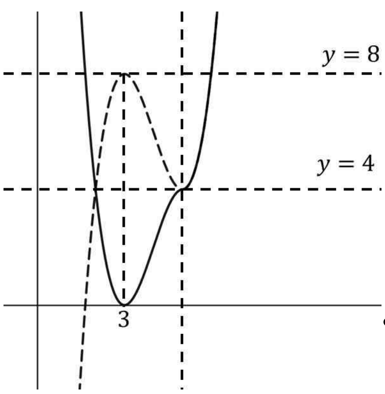


이렇게 $x = t$를 잡으면 $g(x)$는 그림과 같이 그릴 수 있습니다. $h(t)$는 $y = g(x)$와 x축이 만나는 점의 개수니까 $h(t) = 2$입니다.

t가 어어어엄청 작을때부터 $f(x) = 0$이 되는



이때 직전까지는 $h(t) = 2$이다가, 이때 딱 $h(t) = 1$이 됩니다. 그리고 t가 여기서 더 커지면 $h(t) = 0$이 되죠. x축과 만나는 점의 개수가 변하네요? 이후에는?



이때 다시 $h(t) = 1$이 되면서 불연속이 됩니다. 이후에는 계속 $h(t) = 0$이구요.

불연속점이 딱 두 개네요? 이 개형입니다.

3) 함수 구하기 - 차함수

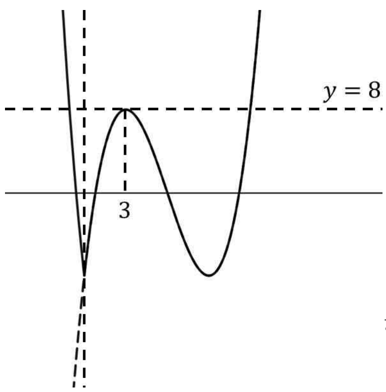
먼저 $f(x)$는 $x = 3$에서 $y = 8$에 접하므로 차함수에 의하여 $f(x) - 8 = (x-3)^2(x-a)$라 할 수 있습니다.

$f(x)=(x-3)^2(x-a)+8$인데 $x=\dfrac{2a+3}{3}$에서 극소이므로

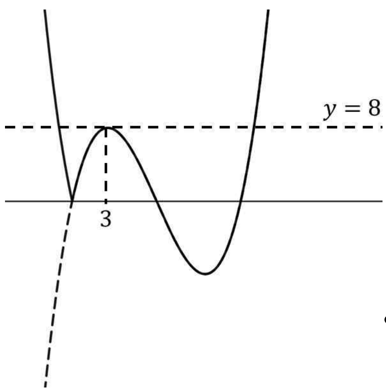
$f(x)=\left(\dfrac{2a-6}{3}\right)^2\left(\dfrac{-a+3}{3}\right)+8=-\dfrac{4(a-3)^3}{3^3}+8=4$입니다. 정리하면 $a=6$입니다.

$f(x)=(x-3)^2(x-6)+8$이고 $f(8)=58$이네요.

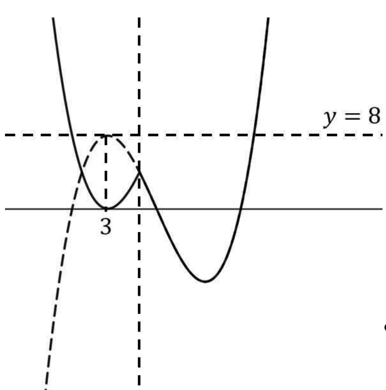
추가적으로 나머지 케이스는 왜 안 되는지도 살펴볼게요! 극솟값이 음수일 때는



