제 2 교시

수학 영역

적어도 3:4:5 / 5:12:13 / 8:15:17은 암기해두기

5지선다형

1. $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

4

$\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} = 2^2$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

1

$f' = 4x$

$f'(2) = 8$

3. $\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

2

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ $\cos\theta = -\frac{12}{13}$

$\therefore -\frac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x\le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

두 근의 합 ⇒ 근과 계수

1

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-a = a^2-6$

$a^2+a-6=0$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\underline{a_1 = 2a_5}, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

$2a_{10} = -6$

일 때, a_2의 값은? [3점]

3

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

$\underline{a_{10} = -3}$

$a = 2(a+4d)$

$a = -8d$

$a = 2a + 8d$

$a_{10} = d = \boxed{-3}$

$+24-3$

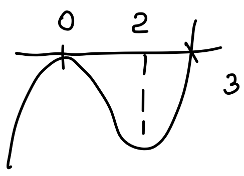
미분하기 전에 개형 파악. $x^2(x-3) \Rightarrow 2:1$ 비율 사용

+) 삼차 $ax^3+\cdots$, α, β에서 극점이면 극대-극소: $\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

5

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$8-n+9$

-4

OR $\frac{|1|}{2}(2)^3 = 4$ → 극대-극소 $= 4$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_n = \frac{1}{\boxed{n(n+1)}}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

5

분모 곱 형태 ⇒ 부분분수

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$\sum_{k=1}^{10} S_k - S_{10} = \sum_{k=1}^{9} S_k$

$= \sum_{1}^{9}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

접점 t로 연립

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

①

$y' = 3x^2-4$　$y'(1) = -1$

$y = -x+3$

$t^4+3t+a = -t+3$

$4t^3+3 = -1$　$t=-1$

$1-3+a = 4$

$-2+a = 4$

* 삼각함수는 대칭성 활용 필수 < 선대칭, 점대칭 >

9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1 = \frac{1}{2}$$

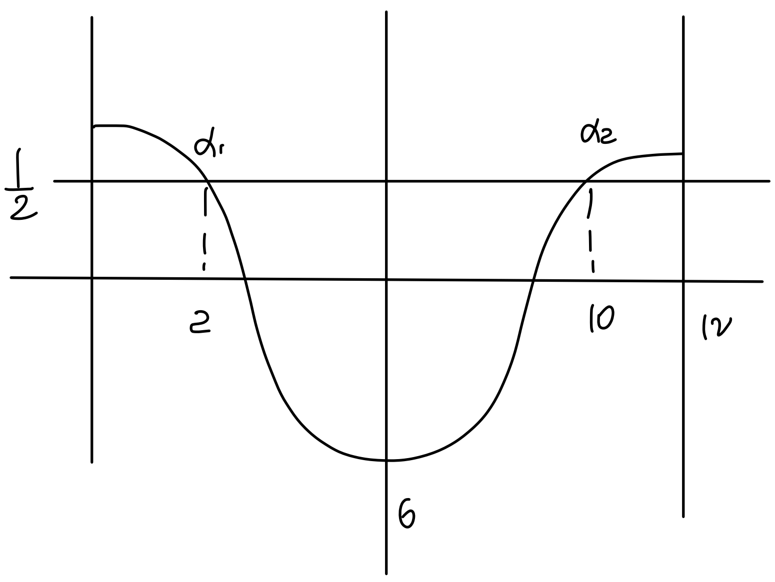
4, 8

12　$\frac{1}{2}$　4

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

③

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5



10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

cf) 이동거리 vs 위치 변화량

$$v(t)=3t^2+at\quad(a>0)$$

$\int_a^b |v(t)|\,dt$　$\int_a^b v(t)\,dt$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

④

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$x(t) = t^3 + \frac{1}{2}at^2$

$x(2) = 8+2a$　16

6

* 제곱근 → (홀 / 짝 (⊕ / ⊖ 만 검증

 홀 → 근 1개 짝 → (2 / 1 / 0 ⊕ → 두근 대칭 / 0 / ⊖

수학 영역

* 처음부터 A, B 좌표 미지수 잡는 짓만 하지 말기
A, C는 대칭이고, $\overline{AH}$는 두 근의 차인거만 파악하면 됨

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 $\boxed{-9}$이다.

