제 2 교시

수학 영역

Pabloff 22.08.31

5지선다형

1. $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x) = 2x^2 + 5$ 에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$4 \cdot 2 = 8$

3. $\sin(\pi - \theta) = \frac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta < 0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

$\tan\theta < 0$

$\downarrow$

$-\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & (x \le a) \\ ax - 6 & (x > a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-a = a^2 - 6$

$a = -3, 2$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

$a_{10} = -3$

$a_1 = 2a_1 + 8d$

$a_1 = -8d$

$a_{10} = d = -3$

$a_2 = (-7)\cdot(-3) = 21$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow$ $x=0$ 극대, $x=2$ 극소.

$k = 9$

$f(2) = 9 - 4 = 5$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$S_k - a_k = S_{k-1}$, $S_1 - a_1 = 0$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9} S_k = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$y' = 3x^2 - 4$

$x=1 \rightarrow y=2,\ y'=-1 \rightarrow y=-x+3$

$x^4+4x+a-3 \Rightarrow$ x축에 접함

$4x^3+4=0$

$x=-1$ 에서 극소

$1-4+a-3=0$

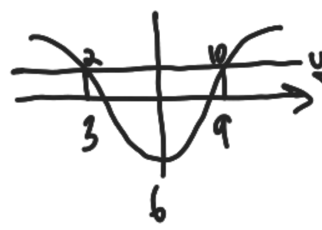
$a=6$

9. 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$y=k \rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$-3\cos A=\frac{3}{2}$

$\cos A=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi.$

$$\frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)\cancel{\pi}}{\frac{1}{6}\cancel{\pi}}=4$$

10. 수직선 위의 점 $\mathrm{A}(6)$과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at\quad(a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\mathrm{P} \rightarrow 16$ or -4

$\int_0^2 v(t)\,dt > 0 \rightarrow \int_0^2 v(t)\,dt = 16$

$\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2 = 8+2a=16$

$a=4$

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

3 -3 이
네제곱근

$\sqrt{3}^{f(n)} = 81$

$f(n)=8$

$-(n-2)^2+k=8$ 인 자연수 n

$\rightarrow n=2-a,\ 2+a.$

$\quad\ \ \| \qquad \|$

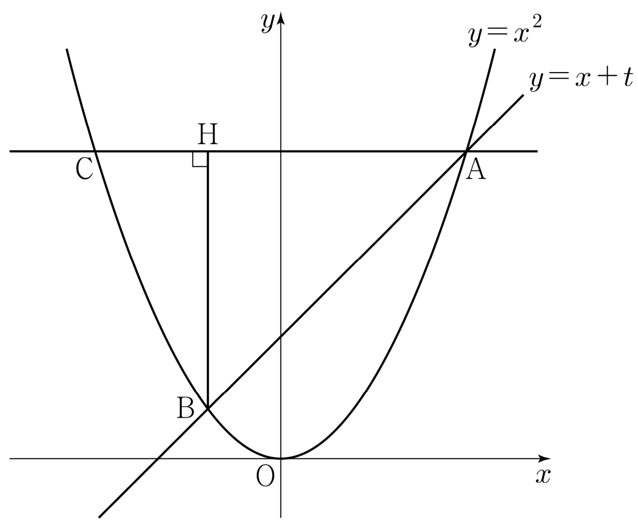
$\quad\ \ 1 \qquad 3$ (자연수니까...)

$-1+k=8,\ k=9$

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$x^2-x-t=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4t}}{2}$

C H A

$\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4t}}{2} \quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4t}}{2}}_{1} \quad \underbrace{\quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4t}}{2}}_{\sqrt{1+4t}}$

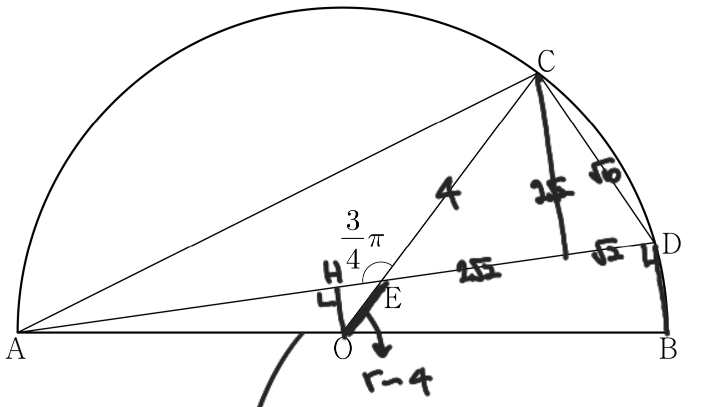
$\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t} = \frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$

$t\to0+ \rightarrow 2$

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

$\overline{AE}=k$ △OAH 와 △BAD는 1 : 2 닮음
$\overline{OA}=r$.

