제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$(2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$ 에 대하여 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f'(x)=4x$
$f'(2)=8$

3. $\sin(\pi-\theta)=\dfrac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta<0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\dfrac{12}{13}$ ② $-\dfrac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\dfrac{5}{12}$ ⑤ $\dfrac{12}{13}$

$\sin\theta=\frac{5}{13} \Rightarrow \cos\theta=-\frac{12}{13}$
$\therefore \tan\theta=-\frac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x\le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-a=a^2-6$
$a^2+a-6=0$
$\alpha+\beta=-1$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17　② 19　③ 21　④ 23　⑤ 25

$$\begin{cases} a = 2(a+4d) \\ a_{10} = a+9d = -3 \end{cases}$$

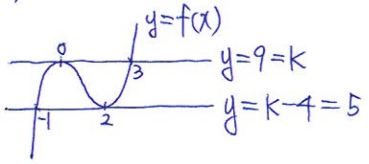
$a = 24,\ d = -3$

$\therefore a_2 = 24 - 3 = 21$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$f(x) = x^2(x-3) + k$



※ $9 - \frac{3}{6} \times 2^3 = 9 - 4 = 5$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{7}{10}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{9}{10}$

$$(S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10} S_{k-1} = 0 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow$ 접선: $y=-x+3$

$g'(x)=4x^3+3=-1 \Rightarrow$ 접점: $(-1, a-2)$

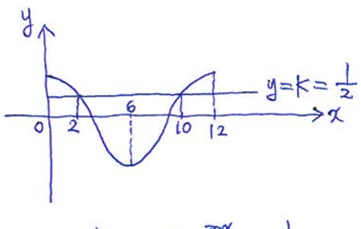
$a-2=4 \Rightarrow a=6$

9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$g(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}x=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \Rightarrow x=4, 8$

$\therefore |\beta_1-\beta_2|=4$

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at\quad (a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x(t)=t^3+\frac{a}{2}t^2$

$x(2)=2a+8=16 \Rightarrow a=4$

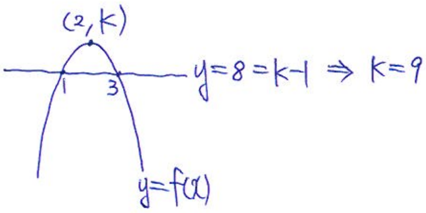
11. 함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$-9 = 3 \times (-3)$

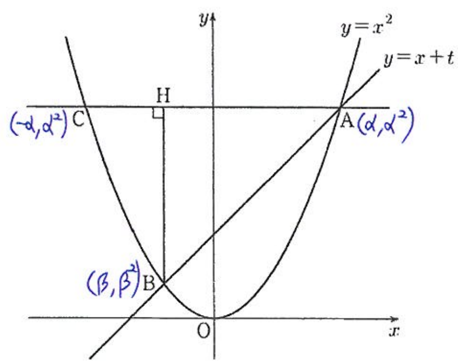
$3^4 = 3^{\frac{1}{2}f(n)} \Rightarrow f(n) = 8$



12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$x^2 - x - t = 0 \quad (x = \alpha, \beta)$

$\overline{AH} = \alpha - \beta = \sqrt{1+4t}$

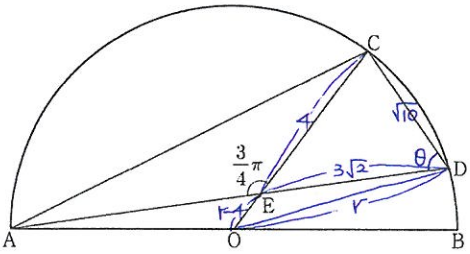
$\overline{CH} = \alpha + \beta = 1$

$\therefore \lim_{t \to 0+} \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{4t}{t \times (1+1)} = 2$

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

$\overline{CD}^2=16+18-24\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=10 \Rightarrow \overline{CD}=\sqrt{10}$