짝 → 근 2, 1, 0 3, −3

⇒ $\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근이 ±3
$(\pm 3)^4=\sqrt{3^{f(n)}}$

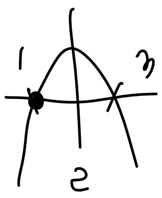
① 8 ② 9 ③ ~~10~~ ④ 11 ⑤ 12

②

$\boxed{3, -3}$ $f(n)$은 짝수

81의 네제곱근 $f(n)=8$

$f(1)=k-1=8$ $k=9$

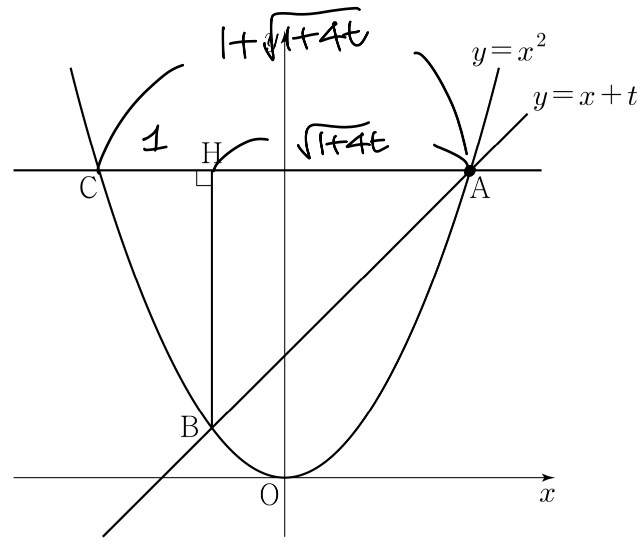


12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

②



$x^2-x-t=0$ 두 근의 차 : $\frac{\sqrt{D}}{|a|}=\sqrt{1+4t}$

$\frac{1\pm\sqrt{1+4t}}{2}$

$2\,\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$

$\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$

$=\frac{4t}{t}\times\frac{1}{\sqrt{1+4t}+1}$

$4\times\frac{1}{2}=2$

원 위의 점 나오면 무조건 중심과 연결
$\overline{OD}$를 이었느냐가 포인트. 모르는 길이는 미지수로
우리가 쓸 수 있는건 sin, cos 법칙 + 원의 성질이 전부

