2023 기대모의고사 9평 대비 정답

공 통				확통		미적	
1.	②	12.	①	23.	④	23.	④
2.	③	13.	⑤	24.	⑤	24.	④
3.	③	14.	①	25.	②	25.	③
4.	②	15.	④	26.	①	26.	⑤
5.	①	16.	12	27.	⑤	27.	④
6.	①	17.	16	28.	⑤	28.	⑤
7.	②	18.	3	29.	16	29.	4
8.	①	19.	14	30.	19	30.	16
9.	④	20.	5	1컷	85	1컷	83
10.	②	21.	20	2컷	74	2컷	73
11.	③	22.	290	3컷	62	3컷	62

출제진 소개

김기대 T
- 2013~2020 수능 (평가원) 매년 직접 응시, All 100 (총 5번)
  (대학교 시험과 날짜 겹친 수능, 군복무 기간 중 수능 제외)
- 고려대, 서강대, 시립대등 수리논술 최초합격 (All 수학과, 수석합격 有)
- 수능수학/수리논술 Final 수업 (매년 Final 누적 출석수 2000명 이상)

일부 문항을 제공한 **김주한**(고려대 물리학과)에게 감사의 뜻을 밝힙니다.
- 前 강남대성 수학출제진 (하이포텐, 해시태그 등)

2021년 추가 무료 컨텐츠

EBS 수완, 수특 선별문항목록/변형문항 및 각종 자료글은
orbi.kr/profile/416016 에서 확인할 수 있습니다.

무단복제/무단배포 신고

기대모의고사의 무단복제 및 무단배포 신고는 kidae6150@naver.com 으로 제보해주세요. 제보사례금을 드립니다. (합의금의 15~30%)

교재 실물을 구매하여 수업에 사용하는 것은 상관없으나, 다음 사례들은 모두 저작권법에 위배됩니다.

1) 스캔파일, PDF파일 배포 (인쇄물, 디지털파일)
2) 원본 그대로를 한글로 타이핑 (2차 저작물) 후 배포
3) 일부 문항만을 따서 교재에 사용
   (2021학년도 기준 어느 누구에게도 사용 허락 X)

본 모의고사의 문제들과 해설들은 저자와 검토진들의 정성과 노력으로 만들어진 자작물입니다. 적극적인 신고, 근본적으로는 저작권을 지키는 여러분들의 양심이 좋은 컨텐츠를 만드는 원동력이 됩니다.

2022년 수리논술 Final 진행 학교

쓸모 없는 교과외 내용과 대학수학만 가르치는 논술수업은 No!
대학별 성향에 맞는 문제만 엄선하여 짧은 시간에 최고의 효율을 선물하는 Final 수업입니다.
우수한 퀄리티의 모의고사로 증명한 '문제를 만드는 재주와 안목'은 수리논술에서도 적용됩니다. 양질의 문제와 수업을 제공하겠습니다.

자세한 수업일정은 orbi.kr/profile/416016 에서 확인하실 수 있습니다.

추석	9/9	9/10	9/11	9/12	이후
오전	수리논술 압축특강	수리논술 압축특강	수리논술 압축특강	수리논술 압축특강	금 1800~2130 연세대 (9/16, 24 + 10/2)
점심	연세		홍익	연세	일 1330~1700 홍익대 (9/18, 25 + 10/2, 3)
저녁	오전 0900~1230 점심 1330~1700 저녁 1800~2130		시립		일 1800~2130 시립대 (9/18, 25 + 10/2, 3)

☆ 연세대 Final (총 5회)
When? 9/9 개강, 매주 금요일 저녁, 추석연휴는 위 시간표 확인
① 기대수학연구소에서 제작한 자체 논술 모의고사 사용
② 2019년을 기점으로 연세대 출제기조가 바뀐 것에 민감하게 대응, 수업별 숙제는 기출문제 중 엄선한 문항들만 재해석

☆ 서울시립대 Final 및 홍익대 Final (각각 5회)
When? 9/11 개강, 매주 일요일, 10/3 개천절 마지막수업
① 18~20년 3년 연속 시립대 수학과 합격증을 인증한 기대T의 수업 (2020년은 수석합격)
② 각 학교별 시험에 대한 완벽한 이해도를 바탕으로 학생들의 체감난이도를 확 떨어뜨려주는 진정한 의미의 Final

★ 한양대 Final (이화여대 Final 겸용)
① 출제 소스가 명확한 한양/이화를 위해 3,000문제를 풀어보고 우수문항을 선별했습니다. 예상문제 100% 구성 모의고사 제공
② 22년 모의논술 수석, 19년 모범답안자 (수능 3등급) 배출
③ 2020 Final 대비문제가 2021 한양대 모의논술에 '그대로' 출제
④ 2021년 이화여대 모의논술 수석

★ 경희대 Final
① 수능은 물론이고 다른 학교들과도 경향성 차이가 많이 나서, 학생 입장에서 준비하기 어려운 학교.
② 짧은 파이널 기간에 누가 더 빨리 이 낯섦에 익숙해지냐의 싸움이기 때문에, 경희대의 특징에만 맞춘 입맛저격 Final 진행

★ 인하대 Final
① 짜임새 있는 문제를 출제하기로 소문난 인하대! 제대로 준비하면 어느 학교들보다도 합격확률이 높기 때문에 지원 강추!!
② 한양대/이대/시립대 다음으로 출제경향이 기대T와 찰떡인 학교.

