제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 2일차

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

매개변수로 정의된 함수의 미분 가능성

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.
1번 문항은 개념을 점검하기 위한 문항이다.

1. 자연수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a_n$ 에서 최솟값 b_n 을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$ 의 값은?

(2013년 9월 가21, 제한시간 6분)

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

2. 실수 전체에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=ke^{2t} \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
> (나) $g(0)=g'(0)=0$ 이다.

함수 $|f(x)-x|$ 는 양의실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 양수 k의 최솟값은? (우주설 자작문항, 제한시간 7분)

① $\frac{1}{8e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{27}{8e^3}$ ④ $\frac{8}{e^4}$ ⑤ $\frac{125}{8e^5}$

3. 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=4(t-1)^3+2 \\ y=ke^{2t} \end{cases}$$

이다. 실수 전체에서 정의된 함수 $|f(x)-2x|$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최솟값이 ae^b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.) [4점]
(우주설 자작문항, 제한시간 8분)

일반적 사고과정

자연수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$ (1)

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a_n$ 에서 최솟값 b_n 을 갖는다.(2) $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$ 의 값은?(3)

(2013년 9월 가21, 제한시간 6분)

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

(1): $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=2t^2+(n+4)t+2n$

$=(t+2)(2t+n)$

를 사용하는 것 같은데, 어떻게 사용하는지 좀 더 읽어보자...

(2): $f'(x)=\frac{dy}{dx}=(t+2)(2t+n)$로 함수 $y=f(x)$ 는 모든 t에 대하여 미분계수가 정의되는 미분가능한 함수인데

반만 닫힌구간에서 연속함수의 최솟값을 묻고 있다...

최대 최소의 정리를 이용해볼 생각을 해볼까?

함수 $y=f(x)$ 최솟값은 $f\left(e^{-\frac{n}{2}}\right)$ 또는 극솟값일 것이다.

그렇다면 극소를 어떻게 구할지 고민해 봐야겠다.

미분 가능한 함수에서 극소는 $f'(x)$가 음에서 양으로 바뀌는 지점.

$f'(x)=(t+2)(2t+n)$를 그래프를 그려서 살펴보면 이차함수...

$t=-2,\ -\frac{n}{2}$에서 $f'(x)=0$인데 n의 값에 따라 상황이 달라지겠다.

(ⅰ) $n<4$일 경우

$t=-2$에서 $f'(x)$가 양에서 음으로 바뀌고

$t=-\frac{n}{2}$에서 $f'(x)$가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극대, $x=e^{-\frac{n}{2}}$에서 극소를 가지구나.

$a_n=e^{-\frac{n}{2}}$

(ⅱ) $n=4$일 경우

$f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 극소를 갖지 않을테니 자연스럽게

최솟값이 될 수 있는 값은 구간의 끝 값인 $f\left(e^{-\frac{n}{2}}\right)$뿐이네.

$a_n=e^{-\frac{n}{2}}$

(ⅲ) $n>4$일 경우

$t=-\frac{n}{2}$에서 $f'(x)$가 양에서 음으로 바뀌고

$t=-2$에서 $f'(x)$가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{n}{2}}$에서 극대, $x=e^{-2}$에서 극소를 가지구나.

$a_n=e^{-2}$

이하 생략. 정답: 2번

일반적 사고과정

실수 전체에서 정의된 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=ke^{2t} \end{cases} \ (1)$$

이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.(2)
(나) $g(0)=g'(0)=0$ 이다.(3)

함수 $|f(x)-x|$는 양의실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한(4) 양수 k의 최솟값은? (우주설 자작문항, 제한시간 7분)

① $\frac{1}{8e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{27}{8e^3}$ ④ $\frac{8}{e^4}$ ⑤ $\frac{125}{8e^5}$

*매개변수로 나타낸 함수가 정의되지 않는 경우

예를 들면 $\begin{cases} x=(t-1)^2 \\ y=t^2-t \end{cases}$ 라고 하면,

$t=0$일 때, $x=1, y=0$이다. $f(1)=0$를 얻는다.

$t=2$일 때, $x=1, y=2$이다. $f(1)=2$를 얻는다.

하나의 x값에 2개 이상의 y값이 도출되었다.

그러므로 함수 $f(x)$는 정의되지 않는다.

그러므로 실수 전체에서 정의된 함수 $y=f(x)$를

$\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$ 와 같은 매개변수로 나타내었을 때

$h(t)$가 일대일 함수이면, $g(t)$도 일대일 함수여야 한다.

(1)+(2): 실수 전체에서 정의된 함수이려면

삼차함수 $g(x)$는 $g'(x)\geq 0$ 또는 $g'(x)\leq 0$ 였지.

(3): 그러므로 $g(x)=x^3$이다.

(4): 우선 $f(x)$가 미분가능한지부터 알아볼까?

편의상 $ke^{2t}=h(t)$라 하고 $f'(x)$를 조사하자.

$\frac{dy}{dx}=\frac{h'(t)}{g'(t)}$이다. $g'(t)=0$이면 $f(x)$는 미분 불가하네.