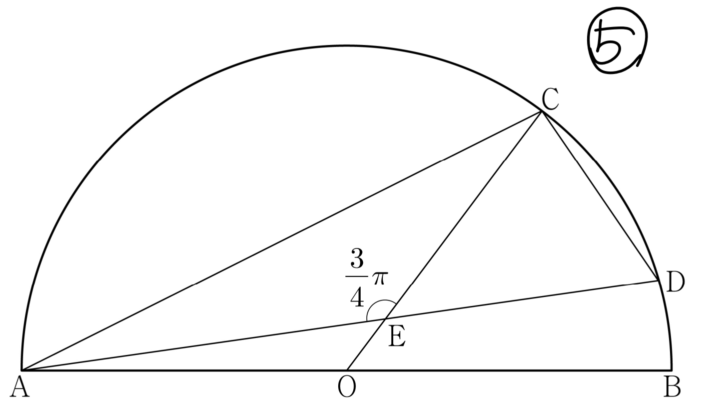
ㄱ,ㄴ,ㄷ 연관성
ㄴ을 가지고 ㄷ 풀 때 활용

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

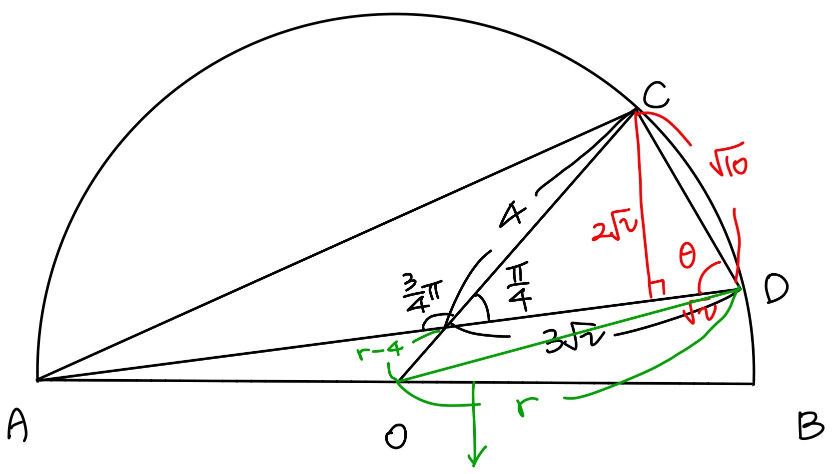
$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

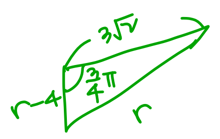
이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]

⑤



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$





$r^2-8r+16+18+\cancel{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot(r-4)\cdot(+\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}})=r^2$

$\cancel{r^2}-8r+34+6r-24=\cancel{r^2}$

$10-2r=0$ $r=5$

$\therefore \frac{AC}{\sin\theta}=2r=10$

$\Rightarrow AC=10\sin\theta=10\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=2\sqrt{20}$

$\therefore 2\sqrt{20}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

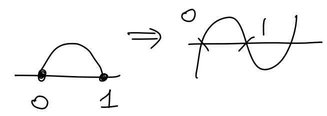
라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

⑤

<보 기>

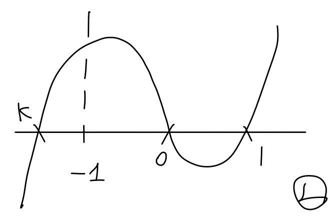
ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
⇒ f(k)=0 근 있겠구나 파악해서 식 잡고 계산
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$
$\ominus$ ⇒ 

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx<0$ ㉠
$\ominus$ $\ominus$

ㄴ. $\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$
$\oplus$ $\ominus$



ㄷ. $g(-1)>1$ ⇒ $f(x)=x(x-1)(x-k)$
$=x(x^2-(k+1)x+k)$

$\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 -f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 \underset{기}{x^3}-(k+1)x^2+\underset{기}{kx}\,dx$ $\boxed{k<-\frac{5}{2}}$
$=2\left[-\frac{1}{3}(k+1)x^3\right]_0^1=-\frac{2}{3}(k+1)>1$

$\Rightarrow g(0)=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1 x^3-(k+1)x^2+kx\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(k+1)x^3+\frac{1}{2}kx^2\right]_0^1$
$=2\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}k-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}k\right]=2\left[\frac{1}{6}k-\frac{1}{12}\right]=\frac{1}{3}k-\frac{1}{6}<-1$

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k} = r^k$이다.
> (단, r는 $0 < |r| < 1$인 상수이다.)
> ↳ r의 부호로 분류해야하는게 당연한 절차
> (나) $a_1 < 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> 수열은 나열하면서 규칙성 찾는게 전부
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \ge 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m| \ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p + a_1$의 값은? [4점]

③

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\underline{a_4 = r}$

$0<|r|<1$

a_1 a_2 a_3 a_4 | a_5 a_6 a_7 a_8

4

$\boxed{-14}$

$7 \rightarrow -\frac{7}{2} \leftarrow r$

$-\frac{1}{2}$

r^2

$-\frac{1}{2}(r+6)+3$

$\oplus$ $r+3$ $r+6$ $-\frac{1}{2}(r+6)$

$\ominus$ r $r+3$ $\boxed{r+6}$ $-\frac{1}{2}(r+6)$

$0 \sim -1$ 5↑

1) r이 양수

$r^2 = -\frac{1}{2}(r+6)+3$

$2r^2 = -r-6+6$ $2r^2+r=0$ $r=0, -\frac{1}{2}$ ×

2) r이 음수 ⇒ 똑같이 $0, -\frac{1}{2}$ $\boxed{r=-\frac{1}{2}}$

4개 cycle. $a_1 \sim a_4$ 제외 24개 cycle

cycle 당 $|a_m| \ge 5$ 1개

⇒ 24 + 2개 = 26개
↑
a_1, a_2

∴ $26-14 = \underline{12}$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4) = \log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\underline{7}$