$\overline{AD}=2\overline{AH}$

$k+3\sqrt{2}$ $2\left(k-\frac{r-4}{\sqrt{2}}\right)$

$k=\sqrt{2}r-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}r=k+\sqrt{2}$

△BAD는 직각△ → $4r^2=(k+3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}r-4\sqrt{2})^2$

$(\sqrt{2}k+2)^2=(k+3\sqrt{2})^2+(k-3\sqrt{2})^2$

$2k^2+4\sqrt{2}k+4=2k^2+36$

$4\sqrt{2}k=32$

$k=4\sqrt{2}$

△AEC 에 코사인법칙

$\overline{AC}^2=16+32+32\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=80$

$\overline{AC}=4\sqrt{5}$

$\overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

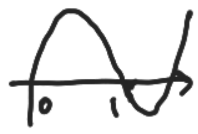
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(0)=0$

$\int_0^1(f(x)-|f(x)|)\,dx=0$

→ $f(x)$는 $(0,1)$ 에서 $f(x)>0$

최고차항 양수이므로



$x<0$ 에서 $f(x)<0$

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx<0$ → (참)

ㄴ. $g(-1)>0$ → $\int_{-1}^0 f(x)\,dx>\int_0^1|f(x)|\,dx$ 에서

$(-1,0)$ 에서 $f(x)>0$ 이고 $(0,1)$ 에서 $f(x)<0$

$f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(k)=0$

→ $f(x)=x(x-1)(x-k)=x^3-(k+1)x^2+kx$

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(k+1)x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_{-1}^0=-\frac{5}{6}k-\frac{7}{12}$

$\int_0^1|f(x)|\,dx$ ⇒ 아래끝 0, 위끝 1

↳ $\left|\frac{k}{6}-\frac{1}{12}\right|=\frac{1}{12}-\frac{k}{6}$

$-\frac{5}{6}k-\frac{7}{12}>\frac{1}{12}-\frac{k}{6}$ 에서 $k<-1$ (참)

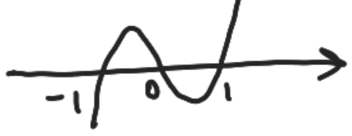
ㄷ. $-\frac{5}{6}k-\frac{7}{12}>\frac{1}{12}-\frac{k}{6}+1$ 에서

$k<-\frac{5}{2}$ 이고

$g(0)=\int_0^1(f(x)-|f(x)|)\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx$

$=\frac{k}{3}-\frac{1}{6}<-1$ (참)

참고. ㄴ은



이때가 경계이므로 $k<-1$ 이기도 함

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
> (단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
>
> (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$-1<a_4<1$

$2<a_5=a_4+3<4$

$5<a_6=a_4+6<7$

$-\frac{7}{2}<a_7=-\frac{a_4}{2}+3<-\frac{5}{2}$

$a_8=-\frac{a_4}{2}$ 이고 $a_8=r^2$ 이므로

$r=-\frac{1}{2}$

$a_4=-\frac{1}{2}$

$a_3=-\frac{7}{2}$

$a_2=7$

$a_1=4$ or -14 인데 $a_1<0$ 이므로 $a_1=-14$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$\boxed{-14}$	$\boxed{7}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{11}{2}}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\boxed{\frac{25}{4}}$	$-\frac{25}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{23}{8}$	$\boxed{\frac{47}{8}}$	$-\frac{47}{16}$	$\frac{1}{16}$	……
2				1				1				1				……

