해 설 지

출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	⑤	12	③	23	④	23	④	23	⑤
2	③	13	④	24	①	24	③	24	②
3	①	14	③	25	⑤	25	②	25	③
4	②	15	②	26	③	26	②	26	③
5	③	16	11	27	⑤	27	①	27	⑤
6	①	17	4	28	③	28	⑤	28	④
7	⑤	18	6	29	32	29	13	29	23
8	②	19	19	30	108	30	89	30	48
9	⑤	20	44						
10	④	21	25						
11	②	22	87						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

공통 해설 강의 QR코드

공통과목

1. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}} = 2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = 4$

2. 정답) ③ [수학Ⅱ 부정적분]

해설 : $f'(x)=3x^2+6x-4$의 양변을 부정적분하면

$f(x)=x^3+3x^2-4x+C$이고 $f(0)=3$에서 $C=3$이다.

$f(1)=C=3$이다.

3. 정답) ① [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이고

$\sin^2\theta=\frac{1}{9}$에서

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

4. 정답) ② [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$이고

$\lim\limits_{x\to-2+}f(x)+\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$이다.

5. 정답) ③ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : 방정식 $-\sin\pi x+1=0$을 정리하면

$\sin\pi x=1$이고 이를 만족하는 x의 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\cdots$ 이다.

이때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

두 실근은 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{2}$이고 $\frac{5}{2}\le a<\frac{9}{2}$이어야 한다.

주어진 범위에서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

6. 정답) ① [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$의 도함수는 $f'(x)=3x^2-6x+4$이다.
구하는 접선의 방정식이 $y=f'(k)(x-k)+f(k)$이므로 접선의 기울기는
$f'(k)$이고 $f'(k)=3k^2-6k+4=1$에서 $3(k-1)^2=0$, $k=1$이다.
$f(k)=f(1)=1$이다.

7. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 함수의 연속]

해설 : $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x\ge a) \\ 3x-4 & (x<a) \end{cases}$ 에서 $|f(x)|$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}|f(x)|=|f(a)|=|2a-1|$, $\lim_{x\to a+}|f(x)|=|3a-4|$ 에서

$|2a-1|=|3a-4|$이다.

$(2a-1)^2=(3a-4)^2$에서 $5(a-1)(a-3)=0$이고

$a=1$ 또는 $a=3$이다. 모든 실수 a의 값의 합은 $1+3=4$이다.

8. 정답) ② [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $\log_6(a+b)=2$에서 $a+b=36$이고

$\log_9 a-\log_3 b=\log_9\frac{a}{b^2}=-\frac{1}{2}$에서 $\frac{a}{b^2}=\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{3}b^2$이다.

두 식을 연립하면 $\frac{1}{3}b^2+b=36$에서

$b^2+3b-108=(b+12)(b-9)=0$, $b=9$이다.

$a=27$이고 $a-b=18$이다.

9. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : 모든 자연수 n에 대하여 $(4a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$에서

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$이고

$a_{n+1}=k_n a_n$이라 할 때, $k_n=\frac{1}{4}$ 또는 $k_n=2$이다.

이 때, $a_1=a_4$이므로

$a_4=k_1k_2k_3a_1$이고 $k_1k_2k_3=1$이다.

즉, k_1, k_2, k_3 중 2개의 수는 2이고, 나머지 1개의 수는 $\frac{1}{4}$이다.

(1) $k_1=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_3=\frac{1}{2}$이고 $\sum_{k=1}^{3}a_k=\frac{7}{4}$이다.

(2) $k_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=\frac{1}{2}$이고 $\sum_{k=1}^{3}a_k=\frac{7}{2}$이다.

(3) $k_3=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$이고 $\sum_{k=1}^{3}a_k=7$이다.

즉, $k_3=\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=1}^{3}a_k=7$로 최댓값을 가진다.

이는 $a_4=a_7$에서 $a_7=k_4k_5k_6a_4$, $k_4k_5k_6=1$인 세 수 k_4, k_5, k_6에서도

동일하고, $k_6=\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=4}^{6}a_k=7$로 최댓값이므로

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{3}a_k+\sum_{k=4}^{6}a_k\le 14$에서 $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 최댓값은 14이다.

10. 정답) ④ [수학Ⅱ 정적분]

해설 : $f(x)=x^3+ax^2+bx+\int_1^x t^2f'(t)dt$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+a+b$이다.

양변을 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b+x^2f'(x)$이고

$(1-x^2)f'(x)=3x^2+2ax+b$이다.

$f'(x)$도 다항함수이므로 양변의 최고차항이 같으려면

$f'(x)=-3$이어야하고,

$-3(1-x^2)=3x^2-3=3x^2+2ax+b$에서

$a=0$, $b=-3$이다.

$f(1)=1+a+b=-2$이고 $f'(x)=-3$에서 $f(x)=-3x+1$이다.

$\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha(-3x+1)dx=\left[-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^\alpha=-\frac{3}{2}\alpha^2+\alpha=0$이고

$\alpha=\frac{2}{3}$이다.

11. 정답) ② [수학Ⅱ 함수의 극한 + 도함수의 활용]

해설 : $\lim_{x\to t}\frac{f(x)-1}{x-t}$의 값이 존재하기 위해서는 $f(t)-1=0$이어야하고

이를 만족시키는 실수 t가 -1, 2뿐이므로

인수정리에 의해 함수 $f(x)-1$은

$(x+1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가져 $f(x)-1=k(x+1)(x-2)^2$이거나

$(x+1)^2$, $(x-2)$를 인수로 가져 $f(x)-1=k(x+1)^2(x-2)$이어야 한다.

이 때, $f'(0)>0$이므로

$f(x)-1=k(x+1)(x-2)^2$인 경우

$f'(x)=k(x-2)^2+2k(x+1)(x-2)$에서 $f'(0)=4k-4k=0$이므로 모순

$f(x)-1=k(x+1)^2(x-2)$인 경우

$f'(x)=k(x+1)^2+2k(x+1)(x-2)$에서 $f'(0)=k-4k=-3k>0$

에서 $k<0$이다.