이외에도 ★성균/중앙/건국/서울과기대/광운+세종/아주 Final 등 대부분의 학교 Final 개강합니다.

1) $\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

2) $\sqrt[5]{9}\times 3^{\frac{3}{5}}=3^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}}=3$ 이다.

3)
$a_6-a_5=2,\ a_4-a_3=2,\ a_2-a_1=2$이므로

$(a_6+a_4+a_2)-(a_5+a_3+a_1)=6$

4)
$A=B$에서 $2^b>0$이므로 $2^b=2^a-2$이고 $\log_2\frac{b}{a}=-1$이다.

$\log_2\frac{b}{a}=-1$에서 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, $a=2b$이고

$2^b=2^a-2=2^{2b}-2$에서 $2^b=x$라 하면

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$에서 $x=2$이다. 따라서 $2^b=2$에서

$b=1$이고 $a=2$이므로 $a+b=3$

5) $\lim\limits_{x\to 2+}f(-x)=\lim\limits_{x\to -2-}f(x)=0$이고

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 2+}f(-x)+\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=0$

6)
$\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k-k)^2=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum\limits_{k=1}^{10}ka_k+\sum\limits_{k=1}^{10}k^2=400$

$\sum\limits_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$이고 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k^2=25$이므로

$\sum\limits_{k=1}^{10}ka_k=5$

7) $x=1$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$을 만족해야한다.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax-2}{x-1}$의 분모가 0으로 수렴하므로, 분자 역시 0으로 수렴해야 극한값이 존재할 수 있다. 따라서 $1+a-2=0$에서 $a=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$에서 극한값이 3임을 알 수 있다. 따라서 $b=3$.

종합하면 $a+b=4$이다.

8)
함수 $f(x)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x+k}$는 감소함수이므로 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $f(1)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1+k}$를 갖는다.

함수 $g(x)=4+\log_2 x$는 증가함수이므로 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $g(4)=4+\log_2 4=6$을 갖는다.

두 함수의 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서의 최댓값이 같으므로

$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1+k}=6$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+k}=2$, $1+k=-1$에서 $k=-2$

9) $\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=g(x)$라 하면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수이고 $g(-1)=0$이다.

조건에 의해 $g(1)=0$이고, $g(x)$는 미분가능한 함수이므로 최솟값이 0이라는 조건에 의해 $g'(-1)=g'(1)=0$이다.

따라서 $g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+1)^2=\int_{-1}^{x}f(t)dt$.

$\int_0^2 f(t)dt=\int_{-1}^{2}f(t)dt-\int_{-1}^{0}f(t)dt=g(2)-g(0)$이므로

정답은 $\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$이다.

10) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $x=0,2$에서 각각 극댓값, 극솟값을 가진다. $f(0)=0$ (참고로 $x=0$은 $f(x)=0$의 중근이다.), $f(2)=-4$, $f(3)=0$이다.

만약 a가 3이하라면, 최댓값은 0이고 최솟값은 음수이므로 합이 12(양수)가 나올 수 없다.
따라서 a는 3보다 큰 수여야 하며, 그 때의 최댓값은 $f(a)$, 최솟값은 극솟값인 $f(2)=-4$이다.

따라서 $f(a)+f(2)=12 \Rightarrow f(a)=a^3-3a^2=16$에서
$(a-4)(a^2+a+4)=0$이므로 $a=4$이다.

11)
곡선 $y=a^x+\frac{3}{2}$을 x, y축의 양의 방향으로 2, -4만큼

평행이동하면 곡선 $y=a^{x-2}-\frac{5}{2}$이 나온다.

한편 직선 $y=-2x$을 x, y축의 양의 방향으로 2, -4만큼
평행이동시키면 자기 자신이 나온다.
따라서 점 A를 x, y축의 양의 방향으로 2, -4만큼
평행이동시키면 점 B가 나옴을 알 수 있다.
(EBS 연계교재에서는 매년 나오는 포인트이므로, 평가원의
변형을 대비하자.)