$2+24=26=p$

$26-14=12$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>4$

$(x-4)^2=(x+2)$

$x^2-9x+14=0$

$x=7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+C$

$f(1)=3+C=5$

$C=2$

$f(2)=16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

$10c = 65 + 5c$

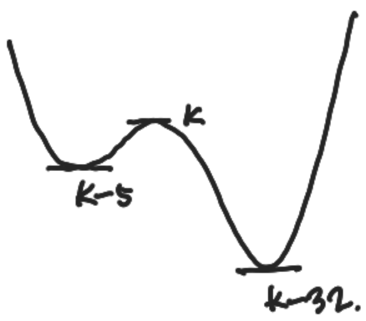
$c = 13$

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$

$x = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

극대 ↓ k 　 극소 ↓ $k-5$, $k-32$



$k - 5 < 0 < k$

에서

$0 < k < 5$

↓

1 2 3 4

4개

20. 상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

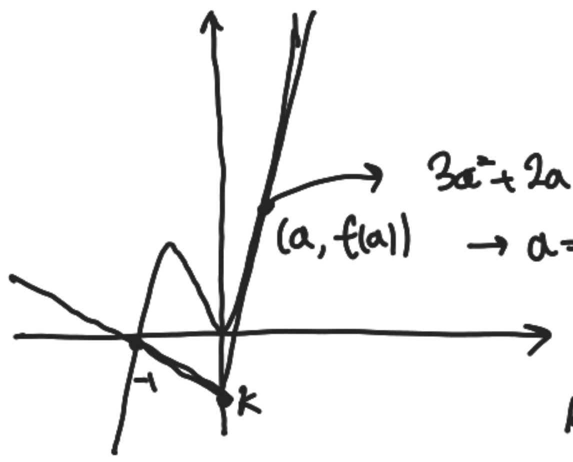
의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

$x > 0 \rightarrow x^3 + x^2 - x = 4x + k$

$x^3 + x^2 = 5x + k$

$x < 0 \rightarrow x^3 + x^2 - x = -4x + k$

$x^3 + x^2 = -3x + k$



$\rightarrow 3a^2 + 2a = 5$

$\rightarrow a = 1, \; f(a) = 2$

↓

$k = -3$

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3) = a(x)$

$\int_0^1 a(x)\,dx = \int_{-1}^0 a(x+1)\,dx$

$= \int_{-1}^0 x^3 + 4x^2\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^0 = \frac{13}{12}$

$x^3 + x^2 + 3x + 3 = (x+1)(x^2+3) = b(x)$

$\int_{-1}^0 b(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^0$

$= \frac{10}{3} - \frac{7}{4} = \frac{19}{12}$

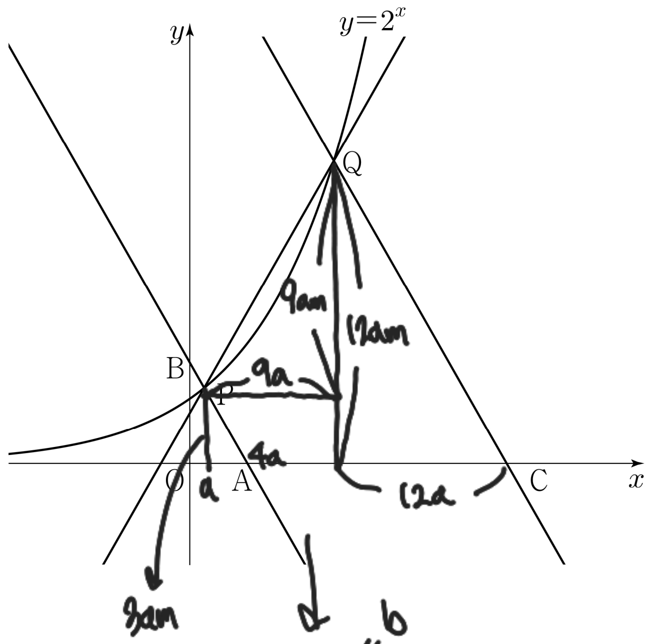
$\frac{13}{12} + \frac{19}{12} = \frac{8}{3} = S$

$30 \times S = 80$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



Q(10a, 12am)
P(a, 3am)

→ $2^a = 3am$
$2^{10a} = 12am$ → $2^{9a} = 4$
$a = \frac{2}{9}$

$90 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{20}{9}\right) = 220$

h(t)가 불연속인 t의 개수

((f(x)=0 인 x 개수) + (f(x)=4, x>t인 x 개수))