$x^2-8x+16 = x+2$

$x^2-9x+14=0$

$\cancel{2}, 7$

$-\frac{1}{2}(r+6)+3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

16

$f(x) = 2x^3-2x^2+3x+2$

$f(2) = 16-8+6+2$

$= 8+8 = 16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \boxed{\sum_{k=1}^{5} c}$$ $5 \times c.$

그냥 실수로 c만 쓰는 거 주의

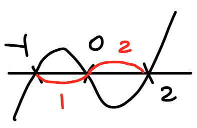
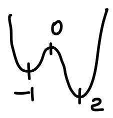
를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

$c \sum_{k=1}^{5} a_k = 65 + 5c$ 13

$\hookrightarrow 10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

0~2 간격이 더 넓으니 더 내려가야

극점 $-1, 0, 2$  $\Rightarrow$ 

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

4개

$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -k$

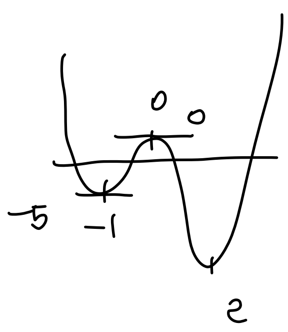
$12x^3 - 12x^2 - 24x$

$12x(x^2 - x - 2)$

$(x-2)(x+1)$

$-1, 0, 2$

$f(-1) = 3 + 4 - 12$
$= -5$



$f(0) = 0$

$k = 1, 2, 3, 4$

20. 상수 $\boxed{k\,(k<0)}$에 대하여 두 함수

조건 정확히 읽기 / 애초에 변곡점 기울기가 −4보단 커서 k>0에선 접할 수도 없다.

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

80

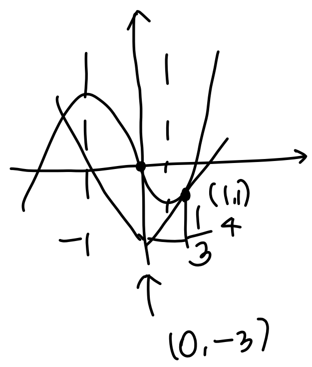
$f' = 3x^2 + 2x - 1$ $\frac{1}{3}, -1$

$\Rightarrow$ 3 −1 / 1 +1

$3x^2 + 2x - 1 = +4$

$3x^2 + 2x - 5 = 0$

3 +5 / 1 −1



$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$

$x^3 + x^2 - x = +4x - 3$

$\int_{-1}^{0} \cancel{x^3} + x^2 + 3x + 3 \, dx$ $x^3 + x^2 + 3x + 3$ $x = -1$

$+ \int_{0}^{1} \cancel{x^3} + x^2 - 5x + 3 \, dx$

$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{0}^{1}$

$= -\left[-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3\right] + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3$

$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3$

$= \frac{2}{3} - 4 + 6 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

* 극솟값에 따라 분류해야하지만 어느정도 직감으로
극소가 음수면 불연속점이 너무 많지 않을까 하는 생각이 들었으면
* 특수값인 0과 극대와 x축의 조건인 4를 해보자