한편 선분 AB의 중점이 원점이므로 점 A의 좌표는 $(-1,\ 2)$,
점 B의 좌표는 $(1,\ -2)$임을 알 수 있다. 이 두 점을 각각의
곡선에 대입해보면 $a=2$임을 알 수 있다.

12)
$f(x)\{f(x)-2\}=3$에서 $f(x)=-1$ or 3이어야 한다.
($f(x)=t$로 치환해서 이차방정식을 풀어주면 쉽게 알 수 있다.)

$f'(x)=3x^2+2ax=0$으로부터 $x=0,\ -\frac{2a}{3}$에서 $f(x)$가 극대 또는 극소임을 알 수 있다.

그런데 $x=0$일 때 $f(x)$의 함숫값이 -1 이므로 $f(x)=-1$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 2이다. 따라서 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 $4-2=2$ 여야 한다. 즉, 3이 $f(x)$의 극댓값이 되어야 한다는 뜻이다.

따라서 $f\left(-\frac{2a}{3}\right)=3$으로부터 $-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}-1=3$에서 $\frac{4}{27}a^3=4$이므로 $a=3$이다.

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-1$이고 $f(3)=27+27-1=53$이다.

13)

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k$를 만들려면 $\sum_{k=1}^{m} a_k > \frac{a_{m+1}}{2}$의 양변에 a_{m+1}을 더하면 된다. 따라서 (가)$=\frac{3}{2}$이다.

여기서, $\frac{3}{2}$보다 작은 수 (ex. 1 or $\frac{1}{2}$ 등등)를 (가)에 넣어도 성립하는 것 아니냐고 반문할 수 있다. 부등식 자체적으로 보면 $\frac{3}{2}$보다 작은 수를 넣어도 성립하는 것, 맞다.
하지만 문제 box의 내용은 '수학적귀납법의 과정'이다.
후반부에 있는 '따라서 (**), (***)에 의하여 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.'라는 어구를 쓰기 위해서는, 두 부등식이 자연스럽게 이어지면서 $n=m+1$일때가 증명이 돼야 하는, 이 때 (***)에 있는 $3\sqrt{m+1}\times 2^m$ 식이 $\frac{3}{2}\times a_{m+1}$에 해당하기 때문에 (가)는 $\frac{3}{2}$여야 한다.

즉, 이 문제는 단순히 등식만 보고 문제를 푸는 허수판별용 문제이다. 본인이 지금까지 허수였다면, 이 문제를 풀고 나서는 김허수가 되도록 하자. (TMI:김허수=대한민국 최고의 쇼메이커)

마찬가지 논리로 (나)의 식은 결국 $\frac{1}{2}\times a_{m+2}=\sqrt{m+2}\times 2^{m+1}$여야함을 알 수 있다. (이 부분은, (나) 위에 있는 세 줄의 식으로부터 $\sqrt{\frac{m+2}{m+1}}<\frac{3}{2}$임을 알면 직접적으로도 부등식을 이끌어낼 수 있다.)

따라서 $f(4p)=f(6)=256\sqrt{2}$이다.

14) 준식의 시그마 내부를 전개하면

$\sum_{k=1}^{8}\{a_k a_{k+1}+(k+1)a_{k+1}-ka_k-k(k+1)\}$이다.

$\sum$ 내부항의 소거 성질 ($\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$)에 의하여

$\sum_{k=1}^{8}\{(k+1)a_{k+1}-ka_k\}=9a_9-a_1=a_1(9r^8-1)=0\left(\because r^8=\frac{1}{9}\right)$,

$\sum_{k=1}^{8}k(k+1)=\sum_{k=1}^{8}\frac{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)}{3}=240$

(물론 이 경우 $\sum k^2$, $\sum k$ 공식을 써도 됩니다만, 이 문제의 Theme인 '$\sum$ 내부항의 소거' 에 집중한 풀이를 실어봤습니다.)

이므로 $\sum_{k=1}^{8}a_k a_{k+1}=40(\sqrt{3}+1)$이어야 한다.

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면,

수열 $\{a_n a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a_1 a_2=(a_1)^2\times r$ 이고 공비가 $r^2\left(=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{8}a_k a_{k+1}=\frac{(a_1)^2 r(1-r^{16})}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}r(a_1)^2\times(1-r^{16})\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

로부터 $\sqrt{3}r(a_1)^2=81$ $\left(\because 1-r^{16}=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}\right)$ 이고