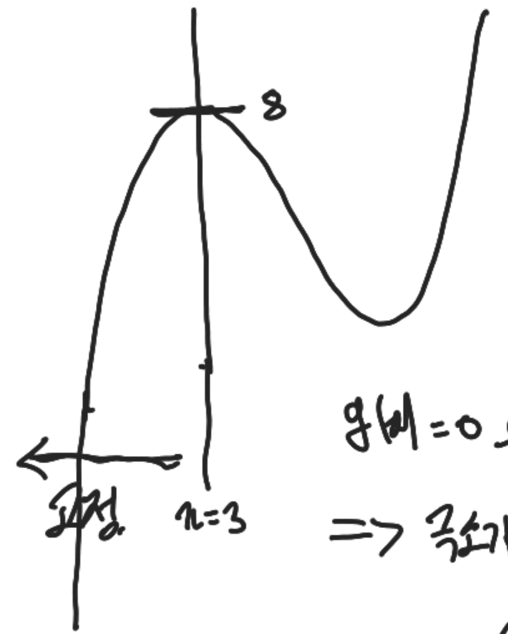
22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

g(x)는 x=t에서 연속

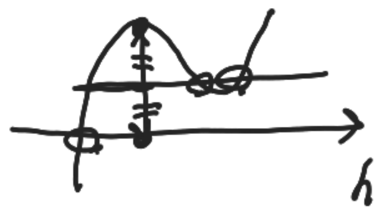
x<t 에서 f(x)를 y=f(t) 기준으로 접은 함수



g(x)=0 의 실근 개수

=> 극소가 얼마나 내려오나에 관련.

극대/극소가 있으면



① 극소가 0보다 작음 → f(x)=0 인 곳에서 이미 불연속 3개

② 극소가 0 이상 4 미만 → f(x)=0, (f(x)=4, x>t) 에서 불연속 1+2=3개.

극대와 y=0 사이 중점

③ 극소가 4 초과 → f(x)=0 인곳에서 불연속 1개

→ ④ 극소가 4면 f(x)=0에서 불연속 1개
(f(x)=4, x>t)에서 불연속 1개.

→ 극대 8, 극소 4 → $8-4=\frac{(k-3)^3}{2}$
x=3, x=k

→ k=5

$f(x)=(x-2)(x-5)^2+4$
$f(8)=58$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

${}_6C_2 \times 2^4 = 240$

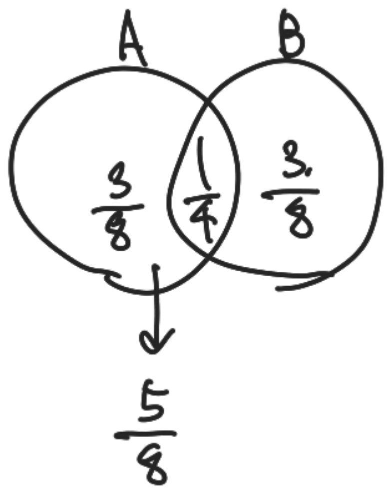
24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = 1, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$.



25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

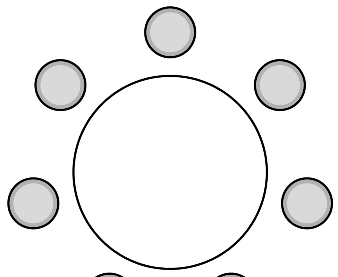
$P\left(-\frac{1}{4} < Z < 1\right) = P(-1 < Z < ?)$

$? = \frac{1}{4}$

$k = 20.25$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



AB AC BAC

$\frac{2\cdot5!+2\cdot5!-2\cdot4!}{6!} = \frac{18\cdot4!}{6!}$

$= \frac{3}{5}$

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

$\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}=E(X)$.

$E(X^2)=2(E(X))^2$

$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2=2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a\right)^2$

$=\frac{1}{2}+\frac{4}{5}a+\frac{8}{25}a^2$

$\frac{2}{25}a^2-\frac{4}{5}a=\frac{2}{5}a\left(\frac{1}{5}a-2\right)$

$a=10$

$E(X)=\frac{9}{2}$

$2\left(\frac{81}{4}\right)+\frac{9}{2}=45$

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

1개는 5 or 10

나머지를 a, b라 두면. $(a<b)$

① 5 → $a+b=4, 7, 10, 13, 16, 19$

② 10 → $a+b=5, 8, 11, 14, 17$

③ 5 and 10 → 3, 6, 9

① → $1+2+4+3+2+1=13$

② → $2+3+4+2+1=12$

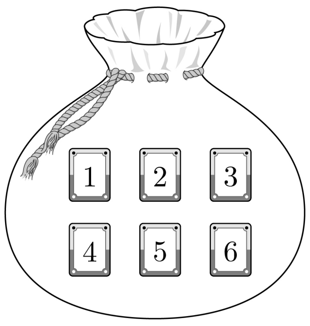
③ → 3가지.