$f(0)-1=-2k$이고 $f(0)=2$에서 $k=-\frac{1}{2}$이다.

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)+1$이고 $f(1)=2+1=3$이다.

12. 정답) ③ [수학Ⅰ 등차수열]

해설 : 두 점 $(k,\ a_k)$, $(8-k,\ -a_{8-k})$를 지나는 직선의 기울기가

일정하므로

$\frac{-a_{8-k}-a_k}{8-k-k}=\frac{-2a_4}{8-2k}$가 같은 값을 가져야 하고

분모인 $8-2k$가 k에 따라 달라지므로 $a_4=0$이어야 한다.

이때, $a_n=(n-4)d$이다.

$a_m=12$이므로 $(m-4)d=12$이다. $m-4$도 정수이므로 $|d|$는 12의 약수여야 하고

$m<4$일 때, $d=-4,\ -6,\ -12$

$m>4$일 때, $d=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$가 가능하므로 정수 d의 개수는 9이다.

13. 정답) ④ [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 두 점 A, B의 좌표를 구해보면

$n^{4x}=8$에서 $4x=\log_n 8$, $x=\frac{3}{4}\log_n 2$이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{4}\log_n 2,\ 8\right)$이고

$n^x=8$에서 $x=\log_n 8=3\log_n 2$이므로 $\mathrm{B}(3\log_n 2,\ 8)$이다.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 할 때,

직선 AP의 기울기는 $m_1=\frac{8-y}{\frac{3}{4}\log_n 2-x}$

직선 BP의 기울기는 $m_2=\frac{8-y}{3\log_n 2-x}$이다.

$m_2=4\times m_1$에서 $\frac{8-y}{3\log_n 2-x}=4\times\frac{8-y}{\frac{3}{4}\log_n 2-x}$이고

$m_1\neq m_2$에서 $y\neq 8$이고

$\frac{3}{4}\log_n 2-x=4\times(3\log_n 2-x)$에서

$3x=\frac{45}{4}\log_n 2$, $x=x_n=\frac{15}{4}\log_n 2$이다.

$x_n>\frac{5}{4}$에서 $\frac{15}{4}\log_n 2>\frac{5}{4}$, $\log_n 2>\frac{1}{3}$이고

$\log_2 n<3$이다. $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이고 합은 27이다.

14. 정답) ③ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : $g(x)=f(x)\times|x^2-p^2|$은 $x\neq -p,\ p$에서는 다항함수이므로 미분가능하다. $x=-p$, $x=p$에서의 미분가능성을 확인해주면

(1) $x=-p$

$$\lim_{x\to -p-}\frac{g(x)-g(-p)}{x+p}=\lim_{x\to -p-}\frac{f(x)\times(x+p)(x-p)}{x+p}$$
$$=\lim_{x\to -p-}f(x)\times(x-p)=-2pf(-p)$$

$$\lim_{x\to -p+}\frac{g(x)-g(-p)}{x+p}=\lim_{x\to -p-}\frac{-f(x)\times(x+p)(x-p)}{x+p}$$
$$=\lim_{x\to -p+}-f(x)\times(x-p)=2pf(-p)$$

에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$-2pf(-p)=2pf(-p)$이고 $p>0$이므로 $f(-p)=0$이다.

(2) $x=p$

(1)과 같은 방식으로 하면 $-2pf(p)=2pf(p)$에서 $f(p)=0$이다.

ㄱ. $f(x)$가 이차식일 때, $f(-p)=0$, $f(p)=0$이면 $x+p$, $x-p$를 인수로 가져야 하고 $f(x)=k(x+p)(x-p)\,(k\neq 0)$이라 할 때,

$g(x)=k(x+p)^2(x-p)^2$에서

$g(-1)=k(p-1)^2(-p-1)^2=k(p-1)^2(p+1)^2$

$g(1)=k(p+1)^2(1-p)^2=k(p+1)^2(p-1)^2$이고

$g(-1)=g(1)$이다. (참)

ㄴ. 반례로 상수함수 $f(x)=0$이면 $g(x)=0$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$의 값은 존재한다. (거짓)

ㄷ. $\{x\,|\,x>3\}=\{x\,|\,g(x)>0\}$에서 $g(x)$는 $x=3$에서만 부호변화가 있어야 한다.

$g(x)=f(x)\times|x^2-p^2|$에서 $|x^2-p^2|\geq 0$이므로

$f(x)$는 $x=3$에서만 부호변화가 있어야 하고 $f(-p)=0$, $f(p)=0$이려면

$f(x)$가 상수함수인 경우, $f(x)=0$이고 부호변화가 존재하지 않는다.

$f(x)$가 일차함수인 경우, $f(-p)=0$, $f(p)=0$을 만족시키지 못한다.

$f(x)$가 이차함수인 경우 $x=-p$, $x=p$에서 모두 부호변화가 존재한다.

$f(x)$가 삼차함수인 경우, $f(-p)=0$, $f(p)=0$이고 부호변화가 $x=3$에서만 존재하려면 $f(x)=k(x+3)^2(x-3)$이어야 한다.

이때, $p=3$이다.

$f'(x)=2k(x+3)(x-3)+k(x+3)^2$이고

$f(0)=-27k$, $f'(0)=-9k$에서

구하는 접선의 방정식은 $y=-9kx-27k=-9k(x+3)$이고

점 $(-3,\ 0)$을 지난다. (참)

15. 정답) ② [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : $a_{n+1}=\begin{cases} a_1\times a_n & (a_n\leq a_1) \\ \frac{a_n}{a_2} & (a_n>a_1)\end{cases}$에서

$a_1=k\leq k$이므로 $a_2=a_1\times k=k^2$이다.

이때, a_3을 결정하기 위해서는 $a_2=k^2\le k$ 또는 $a_2=k^2>k$으로 케이스를 분류해야하고
이에 따라, (1) $k>1$, (2) $0<k\le 1$, (3) $k<0$으로 수열을 각각 계산해야한다.

(1) $k>1$

$a_2=k^2>k$이므로 $a_3=\frac{a_2}{a_2}=1$이다.