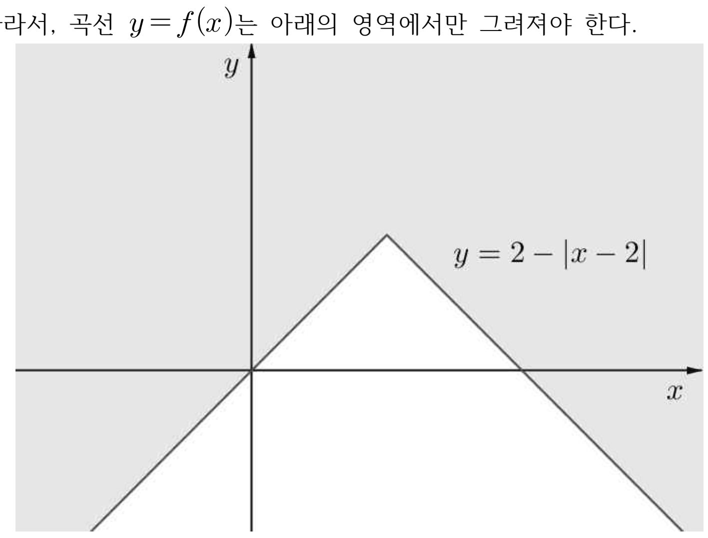
$(a_1)^2=3^{4-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=3^{\frac{15}{4}}$, $a_1=3^{\frac{15}{8}}$임을 알 수 있다.

따라서 $a_n=a_1\times r^{n-1}=3^{\frac{15}{8}-\frac{n-1}{4}}=3^{\frac{17-2n}{8}}$ 에서

$a_m<1\Leftrightarrow\frac{17-2m}{8}<0\Leftrightarrow 8.5<m$ 임을 알 수 있다. 따라서 최소의 자연수 m은 9이다.

15) 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 2 이상이어야 한다.
즉, $f(x)\ge 2-|x-2|$을 만족시켜야 하고,
$g(x)=2$인 상황은 $y=f(x)$와 $y=2-|x-2|$가 만날 때이다.
(이를 통해 $f(2)=2$임을 알 수 있다.)

따라서, 곡선 $y=f(x)$는 아래의 영역에서만 그려져야 한다.



ㄱ.
$g(x)=f(x)+|x-2|$라는 식에서
$|x-2|$가 $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로 $f(x)$도 $x=2$에서 최솟값을 가져야 $g(x)=f(x)+|x-2|$가 최솟값 2를 가질 수 있을 것 같아서 $f'(2)=0$이다.

라고 하면 틀린다.

위에서도 설명했듯이 $g(x)=2$, 즉 $g(x)$가 최소일 때에는 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=2-|x-2|$가 만날 때이다.
따라서 $f(2)=2$이기만 하면 되고, $f'(2)=0$일 필요는 없다.
(ㄱ.은 거짓)

ㄴ.
(2, 0)은 위의 그림에 있는 흰색 직각삼각형 ((0, 0), (2, 0), (2, 2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형)
의 빗변의 중점이다.
또한 사차함수의 그래프 위의 점은 회색영역에만 존재할 수 있고, 그 점들 중 (2, 0)과 제일 가까운 점은 (1, 1), (3, 1)이다. 또한 이 때의 $l(t)$는 최소가 되고 값은 $(\sqrt{2})^2=2$이다.
(ㄴ.은 참)

ㄷ.

집합 $A=\{t\,|\,l(t)=2\}$의 원소의 개수가 2이므로 사차함수 $f(x)$는 두 점 $(1,1)$, $(3,1)$을 지나야함을 알 수 있다.
또한 ㄱ.에서 $f(x)$가 $(2,2)$를 지난다고 했는데, 위의 세 점 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$에서 $y=f(x)$와 $y=2-|x-2|$가 만나고 있으므로, 원소의 개수가 3인 집합 $B=\{t\,|\,g(t)=2\}$의 세 원소가 1, 2, 3임을 안다.

따라서 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f'(1)=1$, $f'(3)=-1$이다.
이를 통해 함수 $f(x)$를 구하면 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)(x-4)+x$ 이다.

따라서 $g(5)=29+3=32$이다. (ㄷ.은 참)

따라서 정답은 4번이다.

16)

$$\int_{-1}^{2}(4x^3-2x)dx=\int_{1}^{2}(4x^3-2x)dx \quad (\text{기함수 성질})$$
$$=\left[x^4-x^2\right]_1^2=12$$

17) 곱의 미분법에 의하여 $f'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$ 이므로 $f'(2)=4g(2)+4g'(2)=16$이다.

18)
$$\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$$
$$+\cos(2\pi+\theta)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)+\cos(3\pi+\theta)$$
$=-\sin\theta-\cos(\theta)+\sin(\theta)+\cos(\theta)-\sin\theta-\cos\theta=-\sin\theta-\cos\theta$이다. $-\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$에서 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$,

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$ 이므로 $-8\sin\theta\cos\theta=3$ 이다.

19)

선분 $\overline{AC}$의 길이를 x로 두자. 삼각형의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로,

$\frac{1}{2}\times 2\times x\times\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$에서, $x=3$임을 알 수 있다.

