49

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}$

(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 143

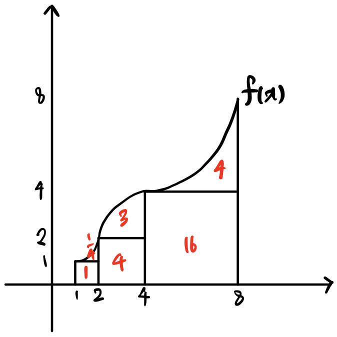
Sol.) 현장풀이

$g(2)=2f(1)=2$ $\quad f(2)=g(2)=2$

$g(4)=2f(2)=4$ $\quad f(4)=g(4)=4$

$\vdots$

$g'(2x)=f'(x)$



$$\therefore \int_1^8 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 63-\left(28-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{139}{4}$$

$\therefore p+q=143$

sol2)

$x=2f(t)$ 라 치환하자.

$f(x)=f(2f(t))=2t$

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_1^2 f(2f(t))\cdot 2f'(t)dt$$
$$=7$$

$$\int_4^8 f(x)dx=\int_2^4 f(2f(t))\cdot 2f'(t)dt$$
$$=20$$

$$\therefore \int_1^8 xf'(x)\,dx = xf(x)\Big|_1^8-\int_1^8 f(x)dx$$
$$=63-\left(\frac{5}{4}+7+20\right)$$
$$=\frac{139}{4}$$

$\therefore p+q=143$

sol3)

$y=f(x)$, $x=g(y)$, $f'(x)dx=dy$

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^{f(8)} g(y)dy=\int_2^{f(8)} 2\cdot f\left(\tfrac{1}{2}y\right)dy+\int_1^2 g(y)dy$$
$$=\int_1^{\frac{f(8)}{2}} 4f(x)dx+\frac{7}{4}$$
$$=4\int_1^4 f(x)dx+\frac{7}{4}$$
$$=\frac{139}{4}$$

$\therefore p+q=143$

Sol4) 카발리에리의 원리

가) 조건 → $[1,2]$ 에서 f가 주어짐.

→ $g(2x) = 2f(x)$

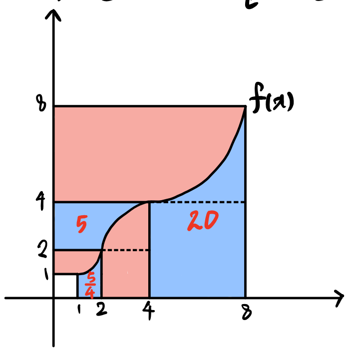
→ $g(x) = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$ $[2,4]$

→ $[2,4]$에서 $g(x)$는 $[1,2]$에서 $f(x)$를 x축으로 2배/y축으로 2배 한거임을 알 수 있음.

→ $[2,4]$에서 $g(x)$의 적분값은 $[1,2]$에서 $f(x)$의 적분값의 4배

⋮

반복하면 아래와 같이 알 수 있음.



$\int_1^8 xf'(x)\,dx$: 역함수 적분

→ $\left(4-1-\frac{5}{4}\right) + 4\cdot\frac{5}{4} + (64-16-20) = \frac{139}{4}$

$\therefore p+q = 143$

＊ 카발리에리의 원리

: 서로 다른 두 평면도형이 주어졌을 때,
임의의 동일한 높이에서 평행한 직선에 의하여 생기는
두 선분의 길이가 같지 않더라도 그 길이의 비가 $m:n$ 으로 일정하면
두 도형의 넓이 비 역시 $m:n$으로 일정하다.