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

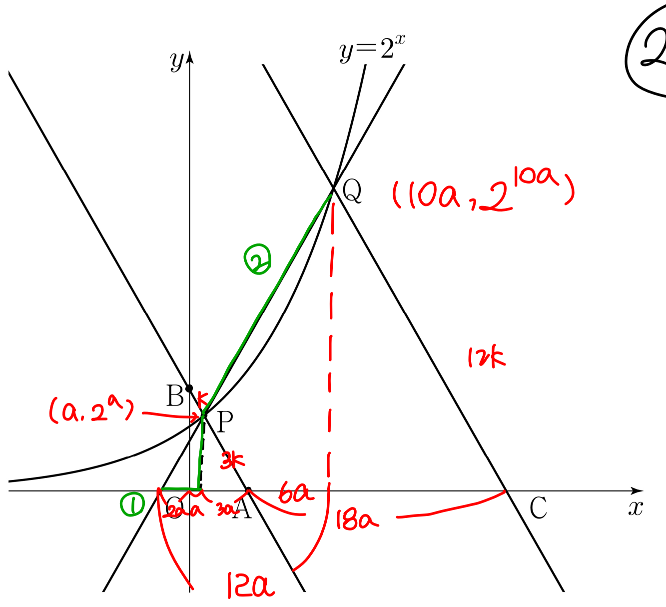
한 문자 정리 필요

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

x,y 좌표축 위의 길이비는 x,y 길이비로 구별된다
+) 닮음 활용

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]

220



기울기 ⇒ $\dfrac{2^a}{3a} = \dfrac{2^{10a}-2^a}{9a}$
① ②

⇒ $3\cdot 2^a = 2^{10a}-2^a$

$2^{a+2} = 2^{10a}$

$9a = 2$ $\quad a=\frac{2}{9}$

$b = 10a$

∴ $90(a+b) = 90\times 11a = 90\times 11\times\frac{2}{9}$

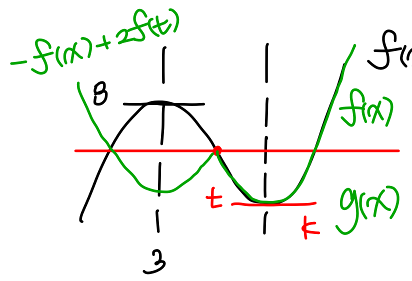
$= 220$

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

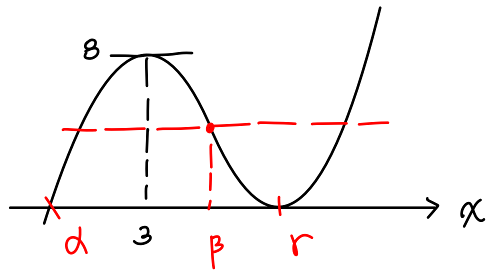
* $y=f(t)$ 대칭 → t 연속

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]



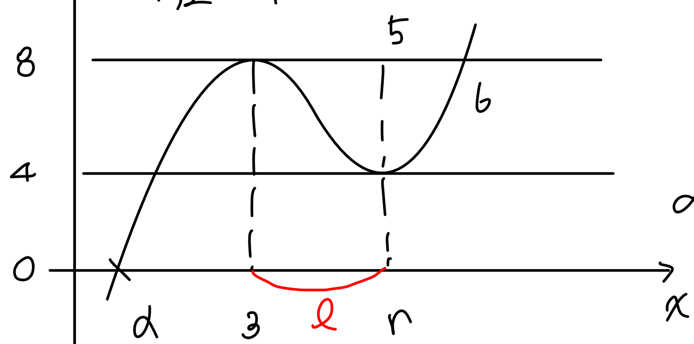
⇒ 극솟값이 중요

극소 = 0 이면



$t<\alpha$이면 근 3개
$t=\alpha$이면 2개
$t<\beta$이면 1개
$t=\beta$이면 2개
$\beta<t<\gamma$이면 3개
$t=\gamma$ 2개
⇒ 3개

극소 = 4



$t<\alpha$ 2개
$t=\alpha$ 1개
$\alpha<t<\gamma$ 1개
$t=\gamma$ 2개
$t>\gamma$ 1개
⇒ 2개

⇒ 극대−극소 $=4 \rightarrow \frac{1}{2}(l)^3$ $\quad l=2$ ⇒ 극소 $x=5$

∴ $f(x)=(x-3)^2(x-6)+8$

$f(8)=25\times 2+8=\boxed{58}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.