한편, 코사인법칙에 의해 선분 $\overline{BC}$의 길이가 $\sqrt{7}$임을 알 수 있다.

사인법칙에 의해 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2R$ 이므로, 외접원의 넓이는 $\frac{7}{3}\pi$이다. 따라서 $\frac{6S}{\pi}=14$이다.

20)

$x=1$을 대입하면 $0\le f(1)\le 0$이므로 $f(1)=0$이다.

부등식 모든 변을 $x-1$로 나눈 후 $x\to1+$ 극한을 씌워주면
$$\lim_{x\to1+}\frac{8}{5}\times\frac{x^3-6x^2+12x-7}{x-1}\le\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim_{x\to1+}\frac{4}{3}\times\frac{x^4-1}{x-1}$$
이고, $\lim_{x\to1+}\frac{8}{5}\times\frac{x^3-6x^2+12x-7}{x-1}=\frac{24}{5}$, $\lim_{x\to1+}\frac{4}{3}\times\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{16}{3}$
이므로 $\frac{24}{5}\le f'(1)\le\frac{16}{3}$이다.

한편 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이므로 $f'(x)$ 역시 모든 항의 계수가 정수인 다항함수이므로 $f'(1)$의 값은 정수일 수 밖에 없다. 따라서 주어진 범위에서 가능한 $f'(1)$의 값은 5이다.

21)
$f'(1)\times f'(2)\le 0$
$f'(2)\times f'(3)\le 0$
$f'(3)\times f'(4)\le 0$
를 동시에 만족하는 함수는

(1) $x=2$에서 극댓값을 가지고, $3\le x\le 4$에서 극솟값을 가지는 경우

(2) $1\le x\le 2$에서 극댓값을 가지고, $x=3$에서 극솟값을 갖는 경우

두 가지가 있다.

첫 번째 경우, 함수를 $f'(x)=3(x-2)(x-a)$로 둘 수 있다. (단, $3\le a\le 4$)

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+6ax+C$ 이고, (나) 조건을 만족시키려면 $x=0$일 때 $f(0)=0$이어야 하므로

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+6ax$이다.

$f'(0)=6a$이므로 $18\le f'(0)\le 24$이고
$x\ge 0$일 때 $x\le f(x)$를 만족시키기만 하면 된다.

$$x\le x^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+6ax$$
$$1\le x^2-\frac{3}{2}(a+2)x+6a$$
$$1\le\left\{x-\frac{3}{4}(a+2)\right\}^2+6a-\frac{9}{16}(a+2)^2$$

따라서 $1\le 6a-\frac{9}{16}(a+2)^2$을 만족시키면 된다.

그런데 $3\le a\le 4$에서 항상 만족하므로
$f(2)=6a-4$의 최댓값은 20이다.

두 번째 경우도 같은 방법으로 구해보면 최댓값이 14임을 알 수 있다.
따라서 $f(2)$의 최댓값은 20이다.
(함수의 그래프를 그려서 해결하는 경우, 계산 없이 간단하게 넘어갈 수 있는 부분이 있으므로, 그림을 그려보면서 풀어볼 것)

22)
<출제의도>
<가>조건에 의하면 $b_n+1\le b_{n+1}\le b_n+2$ 이고 수열 $\{b_n\}$은

자연수값을 가지므로 $b_{n+1}=\begin{cases} b_n+1 & (\text{조건 ⓐ}) \\ b_n+2 & (\text{조건 ⓑ}) \end{cases}$ 으로 표현된다.

일반적으로 출제됐던 문제들은 ⓐ, ⓑ에 n은 짝수, n은 홀수 등의 구체적인 수식적 조건이 제시돼있지만 이 문항은 수열의 귀납적 정의를 단순 수식으로 주지 않고 문제에 상황을 부여하여 자유롭게 다음 항을 선택할 수 있도록 한 신유형 문항이다.

이후 등차수열의 합공식까지 활용할 수 있게 출제된 복합형 신유형이지만 수열의 귀납적 정의의 본질인 '열심히 대입해서 문제 조건에 맞는 규칙 발견하기.'는 유지됐기 때문에 이에 맞게 문풀습관을 잡도록 하자.

<문항해설>

문제의 b_n은 두 점 사이의 거리이기 때문에 항상 양수이지만, 이것이 A_n보다 A_{n+1}이 항상 왼쪽에 있는 것을 의미하는게 아니란 것을 명심하자. 이는 (나) 조건에서도 확인할 수 있다.

A_n에서 A_{n+1}로 이동하는 것을 $n_{th}\ step$이라 하면 A_1부터 A_{11}까지 $1_{st}\ step$ ~ $10_{th}\ step$ 중 1번의 $step$만 왼쪽으로 이동, 나머지 9번의 $step$은 오른쪽으로 이동함을 의미한다.