$a_3=1\le k$이므로 $a_4=a_1\times 1=k$이다.

$a_4=k\le k$이므로 $a_5=a_1\times k=k^2$이다.

$a_5=k^2>k$이므로 $a_6=\frac{k^2}{a_2}=\frac{k^2}{k^2}=1$이다.

$$\sum_{n=1}^{6}\log_2|a_n|=\log_2 k+\log_2 k^2+\log_2 1+\log_2 k+\log_2 k^2+\log_2 1$$
$$=6\log_2 k$$

이고 $k>1$에서 $6\log_2 k>0$이므로 가능한 값은 1, 2이고

$k=2^{\frac{1}{6}}$, $2^{\frac{2}{6}}$이 가능하고 곱은 $2^{\frac{1}{2}}$이다.

(2) $0<k\le 1$

$a_2=k^2\le k$이므로 $a_3=a_1\times k^2=k^3$이다.

$a_3=k^3\le k$이므로 $a_4=a_1\times k^3=k^4$이다.

$a_4=k^4\le k$이므로 $a_5=a_1\times k^4=k^5$이다.

$a_5=k^5\le k$이므로 $a_6=a_1\times k^5=k^6$이다.

$$\sum_{n=1}^{6}\log_2|a_n|=\log_2 k+\log_2 k^2+\log_2 k^3+\log_2 k^4+\log_2 k^5+\log_2 k^6$$
$$=21\log_2 k$$

이고 $0<k\le 1$에서 $21\log_2 k\le 0$이므로 가능한 값은

-6, -5, $\cdots$, 0이고 $k=2^{-\frac{6}{21}}$, $2^{-\frac{5}{21}}$, $\cdots$, $2^{\frac{0}{21}}$이 가능하고
곱은 2^{-1}이다.

(3) $k<0$

$a_2=k^2>k$이므로 $a_3=\frac{a_2}{a_2}=1$이다.

$a_3=1>k$이므로 $a_4=\frac{1}{a_2}=k^{-2}$이다.

$a_4=k^{-2}>k$이므로 $a_5=\frac{k^{-2}}{a_2}=k^{-4}$이다.

$a_5=k^{-4}>k$이므로 $a_6=\frac{k^{-4}}{a_2}=k^{-6}$이다.

$$\sum_{n=1}^{6}\log_2|a_n|$$
$$=\log_2(-k)+\log_2(-k)^2+\log_2 1+\log_2(-k)^{-2}+\log_2(-k)^{-4}+\log_2(-k)^{-6}$$
$$=-9\log_2(-k)$$

이고 $k<0$에서 $-9\log_2(-k)$는 모든 실수가 가능하므로

-6, -5, $\cdots$, 2이고 $k=-2^{\frac{6}{9}}$, $-2^{\frac{5}{9}}$, $\cdots$, $-2^{-\frac{2}{9}}$이 가능하고
곱은 -2^2이다.

(1), (2), (3)에 의해 모든 실수 k의 값의 곱은

$2^{\frac{1}{2}}\times 2^{-1}\times(-2^2)=-2^{\frac{3}{2}}=-2\sqrt{2}$이다.

16. 정답) 11 [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $\log_2(x-3)-\log_4(3x-1)=\frac{1}{2}$에서

진수 조건에 의해 $x>3$

식을 정리하면 $\log_4(x-3)^2=\log_4(6x-2)$이고

$(x-3)^2=6x-2$, $x^2-12x+11=(x-1)(x-11)=0$, $x=11$이다.

17. 정답) 4 [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : $f(x)=x^3+3x^2-6$의 도함수는 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이고

$x=-2$에서 극댓값을 가진다. $a=-2$이고

$f(a)=-8+12-6=-2$이므로

$a\times f(a)=4$이다.

18. 정답) 6 [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : $v(t)=4t-a$ $(a>0)$에서 $t=0$일 때 원점을 출발한 점 P의 위치

$x(t)$는 $x(t)=\int_0^t v(t)dt=2t^2-at$이다.

점 P가 원점으로 돌아올 때는 $x(t)=0$이 되는 $t=\frac{a}{2}$이고

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=\frac{a}{2}$까지 움직인 거리는

점 P가 시각 $t=\frac{a}{4}$에서 운동방향을 바꾸므로

$\left|x\left(\frac{a}{4}\right)-x(0)\right|=\left|x\left(\frac{a}{2}\right)-x\left(\frac{a}{4}\right)\right|=\frac{a^2}{8}$에서 $\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{8}=\frac{a^2}{4}=9$이고

$a^2=36$, $a=6$이다.

19. 정답) 19 [수학Ⅰ 등비수열]

해설 : $a_n=ar^{n-1}$이라 둘 때,

$$a_5-5a_4+ka_3=ar^4-5ar^3+kar^2$$
$$=ar^2(r^2-5r+k)=0$$

에서 $a_3=ar^2=3>0$이므로 $ar^2\ne 0$이고

$r^2-5r+k=0$이다.

모든 항이 유리수이므로 공비도 유리수이고

k는 자연수이므로 가능한 공비 r은

$r^2-5r+4=0$에서 $r=1$ 또는 $r=4$

$r^2-5r+6=0$에서 $r=2$ 또는 $r=3$이다.

$a_1=\frac{a_3}{r^2}=\frac{3}{r^2}$에서 최솟값은 $r=4$일 때, $\frac{3}{16}$이고 $p+q=19$이다.

20. 정답) 44 [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 부정적분]

해설 : $f(x_2)-f(x_1)>(x_2-x_1)(x_2+x_1)$에서

$f(x_2)-f(x_1)>(x_2)^2-(x_1)^2$

$f(x_2)-(x_2)^2>f(x_1)-(x_1)^2$

이고 $x_1<x_2$이므로 $f(x)-x^2$는 실수 전체에서 증가하는 함수이다.

$g(x)=f(x)-x^2$이라 할 때, $g'(x)=f'(x)-2x$이고

$f'(1)=2$에서 $g'(1)=0$이다.

$g(x)$가 증가함수이므로 $g'(x)\geq 0$이고

$g'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $g'(1)=0$에서

$g'(x)=3(x-1)^2=3x^2-6x+3$이다.