$t=0$이면 $x=0$이니 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능한 함수...

아 그래서 굳이 **양의실수 전체** 라는 말을 주었구나.

그러면 $f(x)=x$인 모든 x에 대하여 $f'(x)=1$이어야 하는데

$f(x)=x$이려면, $y=f(x)$위의 점 (x, y)에 대하여 $x=y$이니

$g(t)=h(t)$인 상황이네. 마찬가지로 $f'(x)=1$의 상황은

$\frac{dy}{dx}=1$인 상황이니 $g'(t)=h'(t)$인 상황이구나.

결국 두 곡선 $y=g(t), y=h(t)$가 만난다면 접해야 한다는 거네

$t=s$일 때 접한다고 하고 마무리 하면 되겠구나.

이하 생략

정답: 3번

일반적 사고과정

함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=4(t-1)^3+2 \\ y=ke^{2t} \end{cases}$$

이다.(1) 실수 전체에서 정의된 함수 $|f(x)-2x|$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최솟값이 ae^b일 때,(2)
a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.) [4점]
(우주설 자작문항, 제한시간 8분)

(1): $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2ke^{2t}}{12(t-1)^2}$이므로 $t=1$일 때 미분이 불가

$t=1$이면 $x=2$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분이 불가하구나

(2): 그렇다면 $x\neq 2$가 아닌 모든 점에서 미분이 가능해야하니
그러면 $f(x)=2x$인 모든 x에 대하여 $f'(x)=2$이어야 하는데
편의상 $4(t-1)^3+2=g(t)$, $ke^{2t}=h(t)$라 하고
$f(x)=2$이려면, $y=f(x)$위의 점 (x, y)에 대하여 $2x=y$이니
$2g(t)=h(t)$인 상황이네. 마찬가지로 $f'(x)=2$의 상황은
$\dfrac{dy}{dx}=2$인 상황이니 $g'(t)=2h'(t)$인 상황이구나. 결국 두 곡선
$y=g(t)$, $y=2h(t)$가 만난다면 접해야 한다는 거네

$t=s$일 때 접한다고 하고 마무리 하면 되겠구나.

이하 생략

답: 10 (160은 매력적인 오답입니다.)

제시하는 사고과정

실수 전체에서 정의된 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=ke^{2t} \end{cases} \quad (1)$$

이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.$_{(2)}$
> (나) $g(0)=g'(0)=0$ 이다.$_{(3)}$

함수 $|f(x)-x|$는 양의실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한$_{(4)}$ 양수 k의 최솟값은? (우주설 자작문항, 제한시간 7분)

① $\dfrac{1}{8e}$ ② $\dfrac{1}{e^2}$ ③ $\dfrac{27}{8e^3}$ ④ $\dfrac{8}{e^4}$ ⑤ $\dfrac{125}{8e^5}$

(1)+(2): 실수 전체에서 정의된 함수이려면
삼차함수 $g(x)$는 $g'(x)\geq 0$ 또는 $g'(x)\leq 0$ 였지.

(3): 그러므로 $g(x)=x^3$가 되겠고

(4): $|f(x)-x|$가 $x>0$에서 미분 가능한지 묻고 있는데
함수 $y=f(x)$에서 $y=ke^{2t}$임을 이용하면 이는 함수
$y=|ke^{2t}-t^3|$가 $t>0$에서 미분가능한지 묻는 것이네.

그러나 이 경우 $t=0$일 때 미분이 불가하다는 것을 눈치체지 못할 수 있다. 그러므로 이 방법은 $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$ 일 때만 사용하도록 하는 것이 좋겠다.

제시하는 사고과정

함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=4(t-1)^3+2 \\ y=ke^{2t} \end{cases}$$

이다.$_{(1)}$ 실수 전체에서 정의된 함수 $|f(x)-2x|$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최솟값이 ae^b일 때,$_{(2)}$ a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.) [4점]
(우주설 자작문항, 제한시간 8분)

(1): $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2ke^{2t}}{12(t-1)^2}$이므로 $t=1$일 때 미분이 불가

$t=1$이면 $x=2$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분이 불가하구나

(2): 그렇다면 $x\neq 2$가 아닌 모든 점에서 미분이 가능해야하네
$|f(x)-2x|$가 $x\neq 2$에서 미분 가능한지 묻고 있는데
함수 $y=f(x)$에서 $y=ke^{2t}$임을 이용하면 이는 함수
$y=|ke^{2t}-8(t-1)^3-4|$가 $t\neq 1$에서 미분가능한지
묻는 것이네.

마찬가지로 $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$ 일 때만 사용하도록 하는 것이 좋겠다.

3일차 예습과제

정답을 내지 못하여도 상관없으니 도전하여 봅시다.

1. $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $\{f(x)\}^2=x^2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고 허근은 갖지 않는다. (나) 방정식 $\{f(x)\}^2=x^2$의 서로 다른 실근의 합은 9이다.

$f'(0)<0$일 때, $f(4)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.