$\overline{A_1A_{11}}$의 최솟값을 구해보자. 최솟값이기 위해선 b_1부터 b_{10}까지가 최대한 작은 숫자들로 구성되어야하며, 왼쪽으로 가는 $step$은 $10_{th}\ step$이 되어야 한다. ($\because b_{n+1}=\begin{cases} b_n+1 \\ b_n+2 \end{cases}$ 이므로 b_n은 증가수열이므로 왼쪽으로 최대한 많이 가야 $\overline{A_1A_{11}}$가 작아질 수 있겠죠.)

b_1부터 b_{10}까지가 최대한 작은 숫자로 구성되기 위해선 $2_{nd}\ step$, $3_{rd}\ step$, $4_{th}\ step$이 모두 오른쪽으로 가는 $step$이어야 하고, $\overline{A_1A_4}=16$ 까지 만족시키는 조합은 $(b_1, b_2, b_3)=(4, 5, 7)$ 뿐이다. (Tip:16이 5×3 주변 숫자임을 확인하고 $b_2=4, 5, 6$인 상황들을 관찰해보자.)

따라서 $(b_1, b_2, \cdots, b_9, b_{10})=(4, 5, 7, 8, \cdots, 12, 13, 15)$일 때, $\overline{A_1A_{11}}$가 최솟값 $(4+5+7+8+\cdots+12+13)-15=64$
(부연설명 : 7부터 13까지는 공차가 1인 등차수열 합공식 활용, b_{10}이 15인 이유는 $\overline{A_1A_{11}}$가 짧아야 하므로 최대한 많이 왼쪽으로 가기 위해 $b_{11}=b_{10}+2$를 채택한 것)

$\overline{A_1A_{11}}$의 최댓값을 구해보자. 최댓값이기 위해선 b_1부터 b_{10}까지가 최대한 큰 숫자들로 구성되어야하는데, 그러기 위해선 $1_{st}\ step$, $2_{nd}\ step$, $3_{rd}\ step$ 이 중 한 번은 왼쪽으로 가야 한다.
이 케이스들을 조사해보면 $\overline{A_1A_{11}}$가 최대가 되려면 $(b_1, b_2, b_3)=(18, 20, 22)$ 이고 $3_{rd}\ step$ 때 왼쪽으로 가면 $\overline{A_1A_4}=16$을 잘 만족시킨다.

(부연설명 : $\overline{A_1A_{11}}$에 $\overline{A_1A_4}$가 포함된다. 이미 $\overline{A_1A_4}=16$은 고정이기 때문에, 이 사이에서 왼쪽으로 가고 오른쪽으로 가고는 $\overline{A_1A_{11}}$의 값에 영향을 주지 않는다. 따라서 왼쪽으로 가야한다면 $\overline{A_1A_4}$ 사이에 움직이는 것이 나은 것이다. 이러한 결과를 바탕으로 $1_{st}\ step$가 왼쪽으로 가는 $step$일 때, $2_{nd}\ step$가 왼쪽으로 가는 $step$일 때, $3_{rd}\ step$가 왼쪽으로 가는 $step$일 때 케이스를 나눠서 귀납적 정의와 같은 방식으로 조사해주면 위와 같은 결과가 나온다.)

따라서 $(b_1, b_2, \cdots, b_9, b_{10})=(18, 20, 22, \cdots, 32, 34, 36)$일 때, $\overline{A_1A_{11}}$의 최댓값은 $16+(24+26+\cdots+32+34+36)=226$이 나온다.
(부연설명 : $16=\overline{A_1A_4}$, $24=b_4$, 이후 $b_{n+1}=b_n+2$으로 생성)

따라서 $\overline{A_1A_{11}}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $226+64=290$ 이다.

23) 정답 : ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times2=1\times2=2$$

24)

$f'(x)=\frac{a}{x}-2x=\frac{1}{x}(a-2x^2)$ 이므로 $0<x<\sqrt{\frac{a}{2}}$ 일 때 $f'(x)>0$, $x>\sqrt{\frac{a}{2}}$ 일 때 $f'(x)<0$ 이므로

닫힌구간 $[1, 3]$의 끝값인 $x=3$에서 최댓값을 갖기 위해서는 $3\le\sqrt{\frac{a}{2}}$ (즉, 구간 $[1, 3]$까지 증가상태를 유지해야 문제 조건을 만족시킨다는 뜻)여야 하고,
이를 풀면 $18\le a$이다. 따라서 a의 최솟값은 18이다.

25)

$\frac{dy}{dx}=2x\sqrt{x^2+1}$이므로 곡선의 길이를 l이라 할 때,

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{4x^4+4x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^1(2x^2+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

26)

직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ라 하면, $\tan\theta=2$이다. 이때 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 값은

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$이다.

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+1}{1-2}=-3$이므로

두 수의 합은 $-\frac{8}{3}$이다.

