제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(3\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

$3^{\frac{1}{2}}$

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

2. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

$3x^2+4x+3$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4 = 6, \quad 2a_7 = a_{19}$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

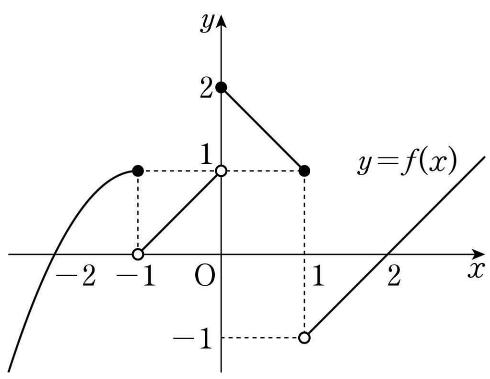
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2(6+3d) = 6+15d$

$= 12+6d$

$\therefore 9d = 6.\ d = \frac{2}{3}$ $\therefore a_1 = 6-2 = 4$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

0 1

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta$의 값은? [3점]

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$
$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

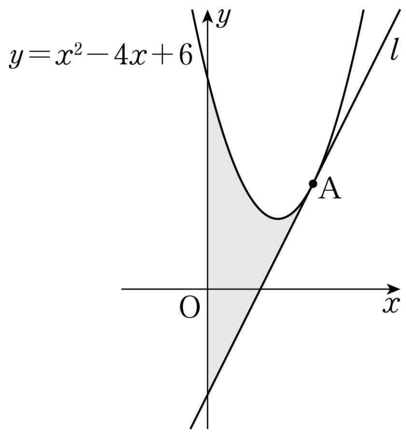
$4x-3$

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\frac{2(2a+1)-3}{1}=7$

$2a+1=5$: $a=2 \sim f'(2)=5$

7. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

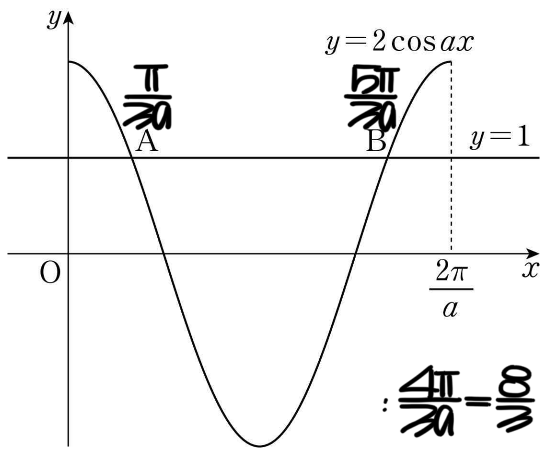


$y=2x-3$

① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

$\int_0^3 (x^2-6x+9)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3=9$..

8. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0 \le x \le \frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점]



$\therefore \frac{4\pi}{3a}=\frac{8}{3} \therefore a=\frac{\pi}{2}$

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

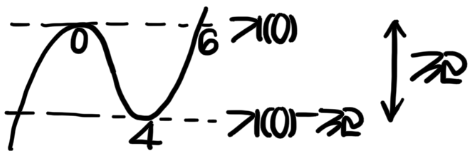
9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

$x(t)=t^3-6t^2+x(0)$



10. 두 함수

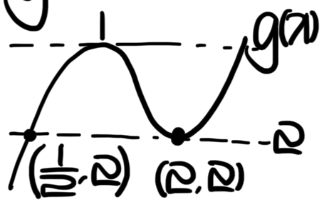
$$f(x)=x^2+2x+k, \quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow g(f(x))=2$

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

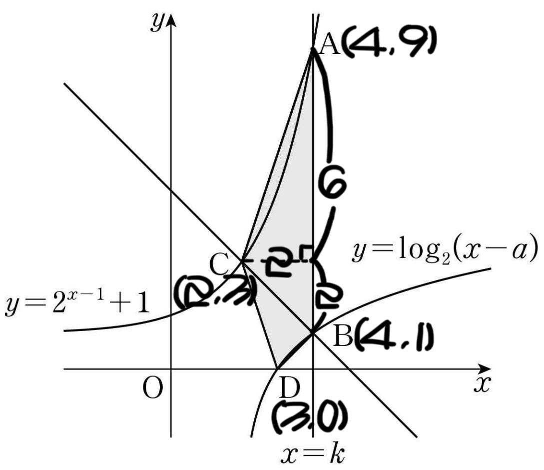


$(\frac{1}{2},2)$ $(2,2)$

$f(x)=(x+1)^2+k-1$

$\frac{1}{2}$ $\rightarrow k=\frac{3}{2}$

11. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

$2^{k-1}+1=2^{k-3}+1+6$

$\frac{3}{8}\times 2^k=6$. $2^k=16$. $k=4$

$\therefore \log_2(4-a)=1 \therefore a=2$

• 8

• $6-2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=2$) ⑩..

12. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \overset{(x-1)(x-3)}{x^2-4x+3} & (x\le 2) \\ \underset{-x(x-a)}{-x^2+ax} & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? [4점]

(가) $x\ne 1$, $x\ne a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다. (나) $h(1)=h(a)$

① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

$g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-a)}{x-3} & (x\le 2) \rightarrow h(1)=-\frac{3}{2} \\ -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2) \rightarrow h(3)=-\frac{2}{3} \end{cases}$$) $-\frac{13}{6}$..

$h(1)=\frac{1}{2}(1-a)$

$h(a)=\dfrac{(1-a)(a-2)}{a}$] $\dfrac{a-2}{a}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=4$.

13. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

- $S_3+S_6=0$
  $\therefore 3a_2+3a_5=0$
  $6a_2$
  $2a_2+(a_2+3d)=0$
  $a_2+d=0$
  $\therefore a_n=(n-3)d \therefore d<0$
  $S_{11}=11a_1+55d=33d$
  $\rightarrow -33d-3=-3d$
  $30d=-3.\ d=-\frac{1}{10} \rightarrow a_1=\frac{1}{5}$
- $a_5=0$
  $\therefore a_n=(n-5)d \therefore d<0$
  $-9d=-11d-3$
  $d=-\frac{3}{2} \rightarrow a_1=6$

14. 두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
x^3+2x^2+4

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

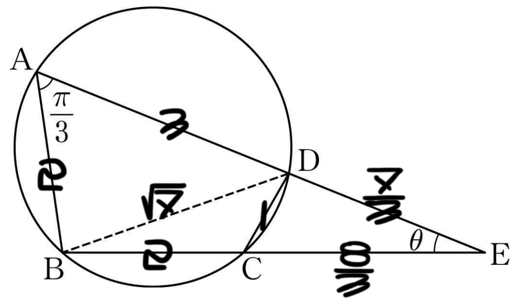
ㄴ. $f(x)-g(x)=x^3-2x^2-kx+8=0$
$\therefore x^3-2x^2+8=kx$
$y=(3t^2-4t)(x-t)+t^3-2t^2+8$
$y=(3t^2-4t)x-2t^3+2t^2+8$
0
$t^3-t^2-4=0$
$\therefore t=2.\ k=4$

ㄷ. $x^3-kx+6=2x^2-2$ OR $x^3-kx+6=-2x^2+2$
$x^3-2x^2+8=kx$ $x^3+2x^2+4=kx$

15. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
> $\overline{CD}=$ (가) 1
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면
> $\overline{ED}=$ (나) $\frac{7}{3}$
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
> $\sin\theta=$ (다) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

$\therefore \frac{10}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$

단 답 형

16. $\frac{\log_5 72}{\log_5 2}-4\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}$의 값을 구하시오. [3점]

$=\log_2\left(72\times\frac{16}{36}\right)=5$

17. $\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)\,dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$=\int_{-2}^{0}(2x^3-6x)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^4+3x^2\right]_{0}^{2}$

$=4+20=24$

18. 부등식 $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} < \sum_{k=1}^{n} (2k-1) < \sum_{k=1}^{5} (2 \times 3^{k-1})$ 을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

$31 < n^2 < 242$

$\therefore n = 6 \sim 15$ ∴ 105.

19. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 \geq -k$

$12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$

$(2, -32)$ $\therefore k \geq 32$.

20. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	1	-1

∴ 70.

#2023.03.22번

21. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

$\Leftrightarrow y=2^{x+k}-2$

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A}'(b,a)$ 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$) [4점]

$$\begin{cases} 2^{b-k}-2=a \\ 4^{b+k}+2=a \end{cases}$$

$\rightarrow 2^{b-k}-2^{2b+2k}-4=0 : 2^b=p,\ 2^k=q$

$: \frac{p}{q}-p^2q^2-4=0$

$q^3p^2-p+4q=0$

$: D=1-16q^4=0,\ \begin{cases} p=4 \rightarrow b=2 \\ q=\frac{1}{2} \rightarrow k=-1 \end{cases}$

$\therefore a=2^3-2=6$

$\Rightarrow a\times b=6\times 2=12.$

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x\lvert g(x)\rvert=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

0 OR 2a

$\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$g(0)=g(2a)=0$

$x<0 : -g(x)-xg'(x)=(a-x)f(x)$

$x\geq 0 : g(x)+xg'(x)=(a-x)f(x)$

$g(a)+ag'(a)=0$

$g(x)=x(x-2a)^2 ; g'(x)=(3x-2a)(x-2a)$

$g(x)+xg'(x)=(x^3-4ax^2+4a^2x)+3x^3-8ax^2+4a^2x$

$=4x^3-12ax^2+8a^2x$

$=4x(x-a)(x-2a)$

$x<0 : f(x)=4x(x-2a)=4x(x-1)$

$x\geq 0 : f(x)=-4x(x-2a)=-4x(x-1)$

$\rightarrow f(a)=4a^2=2a : a=\frac{1}{2}$

$*\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(4x^2-x)dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{11}{6}$

$*\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(-4x^2+x)dx=\left[-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=-\frac{5}{6}$

1.