$\frac{13+12-3}{{}_{10}C_3}=\frac{22}{120}$

$=\frac{11}{60}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$a+b+c+d=11$

a, b, c, d는 $1\sim6$ 자연수

↓

$a'+b'+c'+d'=7$

$_4H_7 - \left(\begin{array}{l} 7000 \rightarrow 4가지 \\ 6100 \rightarrow {}_4P_2=12가지 \end{array}\right)$

$_{10}C_3 - 16 = 120 - 16 = 104$

$\frac{104}{6^4} = \frac{13}{6\times27} = \frac{13}{162}$

$p+q = 175$

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \rightarrow X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $n(A) \leq 3$
>
> (나) $n(A)=n(B)$
>
> (다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

(1) $n(A)=n(B)=3$.

①②③ → ①,②,③ 안겹치게 하나씩 + 자기자신 X → 2가지

④⑤ → ①,②,③ 으로 가야함 → 9가지

뽑는 경우 $_5C_3=10$가지

→ $10\cdot9\cdot2=180$

(2) $n(A)=n(B)=2$.

①② → ①,② 안겹 + 자기자신 X → 1가지.

③④⑤ → ①,②로 가야함 → 8가지

뽑는 경우 $_5C_2=10$가지

→ $10\cdot8\cdot1=80$

(3) $n(A)=n(B)=1$.

(다)조건에 모순 → 0.

$180+80+0=260$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

$\ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

24. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

$\int_0^{\pi} x\sin x \, dx$ ②

$= \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x \, dx}_{=0}$

$= \pi$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

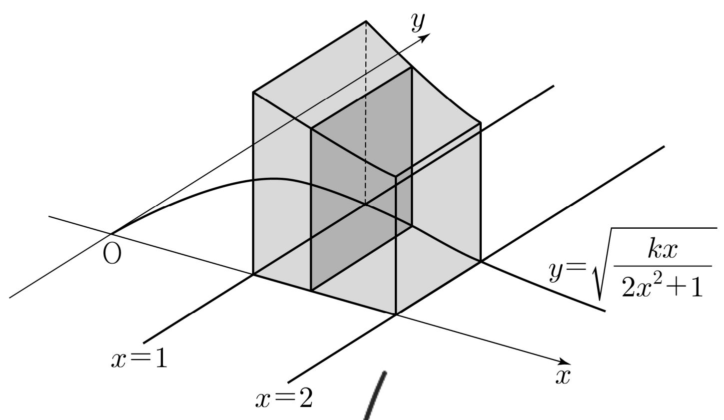
$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

$\lim_{n\to\infty} a_n = 10$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2}=\frac{10}{2}=5$$

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

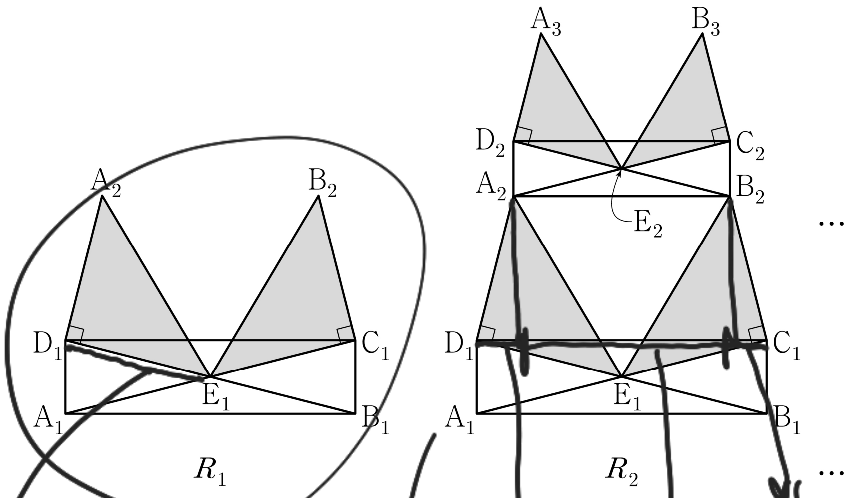
$$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{k}{4}\left[\ln(2x^2+1)\right]_1^2$$

$$=\frac{k}{4}\ln 3 = 2\ln 3$$

$$k=8$$

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자.
$\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다.
두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◺◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◺◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