양변을 부정적분하면 $g(x)=x^3-3x^2+3x+C$이고

$f(1)=2$에서 $g(1)=f(1)-1^2=1$, $C=0$이다.

$g(x)=x^3-3x^2+3x$에서 $g(4)=28$이고

$g(4)=f(4)-16$이므로 $f(4)=44$이다.

21. 정답) 25 [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{ADB}=\frac{\pi}{3}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$에서 삼각형 ABD는 정삼각형이다.

즉, $\angle\mathrm{CAB}=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BC}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}=13$

이고 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하면, 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여

$\cos\theta=\frac{9+13-16}{2\times3\times\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$이고 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

사각형 ABED는 한 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle\mathrm{ADE}=\pi-\angle\mathrm{ABE}=\pi-\theta$

삼각형 ADE에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{AED})}=\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle\mathrm{ADE})}$에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{12\sqrt{13}}{13}$이므로 $p+q=13+12=25$이다.

22. 정답 : 87 [수학Ⅱ 미분계수의 정의 + 도함수의 활용]

해설 : 조건 (나)에서 $n=1$일 때, $f(1)-f(0)=f'(1)-2$이고 양변의 항들을 적당히 이항하면 $f(1)-f'(1)=f(0)-2$이고 $f'(0)=2$이므로 $f(1)-f'(1)=f(0)-f'(0)$이다.

$n=2,\ 3$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k-1)\}-\sum_{k=1}^{n-1}\{f(k)-f(k-1)\}$

$=f(n)-f(n-1)=f'(n)-f'(n-1)$

이고 양변의 항들을 적당히 이항하면

$f(n)-f'(n)=f(n-1)-f'(n-1)$이다.

따라서 함수 $g(x)=f(x)-f'(x)$에 대하여

위에 의해 $g(0)=g(1)=g(2)=g(3)$이므로

사차함수 $g(x)$는 나머지정리에 의해

$g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)+b\ (a\neq0)$

$=ax^4-6ax^3+11ax^2-6ax+b$

로 나타낼 수 있다.

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서

$f(x)-f'(x)$의 사차항은 ax^4이므로 $f(x)$의 사차항도 ax^4이다.

$f(x)-f'(x)$의 삼차항은 $-6ax^3$, $f'(x)$의 삼차항은 $4ax^3$에서

$f(x)$의 삼차항은 $-2ax^3$이다.

$f(x)-f'(x)$의 이차항은 $11ax^2$, $f'(x)$의 이차항은 $-6ax^2$에서

$f(x)$의 이차항은 $5ax^2$이다.

$f(x)-f'(x)$의 일차항은 $-6ax$, $f'(x)$의 일차항은 $10ax$에서

$f(x)$의 일차항은 $4ax$이다.

이 때, $f'(x)$의 상수항은 $(-4ax)'=4a$이고

$f'(x)=4ax^3-6ax^2+10ax+4a$, $f'(0)=4a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$이다.

이에 따라 (가) 조건을 해석해보면

$g'(x)=4ax^3-18ax^2+22ax-6a$

$=2x^3-9x^2+11x-3$

$=(2x-3)(x^2-3x+1)$

에서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극댓값을, $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$에서 극솟값을 가진다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $g(x)=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3)+b$에서 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대칭이고, 따라서 두 극솟값은 같다.

즉, (가) 조건에서 방정식 $f(x)-f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $g(x)$의 극댓값이 0이어야 한다.

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)+b$$
$$=\frac{9}{32}+b=0$$

에서 $b=-\frac{9}{32}$이고 $g(x)=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3)-\frac{9}{32}$이다.

$g(0)=f(0)-f'(0)=f(0)-2=-\frac{9}{32}$에서 $f(0)=\frac{55}{32}$이고

$p+q=87$이다.

확률과 통계

23. 정답) ④ [확률과 통계 확률분포 | 이항분포]

해설 : $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$이므로 $n=32$이다. 따라서

$\mathrm{E}(X)=32\times\frac{1}{4}=8$이다.

24. 정답) ① [확률과 통계 경우의 수 | 이항정리]

해설 : ${}_5\mathrm{C}_r\times(x^2)^r\times\left(\frac{2}{x}\right)^{5-r}={}_5\mathrm{C}_r\times x^{3r-5}\times 2^{5-r}$

에서 $r=1$일 때, $3r-5=1$이므로

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는

${}_5\mathrm{C}_1\times 2^4=5\times16=80$이다.

25. 정답) ⑤ [확률과 통계 조건부확률 | 사건의 독립]

해설 : $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$이다.

두 사건 A와 B는 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$이다.

두 사건 A와 B가 독립일 때, 두 사건 A와 B^C도 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$이다. 따라서

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$이다.

26. 정답) ③ [확률과 통계 경우의 수 | 중복순열]

해설 : $f(3)$의 값으로 경우를 분류하여 함수 f의 개수를 세자.

(ⅰ) $f(3)=1$일 때

순서쌍 $(f(1), f(2))$가 $(1, 1)$인 경우를 제외하고

항상 성립하므로 ${}_3\Pi_2-1=8$

(ⅱ) $f(3)=2$일 때

순서쌍 $(f(1), f(2))$가 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$인 경우를

제외하고 항상 성립하므로 ${}_3\Pi_2-3=6$

(ⅲ) $f(3)=3$일 때

순서쌍 $(f(1), f(2))$가 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$인

경우를 제외하고 항상 성립하므로 ${}_3\Pi_2-5=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 가능한 함수 f의 개수는

$8+6+4=18$이다.

27. 정답) ⑤ [확률과 통계 확률분포 | 정규분포]

해설 : $\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X\ge 5)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5-m}{\sigma}\right)$이므로

$2-m=-(5-m)$, $m=\frac{7}{2}$이다.