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{3}\Pi_{4}$ 의 값은? [2점]

① 63 ② 69 ③ 75 ④ 81 ⑤ 87

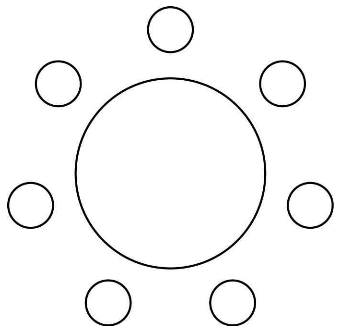
24. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

~1 : 20
~3 : 10
30..

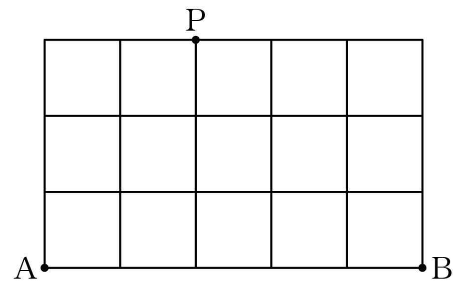
25. A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 320 ② 360 ③ 400 ④ 440 ⑤ 480



$6!-(5!\times 2!)=480$

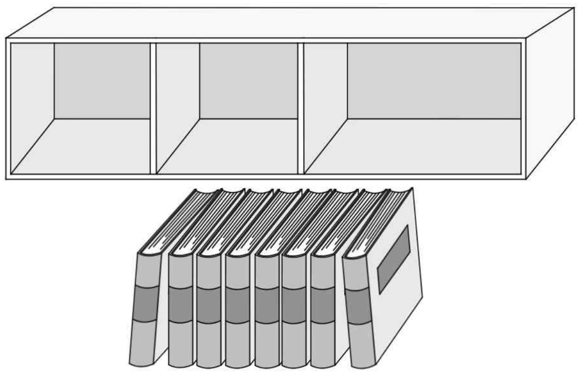
26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.) [3점]



① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

$\underset{10}{{}_5C_2}\times\underset{20}{{}_6C_3}=200$

27. 그림과 같이 같은 종류의 책 8권과 이 책을 각 칸에 최대 5권, 5권, 8권을 꽂을 수 있는 3개의 칸으로 이루어진 책장이 있다. 이 책 8권을 책장에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는? (단, 비어 있는 칸이 있을 수 있다.) [3점]



① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

≤ 8 ≤ 5 ≤ 5
8 : 1
7 : 2
6 : 3
5 : 4
4 : 5
3 : 6
2 : 5
1 : 4
0 : 3

∴ 33

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.
> (나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

A + B + C = 5
1 0 4 : 5
2 3 : 10
3 2 : 10
4 1 : 5
1 1 3 : 20
2 2 : 30
3 1 : 20
1 2 2 : 30
2 1 : 30
5 0 0 : 1
4 1 0 : 5
3 2 0 : 10

∴ 176

단답형

#2023.03.29번

29. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$
> (나) $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

• $(-1, 1)$: $\underbrace{{}_5H_4}_{70} - \underbrace{{}_4H_4}_{35} = 35$

• (0) : $\underbrace{{}_5H_5}_{126} - \underbrace{{}_4H_5}_{56} - \overbrace{(\underbrace{{}_3H_4}_{15} + \underbrace{{}_3H_3}_{10} + \underbrace{{}_3H_2}_{6} + \underbrace{{}_3H_1}_{3} + \underbrace{1}_{1})}^{35} = 35$

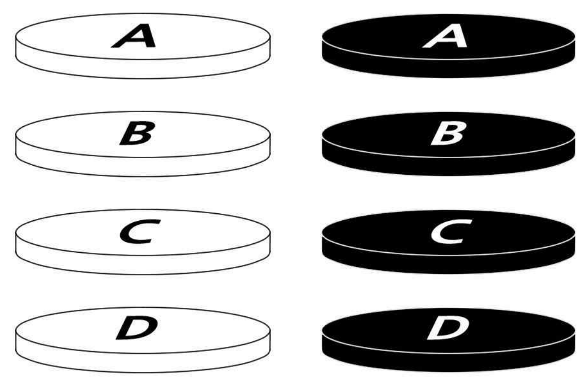
• $(-1, 0, 0, 1)$: 5

$\therefore 35+35-5=65$.

#2023.03.30번

30. 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
> (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



(A, B, C, D) : $\underbrace{2^4}_{16} \times \underbrace{3!}_{6} = 96$

(A, A, B, B) : $\underbrace{{}_4C_2}_{6} \times \underbrace{{}_4C_2}_{6} = 36$

(A, A, B, C) : $\underbrace{{}_4C_1}_{4} \times \underbrace{{}_3C_1}_{3} \times \underbrace{{}_4C_2}_{6} \times \underbrace{2!}_{2} \times \underbrace{2^2}_{4} = 576$

$\therefore 96+36+576=708$.

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.