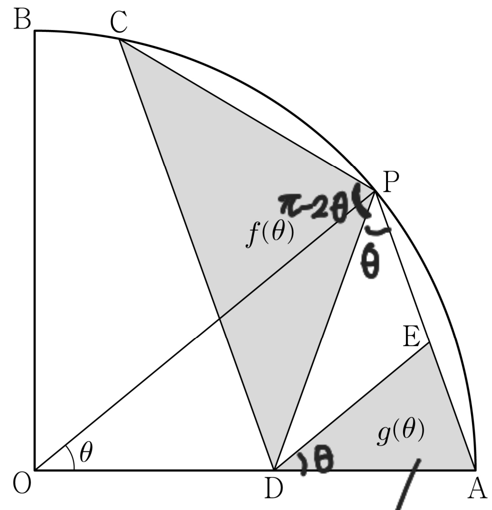
$\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ $3.$ $\quad$ 2

$\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

$$\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{7}$$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$\triangle AOP \xrightarrow{\times 2\sin\frac{\theta}{2}} \triangle APD \xrightarrow{\times 2\sin\frac{\theta}{2}} \triangle ADE$ 다 닮음.

$\frac{1}{2}\sin\theta$ (넓이). $\rightarrow$ $g(\theta)=8\sin\theta\sin^4\frac{\theta}{2}$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)$

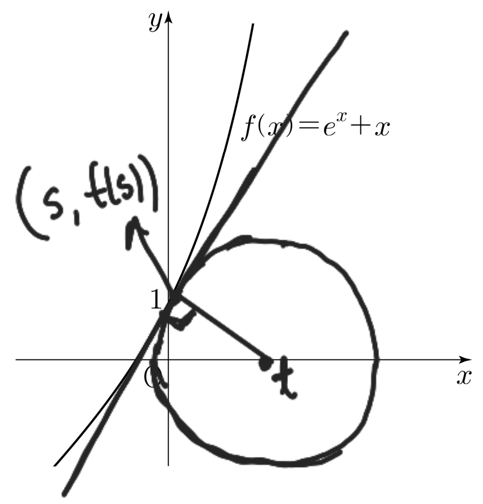
$=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta$

극한 $\rightarrow$ $\dfrac{8\cdot\theta\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{2\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot2\theta\cdot\theta^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



$$f'(s)\times\frac{f(s)}{s-t}=-1$$

$$(e^s+s)(e^s+1)=t-s$$

t로 미분 → $2e^{2s}\cdot\frac{ds}{dt}+(s+2)e^s\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{ds}{dt}=1-\frac{ds}{dt}$

→ $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2e^{2s}+(s+2)e^s+2}$

$$h'(1)=\frac{1}{g'(h(1))}=\frac{1}{f'(0)\times\frac{ds}{dt}}$$

$f(0)=1$

$$=\frac{1}{2\times\frac{1}{6}}=3$$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\le -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(-3)$이다.
>
> (나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$g(x+3)=\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}\quad(x>-3)$$

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx=\left[\frac{-1}{f(x)-f(0)}\right]_1^2$$

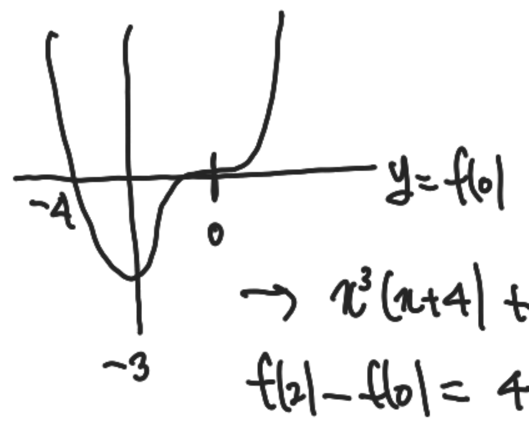
$$=-\frac{1}{f(2)-f(0)}+\frac{1}{f(1)-f(0)}$$

구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\ge 0$

→ 구간 $(-3,\infty)$에서 $f'(x)\ge 0$

(나) → $x=0$ 대입하면 $f'(0)=0$

(가)



→ $x^3(x+4)+f(0)=f(x)$

$f(2)-f(0)=48$

$f(1)-f(0)=5$ 이고 $-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}$

$=\frac{43}{240}$

$p+q=283$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.