$\mathrm{P}(X\ge5)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5-\frac{7}{2}}{\sigma}\right)=0.1587=0.5-0.3413$에서

$\frac{3}{2\sigma}=1$, $\sigma=\frac{3}{2}$이다.

$$\mathrm{P}(m\le X\le m+3)=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+3-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$$

28. 정답) ③ [확률과 통계 조건부확률]

해설 : 두 주머니에서 공을 한 개씩 꺼내는 시행을 두 번 할 때 가능한 전체 경우의 수는 $3\times3\times2\times2=36$이다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자가 서로소인 사건을 A, 두 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 합이 8 이상인 사건을 B라 하자.

첫 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 순서쌍으로 가능한 것 중 두 수가 서로소인 순서쌍은 아래와 같다.

$(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$

각각의 경우에서 두 번째 시행의 경우의 수는 $2\times2=4$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$이다.

위의 각각의 경우에서 두 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 합이 8 이상이 되는 순서쌍을 나열해보자.

시행 1	시행 2
$(1,4)$	$(2,6)$, $(3,5)$, $(3,6)$
$(1,5)$	$(2,6)$, $(3,6)$
$(1,6)$	$(3,5)$
$(2,5)$	$(3,6)$
$(3,4)$	$(2,6)$
$(3,5)$	$(2,6)$

위의 표에 의해 두 사건 A와 B가

모두 일어나는 경우의 수는 9이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$이다.

29. 정답) 32 **[확률과 통계 통계적 추정 | 표본평균]**

해설 : 한 번의 시행에서 나오는 흰 공의 개수를 X라 할 때, 확률변수 X의 값으로 가능한 것은 0, 1, 2이다.

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\mathrm{P}(X=2)\times\mathrm{P}(X=2)$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{5}$이다. ($\because$ $\mathrm{P}(X=2)\geq0$)

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{5}$$

$(n+3)(n+2)=20$,

$n^2+5n-14=0$,

$(n+7)(n-2)=0$

이므로 $n=2$이다. ($\because$ $n\geq1$)

이때, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

위의 표를 이용하여 $\mathrm{P}(\overline{X}<1)$을 계산하자.

확률변수 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2이므로

$\overline{X}<1$은 $\overline{X}=0$ 또는 $\overline{X}=\frac{1}{2}$과 같다. 따라서

$\mathrm{P}(\overline{X}<1)=\mathrm{P}(\overline{X}=0)+\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$

이므로 $p+q=25+7=32$이다.

30. 정답) 108 **[확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]**

해설 : 조건 (가)에 의해 빨간 공이 담기지 않은 상자는 한 개 이상이므로 각 상자에 담은 빨간 공의 개수로 가능한 순서쌍은

$(0,0,6)$, $(0,1,5)$, $(0,2,4)$, $(0,3,3)$

이다. 조건 (나)를 고려하여 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,

'세 상자가 모두 구분이 되는 경우'

와

'서로 구분이 되지 않는 상자들이 있는 경우'

로 나누어 경우의 수를 구해보자.

(ⅰ) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,

'세 상자가 모두 구분이 되는 경우'

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,1,5)$일 때,

세 상자를 순서대로 A, B, C라 하면,

① 상자 B와 C에 노란 공을 한 개씩 담는 경우

② 상자 C에 노란 공을 두 개 담는 경우

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,2,4)$일 때,

세 상자를 순서대로 A, B, C라 하면,

③ 상자 B와 C에 노란 공을 한 개씩 담는 경우

④ 상자 B에 노란 공을 두 개 담는 경우

⑤ 상자 C에 노란 공을 두 개 담는 경우

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,3,3)$일 때,

빨간 공이 세 개 담긴 두 상자는 서로 구분되지 않으므로

세 상자를 순서대로 A, B, B라 하면,

⑥ 한 개의 상자 B에 노란 공을 두 개 담는 경우

따라서 (ⅰ) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,

'세 상자가 모두 구분이 되는 경우'는 6가지이고,

이때 파란 공 4개를 담는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이므로,

경우 (ⅰ)에 해당하는 전체 경우의 수는

$6\times{}_3\mathrm{H}_4=6\times{}_6\mathrm{C}_2=90$이다.

(ii) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,
'서로 구분이 되지 않는 상자들이 있는 경우'

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,0,6)$일 때,
빨간 공이 담기지 않은 두 상자는 서로 구분되지 않으므로
세 상자를 순서대로 A, A, B라 하면,
① 상자 B에 노란 공을 두 개 담는 경우

빨간 공을 담은 순서쌍이 $(0,3,3)$일 때,
빨간 공이 세 개 담긴 두 상자는 서로 구분되지 않으므로
세 상자를 순서대로 A, B, B라 하면,
② 두 개의 상자 B에 노란 공을 각각 한 개 씩 담는 경우

따라서 (ii) 빨간 공을 담은 세 상자에 노란 공을 담았을 때,
'서로 구분이 되지 않는 상자들이 있는 경우'는 2가지이고,
두 경우 모두 세 상자 중 한 상자는 구분이 가능하며,
남은 두 상자는 서로 구분이 되지 않는다.
이때, 파란 공 4개를 세 상자에 나누어 담는 순서쌍으로부터
위의 경우에 해당하는 경우의 수를 구하면 아래와 같다.
$(0,0,4)$ → 2가지
$(0,1,3)$ → 3가지
$(0,2,2)$ → 2가지
$(1,1,2)$ → 2가지
따라서 세 상자 중에서 두 상자가 서로 구분이 되지 않을 때
파란 공 4개를 나누어 담는 방법의 수는 9이므로,
경우 (ii)에 해당하는 전체 경우의 수는
$2\times9=18$이다.

따라서 경우 (i), (ii)에서 구할 수 있는 전체 경우의 수는
$90+18=108$이다.