$\cos\theta=\frac{18+10-16}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

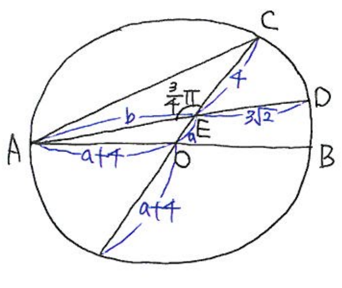
$r^2=(r-4)^2+18-2(r-4)3\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi$

$\cancel{r^2}=\cancel{r^2}-8r+16+18+6r-24 \Rightarrow r=5$

$\overline{AC}=2r\sin\theta=10\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}$

$\therefore \overline{AC}\times\overline{CD}=\frac{20}{\sqrt{5}}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

※



$$\begin{cases} 3\sqrt{2}b=4(2a+4) \Rightarrow a=\frac{3\sqrt{2}b-16}{8} \\ (a+4)^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\cancel{a^2}+8a+16=\cancel{a^2}+b^2-\sqrt{2}ab$

$3\sqrt{2}\cancel{b}=b^{\cancel{2}}-\sqrt{2}\cancel{b}\times\frac{3\sqrt{2}b-16}{8}$

$24\sqrt{2}=8b-6b+16\sqrt{2} \Rightarrow b=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{1+2-2\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi}=4\sqrt{5}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

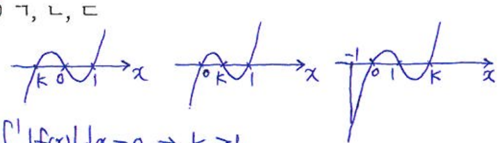
ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

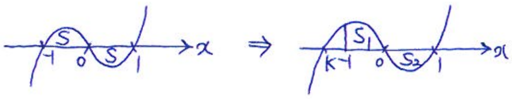
$f(x)=x(x-1)(x-k)$



ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx=0 \Rightarrow k\geq1$

$\therefore g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx<0$

ㄴ. $g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx>0 \Rightarrow k<-1$



$S_1>S_2$

ㄷ. $g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx>1 \Rightarrow S_1-S_2>1$

$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1\{\cancel{x^3}-(k+1)x^2+\cancel{kx}\}\,dx=-\frac{2}{3}(k+1)>1 \Rightarrow k<-\frac{5}{2}$

$\therefore g(0)=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx$

$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}+\frac{k}{2}\right)=\frac{2k-1}{6}<-1$

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다.
> (단, r는 $0 < |r| < 1$인 상수이다.) $-1<r<1\ (r \neq 0)$
>
> (나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$a_4 = r \Rightarrow a_5 = r+3 \Rightarrow a_6 = r+6 > 5 \Rightarrow a_7 = -\frac{r}{2} - 3$

$\Rightarrow a_8 = -\frac{r}{2} = r^2 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$

$$a_n = \begin{cases} a_{n+1} - 3 & (|a_n| < 5) \\ -2a_{n+1} & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$

$a_4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = -\frac{7}{2} \Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow a_1 = -14$

$a_8 = r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_9 = \frac{1}{4} + 3 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{4} + 6 \Rightarrow a_{11} = -\frac{25}{8}$

$a_{12} = r^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow a_{13} = -\frac{1}{8} + 3 \Rightarrow a_{14} = -\frac{1}{8} + 6 \Rightarrow \cdots$

$m = 1, 2$

$m = 4k+2\ (k = 1, 2, \cdots, 24) \Rightarrow p = 26$

$\therefore p + a_1 = 26 + (-14) = 12$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4) = \log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

$(x-4)^2 = x+2$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$\therefore x = \cancel{2}, 7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 - 4x + 3$이고 $f(1) = 5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 16

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

$f(2) = 16 - 8 + 6 + 2 = 16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

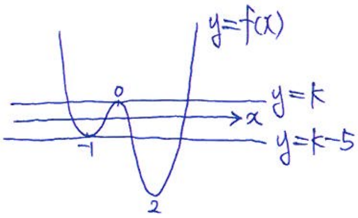
를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점] 13

