지수함수 X 다항함수 무한대로 갈 때 극한

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ (n은 2이상의 자연수)임을 증명해보자. (n이 1일 때는 ⅲ식과 ②으로 증명 가능)

증명의 개요는 다음과 같다.

① x가 충분히 큰 수일 때, $\frac{1}{x}>\frac{x^n}{e^x}>0$임을 보인다.

② 위 부등식이 성립한다면, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}0=0$이기에 조임정리에 따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$이다.

증명을 위한 추가 명제들(따로 증명하진 않겠습니다. 쉽습니다.)
ⅰ임의의 실수 x에 대해 $e^x \geq x+1$
ⅱ임의의 양수 x에 대해 $\ln x \leq x-1$
ⅲ임의의 양수 x에 대해 $e^x > x^2$

①
$h(x)=e^x-x^{n+1}$이라 하자.
이때, $h(e^{n+1})=e^{e^{n+1}}-e^{(n+1)^2}$이고, $e^{n+1} \geq (n+1)^2$이므로 (by ⅲ) $h(e^{n+1})>0$이다.
$h'(x)=e^x-(n+1)x^n$이고, $k>1$인 실수 k에 대해 다음이 성립한다.
$h'(e^{k(n+1)})=e^{e^{k(n+1)}}-(n+1)e^{kn(n+1)}=e^{e^{k(n+1)}}-e^{kn(n+1)+\ln(n+1)}$
$e^{k(n+1)}>k^2(n+1)^2>k(n+1)^2$ 이 성립하고 (by ⅲ, $k>1$)
$k(n+1)^2>kn(n+1)+n>kn(n+1)+\ln(n+1)$이 성립하기 때문에, (by ⅱ)
$k>1$인 임의의 실수 k에 대해 $h'(e^{k(n+1)})>0$이 성립함을 알 수 있다.
이는 $h'(x)>0\,(x>e^{(n+1)})$과 같은 명제이다.

평균값 정리에 의해 $h(x)>0\,(x>e^{(n+1)})$이고, $e^x>x^{n+1}\,(x>e^{(n+1)})$이다.

②
$e^x>x^{n+1}\,(x>e^{(n+1)})$이기 때문에
$\frac{1}{x}>\frac{x^n}{e^x}>0\ (x>e^{(n+1)})$이 성립한다는 것을 알 수 있고, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}0=0$이다.

따라서 조임정리에 의해 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$이다.