미적분

23. 정답) ④ [미적분 여러 가지 적분법]

해설 : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2x\,dx=2\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2x\,dx$

$$=2\times\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

24. 정답) ③ [미적분 수열의 극한]

해설 : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n}\times na_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}\times\lim_{n\to\infty}na_n=3\lim_{n\to\infty}na_n=6$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n^2+3}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{3}\times\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{na_n\times\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}na_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$$

25. 정답) ② [미적분 정적분]

해설 : $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$이므로

$$\int_1^{13}\frac{g(x)}{f'(g(x))}dx=\int_1^{13}g(x)g'(x)dx$$

에서 $g(x)=t$로 치환하여 치환적분법을 이용하면,

$$\int_{g(1)}^{g(13)}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{g(1)}^{g(13)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\{g(13)\}^2-\{g(1)\}^2\right]=2$$

에서 $f(0)=1$이므로 $g(1)=0$이다. 따라서

$$\{g(13)\}^2=4+\{g(1)\}^2=4$$

이다.
이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 실수 전체에서 정의되어 있으므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고
따라서 $g(x)$ 또한 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.
따라서 $g(13)>g(1)$이어야 하므로

$\{g(13)\}^2=4$,

$g(13)=2 \Leftrightarrow f(2)=13$

이다. $f(2)=2^3+2a+1=13$이므로 $a=2$이고,

$f(x)=x^3+2x+1$, $f'(x)=3x^2+2$

에서

$$f(1)=4 \Leftrightarrow g(4)=1$$

이므로 $g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$이다.

26. 정답) ② [미적분 급수]

해설 : $\angle D_1A_1E_1=\angle B_1A_1D_1-\angle B_1A_1C_1=\dfrac{\pi}{6}$이고,

삼각형 $A_1B_1D_1$은 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1D_1}=\sqrt{3}:1$, $\angle B_1A_1D_1=\dfrac{\pi}{2}$인

직각삼각형이므로 $\angle A_1D_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 삼각형 $A_1D_1E_1$에서

$\angle A_1E_1D_1=\pi-\angle D_1A_1E_1-\angle A_1D_1E_1=\dfrac{\pi}{2}$이고,

삼각형 $A_1B_1C_1$은 정삼각형이므로 $\overline{A_1E_1}=\overline{C_1E_1}$이다.

$\overline{A_1E_1}=\overline{A_1D_1}\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1E_1}=\overline{A_1B_1}\times\cos\dfrac{\pi}{6}=3$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{A_1E_1}\times\overline{A_1D_1}\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{C_1E_1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$\overline{A_1A_2}=k$라 하면,

$\overline{A_2D_2}=\overline{A_1A_2}\times\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}k$, $\overline{A_2B_2}=\overline{A_2D_2}\times\tan\dfrac{\pi}{3}=3k$이고

삼각형 $A_2B_2C_2$는 정삼각형이므로 $\overline{A_2C_2}=3k$에서

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_2B_1}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{A_2B_1}=6k$이다.

따라서 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2B_1}=7k$이므로 $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$이다.

$\overline{A_2D_2}=\dfrac{6}{7}$이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이와

그림 R_2에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$$2^2:\left(\frac{6}{7}\right)^2=1:\frac{9}{49}$$

이고, 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\dfrac{9}{49}}=\dfrac{49\sqrt{3}}{20}$이다.

27. 정답) ① [미적분 도함수의 활용]

해설 : $\dfrac{dx}{dt}=2(t-1)e^{t^2-2t}$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-6t+3=3(t-1)^2$이고

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3(t-1)^2}{2(t-1)e^{t^2-2t}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{t-1}{e^{t^2-2t}}=f(t)$이다.

$f'(t)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{e^{t^2-2t}-2(t-1)^2e^{t^2-2t}}{\left(e^{t^2-2t}\right)^2}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1-2(t-1)^2}{e^{t^2-2t}}$에서

도함수의 증감이 바뀌는 t는 $2(t-1)^2=1$이고

이 때 극대 혹은 극소이므로 $(a-1)^2=\dfrac{1}{2}$이다.

28. 정답) ⑤ [미적분 도함수의 활용]

해설 : $f'(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2+a}$, $f''(x)=(x+1)(x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2+a}$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $e^{-\frac{1}{2}x^2+a}>0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극대이고,

두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$은 함수 $y=f(x)$의

그래프의 변곡점이다.

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

y축에 대하여 대칭인 그래프이고, 따라서 두 변곡점에서의

접선은 y축의 한 점에서 교차한다.

이때, 조건에 의하여 변곡점에서의 접선이 교차하는

점의 좌표가 $(0, 2)$임을 알 수 있다.

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식을 구하면,

$$y=f'(1)(x-1)+f(1),$$

$$y=-e^{-\frac{1}{2}+a}(x-1)+e^{-\frac{1}{2}+a},$$

$$y=-e^{-\frac{1}{2}+a}+2\cdot e^{-\frac{1}{2}+a}$$

이고, 이 직선이 y축 위의 점 $(0, 2)$를 지나므로

$$2\cdot e^{-\frac{1}{2}+a}=2,$$

$$e^{-\frac{1}{2}+a}=1,$$

$$-\frac{1}{2}+a=0,$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

이다.

29. 정답) 13 [미적분 여러 가지 함수의 미분]

해설 : $\angle OAB=\angle ADC=\theta$ (엇각),

$\dfrac{1}{2}\times\angle AOB=\angle ADC=\theta$이므로

원주각과 중심각의 관계에 의해

점 D는 점 O를 중심으로하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA}}$인 원 위의 점이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로 삼각형 OAD는 이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{ODA}=\angle\mathrm{OAD}=\theta$이다.

삼각형 OAB에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin(\angle\mathrm{OAB})}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\mathrm{OBA})},$$

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$$

이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$이다.

$f(\theta)=$(삼각형 OAD의 넓이)$-$(삼각형 OAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\sin(\angle\mathrm{AOD})-\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin(\angle\mathrm{AOB})$

$=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2\theta)-\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}\times\sin2\theta$

$=\dfrac{\sin2\theta}{2}-\dfrac{\sin\theta\times\sin2\theta}{2\sin3\theta}$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}-\frac{\sin\theta\times\sin2\theta}{2\theta\times\sin3\theta}\right)$

$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ㉠

$g(\theta)=$(부채꼴 OAC의 넓이)$-$(삼각형 OAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times1^2\times2\theta-\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}\times\sin2\theta$

$=\theta-\dfrac{\sin\theta\times\sin2\theta}{2\sin3\theta}$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\theta}{\theta}-\frac{\sin\theta\times\sin2\theta}{2\theta\times\sin3\theta}\right)$

$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$이고

$p+q=13$이다.