$10c = 65 + 5c$

$c = 13$

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점] 4

$f'(x) = 12(x^3 - x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 2$

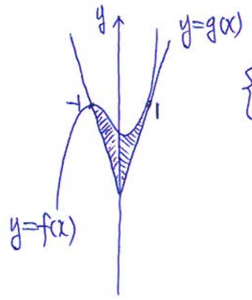


$k-5 < 0 < k \Rightarrow 0 < k < 5$ (4개)

20. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30 \times S$의 값을 구하시오. [4점] 80



$$\begin{cases} t^3 + t^2 - t = 4t + k \\ 3t^2 + 2t - 1 = 4 \end{cases}$$

$3t^2 + 2t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1,\ k = -3$

$3t \quad +5$

$1t \quad -1$

$x^3 + x^2 - x = -4x - 3 \Rightarrow x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$\therefore S = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2 + 3x + 3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 5x + 3)\,dx$$

$$= -\left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 3\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{2} + 3\right)$$

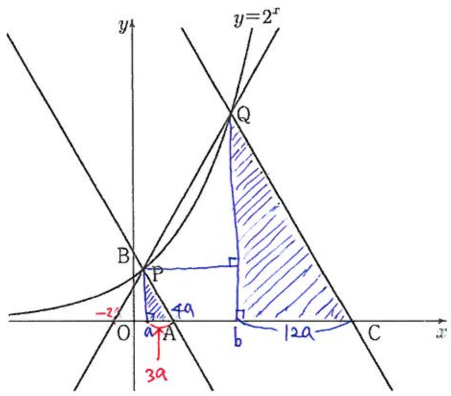
$$= \frac{2}{3} - 4 + 6$$

$$= \frac{8}{3}$$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점] 220



$$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}=\underbrace{\frac{2^a}{3a}=\frac{2^b}{12a}}_{b=a+2}$$

$$\frac{2^a\times 3}{2}=\frac{2^a}{3a} \Rightarrow a=\frac{2}{9},\ b=\frac{20}{9}$$

⊗ 닮음 $\Rightarrow 2^b=4\times2^a \Rightarrow b=a+2$

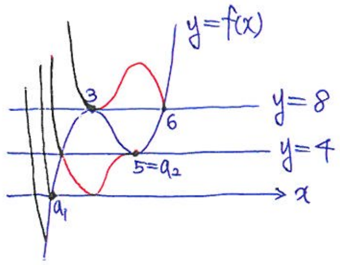
⊗ $b-(-2a)=12a \Rightarrow b=10a$

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

$y=f(t)$ (대칭이동)

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점] 58



$h(t)=2, 1, 0, 1, 0$

$f(x)=(x-3)^2(x-6)+8 \Rightarrow f(8)=58$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

$_6C_2 2^4 = 240$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = 1, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A)$$

$P(A) = P(B)$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$1 = 2P(A) - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{8}$

25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

$Z=\frac{X-9}{0.4}$, $Z=\frac{Y-20}{1}$

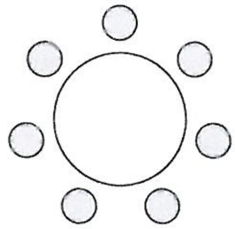
$P(8.9\le X\le 9.4)=P(19\le Y\le K)$

$P(-\frac{1}{4}\le Z\le 1)=P(-1\le Z\le K-20)$

$K-20=\frac{1}{4}\Rightarrow K=20.25$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



$P(A\cup B)=\frac{5!\times2!+5!\times2!-4!\times2}{6!}$

$=\frac{10+10-2}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

$V(X)=m^2 \Rightarrow E(X^2)=2m^2$

$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2=2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a\right)^2$

$\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}a^2=\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{4}{5}a+\frac{8}{25}a^2$