t가 어어어엄청 작을 때는 이렇게 $h(t)=4$이다가

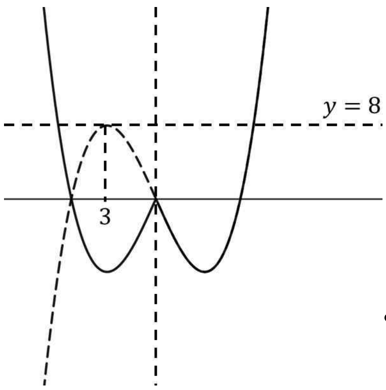


이러면 $h(t)=3$입니다. 일단 불연속점 하나 생겼죠? 이후엔 x축과 2개의 점에서만 만나니까 $h(t)=2$이다가,



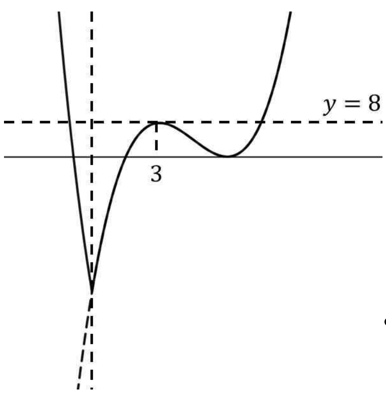
이때 다시 $h(t)=3$이 됩니다. 불연속점이 벌써 두 개네요. 이후에는 x축과

4개의 점에서 만나니까 $h(t)=4$이다가

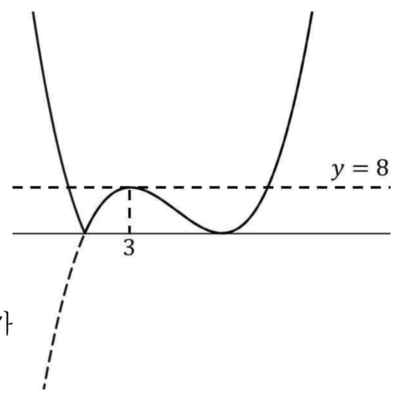


이때 3개의 점에서 만나면서 $h(t)=3$이 됩니다. 또다시 불연속점이 생겼어요! 이러면 안 되죠? 이미 두 개를 넘어버렸으니까요. 바로 다음 케이스로 넘어가봅시다. 이후에는 스스로 한 번 해보세요!

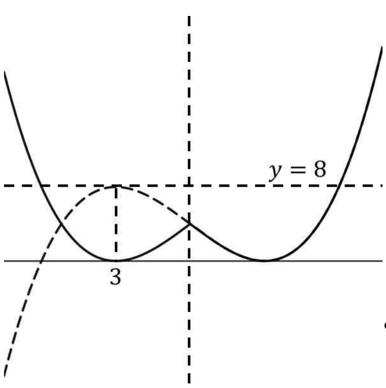
극솟값이 0이라면



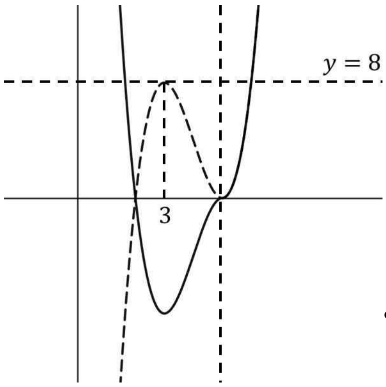
이때 $h(t)=3$이죠? 쭈루룩 가다가



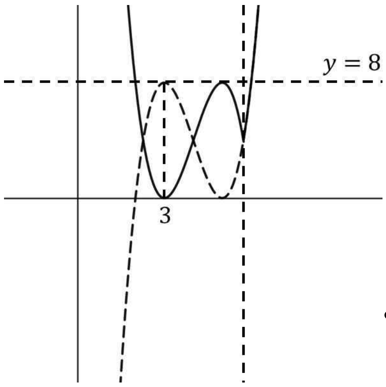
이때 $h(t)=2$가 됩니다. 불연속점 하나 생겼네요. 이후에는 $h(t)=1$이다가



이때 $h(t)=2$가 됩니다. 불연속점 하나 더 생겼구요. 이후에는 $h(t)=3$이다가



이때 $h(t)= 2$가 됩니다. 여기도 불연속점이네요. 이후에도 계속 $h(t)= 2$이다가



이때 $h(t)= 1$이 됩니다. 불연속점이 하나 더 있네요. 이후에는 계속 $h(t)= 0$입니다. 총 4개죠? 이 경우도 조건을 만족시키지 못하네요.