30. 정답) 89 [미적분 도함수의 활용 + 정적분의 활용]

해설 : 조건 (나)에서 $\ln e^{f(x)}+\ln f'(x)=\ln x$이므로 $e^{f(x)}f'(x)=x$이다.

따라서 모든 양수 x에 대하여

$e^{f(x)}=\dfrac{1}{2}x^2+C$ (C는 적분상수) ⋯ ㉠

이다.

함수 $g(x)=(x^2-1)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x\neq\pm1$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 미분가능하므로 연속이고

함수 $f(x)$는 $x\neq-1$인 모든 실수 전체에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 조건 (가)에 의해

$$\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=-\ln2$$

이고 ㉠에 의해 $C=\dfrac{1}{2}$이다. 따라서 구간 $[0,\infty)$에서

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)$$

이다.

$-2<x<-1$일 때 $x(x^2-1)<0$,

$-1<x<0$일 때 $x(x^2-1)>0$

이므로 $\displaystyle\int_{-2}^{1}xg(x)dx=\int_{-2}^{1}\{x(x^2-1)f(x)\}dx$가

최솟값을 가지는 경우는

$-2<x<-1$에서 $f(x)\geq0$이고 $\displaystyle\int_{-2}^{-1}f(x)dx$가 최댓값,

$-1<x<-2$에서 $f(x)\leq0$이고 $\displaystyle\int_{-1}^{0}f(x)dx$가 최솟값

을 가질 때이다. 이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\ln2$이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않고,

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\ln2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<-1)\\ -\ln2 & (-1<x\leq0)\\ \ln\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\right) & (x>0)\end{cases}$$

일 때 $\displaystyle\int_{-2}^{1}xg(x)dx$는 최솟값을 가진다.

(*이때, $-\ln2\leq f(-1)\leq0$이다. 함수 $xg(x)$는 $f(-1)$의 값에 관계 없이 연속이고, 구하려는 적분값도 변함이 없다.)

따라서 $\displaystyle\int_{-2}^{1}xg(x)dx$의 최솟값은 위의 함수 $f(x)$에 대하여

$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{x(x^2-1)f(x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}\{x(x^2-1)\times(-\ln2)\}dx+\int_{0}^{1}\left\{x(x^2-1)\times\ln\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$

$\displaystyle=-\ln2\int_{-1}^{0}x(x^2-1)dx+\int_{0}^{1}\{x(x^2-1)\times\ln(x^2+1)\}dx$

$\displaystyle-\ln2\int_{0}^{1}x(x^2-1)dx$

$\displaystyle=-\ln2\int_{-1}^{1}x(x^2-1)dx+\int_{0}^{1}\{x(x^2-1)\times\ln(x^2+1)\}dx$

$$= \int_0^1 \{x(x^2-1)\times \ln(x^2+1)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\times \int_1^2 \{(t-2)\times \ln t\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\times \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 - 2t\ln t + 2t \right]_1^2$$

$$= \frac{5}{8} - \ln 2$$

이다.

따라서 $a = \frac{5}{8}$, $b = -1$이므로 $64(a^2+b^2) = 25+64 = 89$이다.

기하

23. 정답) ⑤ [기하 공간좌표]

해설 : 점 $(2, a, 4)$를 xy평면에 내린 수선의 발은 $(2, a, 0)$이다.

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=3+2=5$이다.

24. 정답) ② [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 점 $(2, 4)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{p} = (a, a+2)$직선은

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-4}{a+2}$$

인데, y절편이 -2이므로

$$-\frac{2}{a}\times(a+2)+4 = -2, \quad \frac{a+2}{a} = 3$$

에서 $a=1$이다.

25. 정답) ③ [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 : 포물선 $y^2 = 4px\,(p>0)$ 위의 점 $(3, a)$에서의 접선은

$$ay = 2p(x+3)$$

이고, 이 직선의 기울기가 -1이므로

$$a = -2p \ \cdots \ ㉠$$

이다. 또, 점 $(3, a)$는 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 점이므로

$$a^2 = 12p \ \cdots \ ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하면 $a=-6$, $p=3$이므로

$p+a = 3-6 = -3$이다.

26. 정답) ③ [기하 공간도형]

해설 : 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$의 중심 $(a, b, 0)$에서

yz평면까지의 거리는 $|a|$이고,

yz평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 4이므로

$$a^2+4^2 = r^2 \ \cdots \ ㉠$$

이다.

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$의 중심 $(a, b, 0)$에서

zx평면까지의 거리는 $|b|$이고,

zx평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$$b^2+(2\sqrt{3})^2 = r^2 \ \cdots \ ㉡$$

이다.

㉠+㉡을 하면,

$$a^2+b^2+28 = 2r^2$$

이고, 원점에서 구의 중심 $(a, b, 0)$까지의 거리가 4이므로

$$a^2+b^2 = 16$$

이다. 따라서

$$2r^2 = 16+28 = 44,$$

$$r^2 = 22$$

이다.

27. 정답) ⑤ [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 중심이 $\mathrm{O_1}$인 원 위에 $\overrightarrow{\mathrm{O_2B}} = \overrightarrow{\mathrm{O_1B'}}$를 만족시키는 점 $\mathrm{B'}$을 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{O_1A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_2B}} = \overrightarrow{\mathrm{O_1A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1B'}} = 14$이다.

이 때, 위 내적값이 일정하므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_1B'}}$가 이루는 각의 크기가 일정하고

점 A에서 선분 $\mathrm{O_1B'}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\overrightarrow{\mathrm{O_1A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1B'}} = 14$에서

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1B'}} = |\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}||\overrightarrow{\mathrm{O_1B'}}|\cos\theta \ \ (\theta = \angle \mathrm{AO_1B})$$

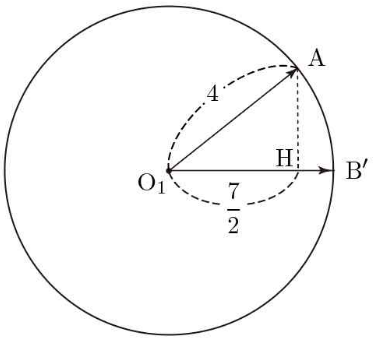
$$= |\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}||\overrightarrow{\mathrm{O_1H}}|$$

$$= 4|\overrightarrow{\mathrm{O_1H}}| = 14$$

이고, $\overline{\mathrm{O_1H}} = \frac{7}{2}$이다.