$\frac{2}{25}a^2=\frac{4}{5}a \Rightarrow a=10$

$\therefore E(X^2)+E(X)=\left(\frac{1}{2}+40\right)+\left(\frac{1}{2}+4\right)=45$

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

3k(3,6,9)	3	0	0	1
3k+1(1,4,7,10)	0	3	0	1
3k+2(2,5,8)	0	0	3	1
	X	△	O	△

$({}_4C_3-{}_3C_3)+{}_3C_3+({}_3C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1-{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1)=22$

$\therefore \frac{22}{{}_{10}C_3}=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 175

$x+y+z+u=11 \quad (1\le x,y,z,u\le 6)$

$_4H_7-(\underbrace{4}_{8111}+\underbrace{\frac{4!}{2!}}_{7211})=120-16=104$

$\therefore \frac{104}{6^4}=\frac{13}{162}$

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점] 260

> (가) $n(A) \le 3$
>
> (나) $n(A)=n(B)$ $\quad A=B$
>
> (다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ne x$이다.

i) $n(A)=1$ (X)

ii) $n(A)=2 \Rightarrow {}_5C_2\times 2^3=80$

1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

iii) $n(A)=3 \Rightarrow ({}_5C_3\times 2)\times 3^2=180$

1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

$\therefore 80+180=260$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

$\ln\frac{4}{2}=\ln 2$

24. $\displaystyle\int_0^\pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

$\int_0^\pi x\sin x\,dx=\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^\pi=\pi$

$\left(\begin{array}{cc}\sin x & x\\ -\cos x & 1\end{array}\right)$

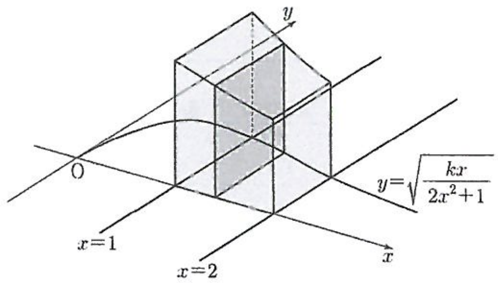
25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_n=10 \Rightarrow 5$

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$V=\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx=\left[\frac{k}{4}\ln(2x^2+1)\right]_1^2$

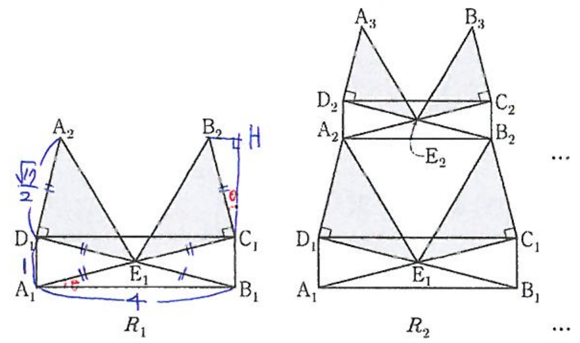
$=\frac{k}{4}\ln\frac{9}{3}=\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$

$\therefore k=8$

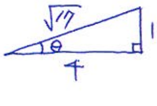
27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◺◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◺◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$



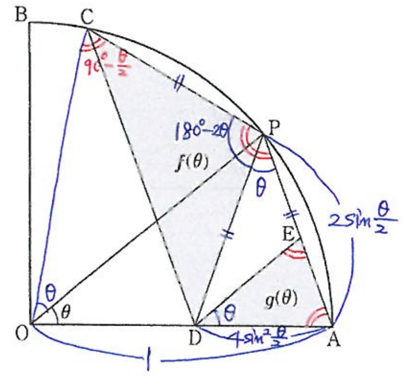
$\overline{B_2H}=\frac{\sqrt{17}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\overline{A_2B_2}=4-2\times\frac{1}{2}=3$

$\therefore \frac{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{7}$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