따라서 $9p^2=64$

27)

정사각형 $AB_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l이라 하면 선분 AC_2의 길이는 $\sqrt{2}l$이다.
또한 선분 C_2C_1의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이인 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이고 AC_1의 길이는 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}l+\sqrt{10}=3\sqrt{2}$이다. 따라서 $l=3-\sqrt{5}$.

수열 $\{S_n\}$의 첫 번째 항은 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 넓이인 9이고 공비는 $\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{14-6\sqrt{5}}{9}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9}{1-\frac{14-6\sqrt{5}}{9}}=\frac{81}{6\sqrt{5}-5}=\frac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$$ 이다.

28)

구하려는 적분의 구간을 0부터 π와, π부터 2π로 나누자.

$\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}f'(x)\cos x\,dx$에서

$\int_{\pi}^{2\pi}f'(x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi}f'(x+\pi)\cos(x+\pi)\,dx$인데

$f'(x+\pi)=f'(x)-\sin x e^{\cos x}$ 이고 $\cos(x+\pi)=-\cos x$ 이므로

$\int_0^{\pi}f'(x+\pi)\cos(x+\pi)\,dx=\int_0^{\pi}(-f'(x)\cos x+\sin x\cos x e^{\cos x})dx$

이다.

따라서

$\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}f'(x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,e^{\cos x}dx$이다.

$\cos x=t$로 치환하면 $\int_{-1}^{1}te^t dt$이고, 이 값은 $[(t-1)e^t]_{-1}^{1}=\frac{2}{e}$이다.

[별해]

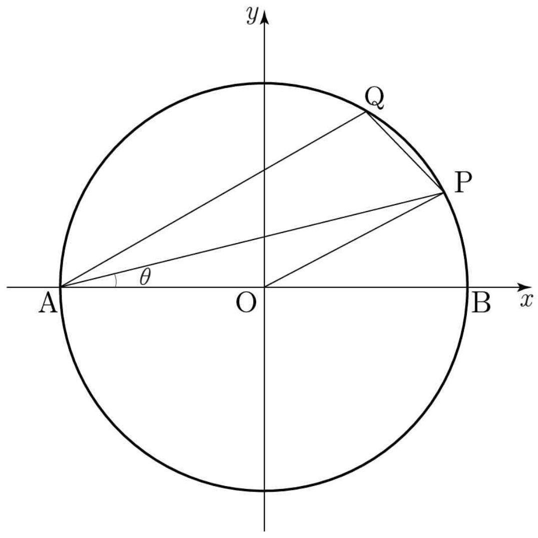
$f(x+\pi)=f(x)+e^{\cos x}$의 양변에 $\sin x$를 곱한 식과

$\int_0^{2\pi}f'(x)\cos x\,dx=[f(x)\cos x]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}f(x)\sin x\,dx$을

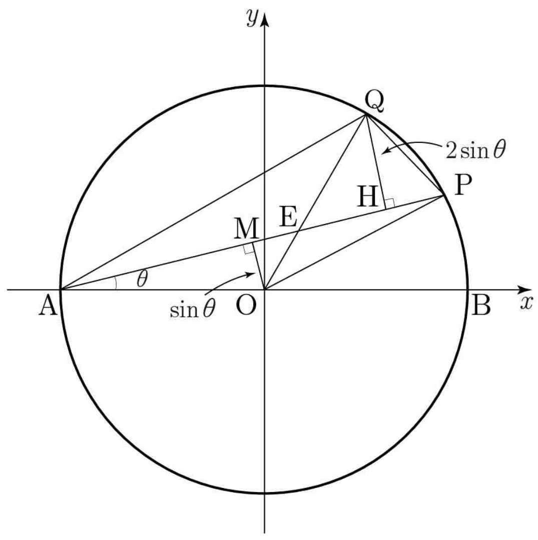
이용하여 구하는 별해도 있다.

29)

먼저 주어진 그림을 살펴보도록 하자. 직선 AP의 기울기는 $\tan\theta$이므로, 직선 AP가 x축과 이루는 각의 크기는 θ이다.