이에 따라 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_1B'}}$가 이루는 예각의 크기 θ가

$\cos\theta = \frac{7}{8}$인 상태로, 두 점 A, $\mathrm{B'}$는 원 위에서 움직인다.



$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B}|$에서

$\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B}$는 방향은 자유롭고

크기는 위 그림의 $|\overrightarrow{AB'}|$와 같다.

$\overline{AH} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $\overline{B'H} = \frac{1}{2}$에서 $|\overrightarrow{AB'}| = 2$이므로

$\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B}$의 크기는 2이다.

(가)에서 $|\overrightarrow{O_1O_2}| = 4$이고, $\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2B}$가 방향이 자유로우므로

$4-2 \le |\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B}| \le 4+2$에서 최댓값은 6이다.

28. 정답) ④ [기하 공간좌표 + 공간도형]

해설 : 좌표공간에서 두 점 A C는 한 평면 $z=3$ 위에 있다.

점 C를 중심으로 하고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는

점 C와 xy평면 사이의 거리와 같으므로 3이다.

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5,\ \overline{CP} = 3 \ (\text{구의 반지름의 길이})$$

이고 삼각형 ACP는 $\angle APC = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{5^2-3^2} = 4$$

이다. 직선 AP와 xy평면이 이루는 예각을 θ라 할 때,

xy평면과 평면 $z=3$은 서로 평행하므로

직선 AP와 평면 $z=3$이 이루는 각도 θ이다.

이때, $\cos\theta$의 값이 최소가 되는 경우는 삼각형 ACP를

포함한 평면이 평면 $z=3$과 수직인 경우이므로

$$\frac{4}{5} \le \cos\theta \le 1$$

이고, 선분 AP의 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{AP} \times \cos\theta$$

이므로

$$4 \times \frac{4}{5} \le \overline{AP} \times \cos\theta \le 4 \times 1$$

에서 $M=4$, $m=\frac{16}{5}$이다. 따라서 $M+m = 4+\frac{16}{5} = \frac{36}{5}$이다.

29. 정답) 23 [기하 이차곡선 | 타원]

해설 : $\overline{AF} = \overline{AF'} = 4$이고 $\angle FBF' = \theta$라 하면

네 점 A, B, F, F'이 한 원 위에 있으므로

$$\angle FAF' = \pi - \theta$$

이다.

$\overline{BF} = b$, $\overline{BF'} = c \ (b<c)$라 하면 타원의 성질에 의해

$$b+c = 8 \ \cdots \ ㉠$$

이다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{AF'} \times \sin(\angle FAF') = 8\sin\theta,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{BF'} \times \sin(\angle FBF') = \frac{bc}{2}\sin\theta$$

에서 $3S_1 = 4S_2$이므로 $24 = 2bc$이고

$$bc = 12 \ \cdots \ ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡에 의해 $b=2$, $c=6$이다.

두 삼각형 BFF', AFF'에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{FF'}^2 = 6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos\theta$$
$$= 4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos(\pi-\theta)$$

이므로 $\cos\theta = \frac{1}{7}$이고 $\overline{FF'}^2 = \frac{256}{7}$이므로

$\overline{FF'} = \frac{16}{7}\sqrt{7}$이고 $p+q = 23$이다.

30. 정답) 48 [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$라 하면 조건 (가)에서

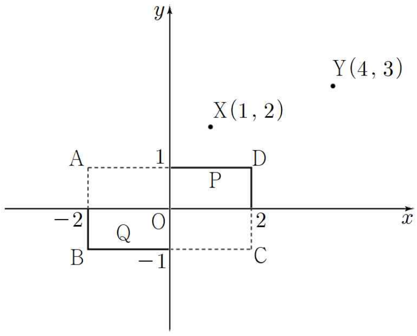
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OX} = p_1 + 2p_2 \ge 2,$$

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OX} = q_1 + 2q_2 \le -2$$

이므로 점 P는 직선 $y = -\frac{1}{2}x+1$의 점 또는 위쪽의 점이고

점 Q는 직선 $y = -\frac{1}{2}x-1$의 점 또는 아래쪽의 점이다.

두 점 P, Q로 가능한 점들을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



조건 (나)를 만족하는 점 R가 직사각형 ABCD의 둘레 위에 존재하도록 두 점 P, Q를 점 P의 경우를 나누어 나타내자.

(i) P$(0, 1)$일 때,
$-1 \le t \le 0$인 t에 대하여 Q$(-2, t)$이고
$\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}} = (4, 2) \cdot (6, 3-t) = 30-2t$

(ii) $0 < t < 2$인 t에 대하여 P$(t, 1)$일 때,
Q$(-2, 0)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}} = (4-t, 2) \cdot (6, 3) = 30-6t$

(iii) P$(2, 1)$일 때,
Q$(-2, 0)$이면 $\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}} = (2, 2) \cdot (6, 3) = 18$
Q$(0, -1)$이면 $\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}} = (2, 2) \cdot (4, 4) = 16$

(iv) $0 < t < 1$인 t에 대하여 P$(2, t)$일 때,
Q$(0, -1)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}} = (2, 3-t) \cdot (4, 4) = 20-4t$

(v) P$(2, 0)$이면
$-2 \le t \le 0$인 t에 대하여 Q$(t, -1)$이고
$\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}} = (2, 3) \cdot (4-t, 4) = 20-2t$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QY}}$는 (i)에서 최댓값 $M=32$,
(iii)에서 Q$(0, -1)$일 때 최솟값 $m=16$를 가지므로
$M+m=32+16=48$이다.

(※ 두 점 P, Q의 중점을 M이라 하면
조건 (나)에서 $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$이어야 한다.)