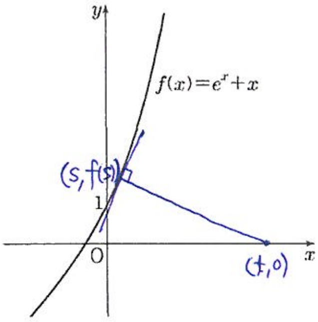
$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 4\sin^2\frac{\theta}{2}\times\sin(180°-2\theta)\fallingdotseq\theta^3$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 16\sin^4\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\fallingdotseq\frac{1}{2}\theta^5$

$\therefore \frac{1}{2}$

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점] 3



$\frac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1 \Rightarrow (e^s+s)(e^s+1)=t-s$

$\begin{cases} t=e^{2s}+(s+1)e^s+2s \\ g(t)=e^s+s=1 \Rightarrow s=0,\ t=2 \\ h(g(t))=t \Rightarrow h'(g(t))g'(t)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} g'(t)\,dt=(e^s+1)\,ds \\ dt=\{2e^{2s}+(s+2)e^s+2\}\,ds \end{cases}$

$g'(t)=\dfrac{e^s+1}{2e^{2s}+(s+2)e^s+2}$

$\therefore h'(1)\times\frac{2}{6}=1 \Rightarrow h'(1)=3$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g(x)\geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

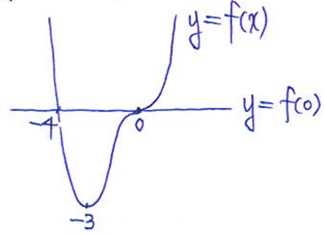
> (가) $x\leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(-3)$이다.
>
> (나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다.
>
> ⊕

$\int_4^5 g(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 283

(나) $\begin{cases} x=0:\ f'(0)=0 \\ x>-3:\ f'(x)\geq 0 \end{cases}$

(가)



$\therefore \int_4^5 g(x)\,dx=\int_1^2 g(x+3)\,dx=\int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{f(x)-f(0)}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{x^3(x+4)}\right]_1^2$

$=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{43}{240}$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a, 1, -1)$, $\mathrm{B}(-5, b, 3)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(8, 3, 1)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

$a=21,\ b=5$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a, \sqrt{3})$에서의 접선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값은? [3점]

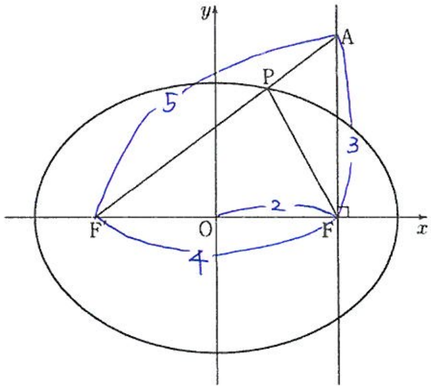
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1$

$\frac{2}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=2$

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 A가 $\overline{\mathrm{AF'}}=5$, $\overline{\mathrm{AF}}=3$을 만족시킨다. 선분 AF′과 타원이 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, a는 $a>\sqrt{5}$인 상수이다.) [3점]

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10



$a^2-5=2^2 \Rightarrow a=3$

$\therefore\ 2a+4=10$

26. 좌표평면 위의 점 A(3, 0)에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2=5$

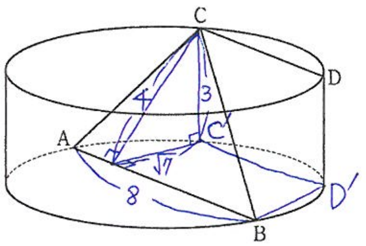
$\overline{AP}=\sqrt{5}$ (원)

$x-2y+2k=0$

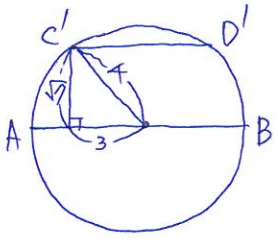
$d=\frac{|3+2k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=r \Rightarrow k=1$

27. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는? [3점]

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다.
(나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.



① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6　④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7



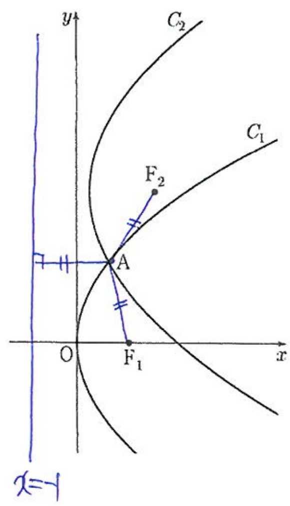
$\therefore \overline{CD}=\overline{C'D'}=6$

28. 실수 $p\,(p \ge 1)$과 함수 $f(x)=(x+a)^2$에 대하여 두 포물선

$$C_1 : y^2=4x, \quad C_2 : (y-3)^2=4p\{x-f(p)\}$$

가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\overline{AF_1}=\overline{AF_2}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{4}$　② $-\frac{5}{8}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{3}{8}$　⑤ $-\frac{1}{4}$



$x=-p+f(p)=-p+(p+a)^2=-1$

$p^2+(2a-1)p+(a^2+1)=0$

$D=4a^2-4a+1-4a^2-4=0$

$\therefore a=-\frac{3}{4}$

단답형

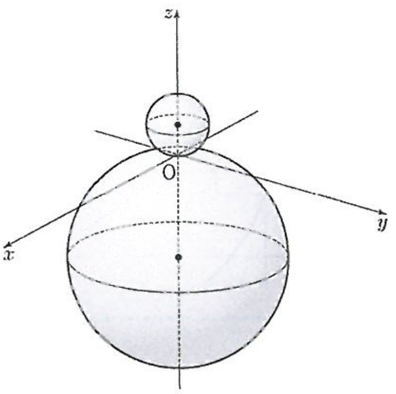
29. 좌표공간에 두 개의 구

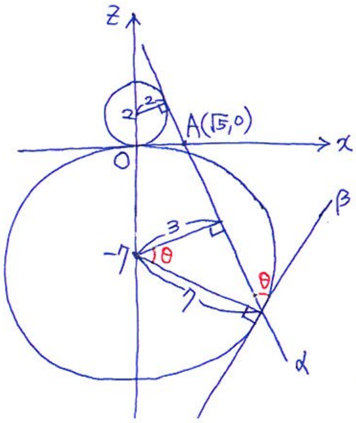
$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},\,0,\,0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

127





$z=m(x-\sqrt{5})$

$d=\dfrac{|\sqrt{5}m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$5m^2+4\sqrt{5}m+4=4m^2+4$

$m=-4\sqrt{5} \Rightarrow z=-4\sqrt{5}x+20$

$d'=\dfrac{27}{\sqrt{81}}=3$

$\therefore S'=40\pi\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{120}{7}\pi$

30. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2,\,2)$, $\mathrm{B}(2,\,2)$가 있다.

$$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\ge 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

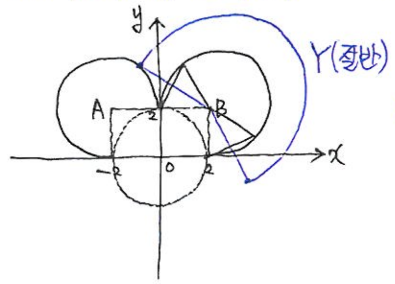
> (가) $\vec{u}=(1,\,0)$에 대하여 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u})\ge 0$이다.
>
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$

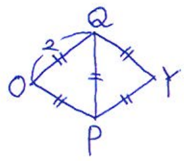
$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 17

$\overline{\mathrm{AX}}=2$ 또는 $\overline{\mathrm{BX}}=2$ (단, $\overline{\mathrm{OX}}\ge 2$)

(가) $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2) \Rightarrow x_1x_2\ge 0$





$\overline{\mathrm{OY}}=2\sqrt{3}$

$\therefore 2\times\left\{2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=4\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.