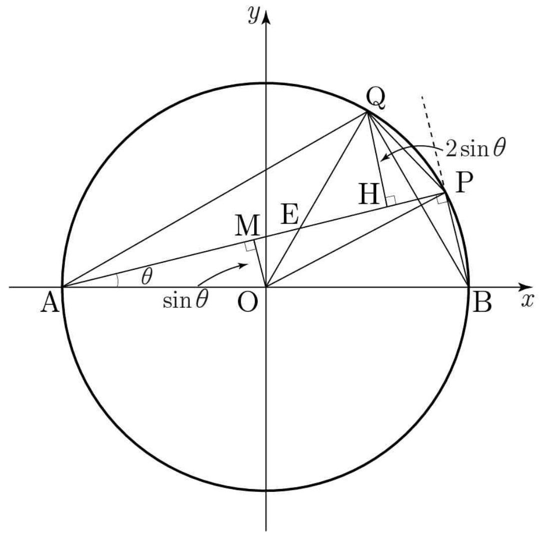
삼각형 APQ의 넓이가 삼각형 APO의 넓이의 2배라는 조건이 주어졌으므로, 삼각형의 넓이를 구하기 위해 수선의 발을 내려보자. 점 O에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 M, 점 Q에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 OM의 길이가 $\sin\theta$이므로, 선분 HQ의 길이가 $2\sin\theta$임을 알 수 있게 된다.



구하려는 삼각형의 넓이는 BPQ인데, 어떤 방법으로 삼각형의 넓이를 구할지 생각해 보자. 선분 PQ, 선분 QB, 각 PQB를 구하여 삼각형의 넓이를 구하려 했더니, 각 PQB는 원주각의 정의로 쉽게 구할 수 있지만, 선분 QB, 선분 PQ를 구하려면 많은 각에 대한 정보가 필요하다는 점에서 복잡한 계산이 될 것 같다.

그렇게 되면, 삼각형의 넓이를 구할 수 있는 가장 기본 방법은 밑변과 밑변에 수직인 높이를 구하는 방법인데, 밑변을 선분 PB로 잡아보자.
이제 높이를 구하기 위해선 점 Q와 선분 PB 사이의 거리를 구해야 하는데, 원주각의 성질에 의해 각 APB가 직각임을 알 수 있다.
따라서 점 Q와 직선 PB 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같다는 점을 알 수 있게 된다.

그럼, 선분 BP의 길이와 선분 PH의 길이만 구하면, 문제에서 구해야 하는 삼각형 BPQ의 넓이를 구할 수 있게 된다.



먼저 선분 BP의 길이는 삼각형 AOM과 삼각형 ABP가 닮은 삼각형이고, 닮음비는 1:2이므로, 선분 BP의 길이가 2sinθ임을 쉽게 파악할 수 있다.

삼각형 OME와 삼각형 QHE는 닮은 삼각형이고, 닮음비는 1:2 이므로, 선분 QE의 길이는 $\frac{2}{3}$이다.

선분 EH의 길이는 피타고라스의 정리를 이용하면, $\frac{4}{9}=4\sin^2\theta+\overline{\mathrm{HE}}^2$ 이므로, $\overline{\mathrm{HE}}=\frac{2}{3}\sqrt{1-9\sin^2\theta}$이다.

마찬가지로 삼각형 OME와 삼각형 QHE의 닮음비 1:2를 이용하여 선분 ME의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HE}}=\frac{1}{3}\sqrt{1-9\sin^2\theta}$ 이다.

따라서 선분 MH의 길이는 $\sqrt{1-9\sin^2\theta}$이고, 선분 AM의 길이는 $\cos\theta$이므로, 선분 PH의 길이는 선분 AP의 길이, $2\cos\theta$에서 선분 AM, 선분 MH의 길이를 뺀 값인 $\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}$로 구할 수 있다.

따라서, $f(\theta)=\left(\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}\right)\times\sin\theta$ 이고,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}}{\theta^3}\times\sin\theta$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta\times\sin\theta}{\left(\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta}\right)\theta^3}$$

이므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=4$이다.

30)

역함수가 존재하지만 증가함수인지 감소함수인지 알 수 없으므로 이 부분부터 파고 들어가보자.

$i)$ $f(x)$가 증가함수인 경우

n이 자연수, 즉 1 이상의 정수 이므로 구간 $[0,1]$에선 반드시 $g(x)=f(2x)$를 만족시킨다.

따라서 n의 값에 관계없이 항상

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$ 이다.

하지만 (나)조건에서

$\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 g(x)dx<0$($\because 3<\pi<4$이므로 $-\left(\pi-\frac{4}{\pi}\right)<0$)

인데 $f(0)=0$, $f(x)$는 증가함수라는 사실로부터 함수 $f(x)$는 구간 $[0,2]$에서 항상 0이상의 함숫값을 가질 수 밖에 없으므로, 정적분의 값이 0 미만이 나올 수 없다.

따라서 모순.

$ii)$ $f(x)$가 감소함수인 경우

(가) 조건의

'구간 $[0,n]$에서 $g(x)=f(2x)$' 에서 $g(n)=f(2n)$이고

'구간 (n,∞)에서 $g(x)\le f(4)$'에서 $\lim_{x\to n+}g(x)\le f(4)$인데

$\lim_{x\to n+}g(x)=g(n)$

($cf.$ $g(x)$는 미분가능한 함수이므로 연속함수이기도 하다.)

이므로 두 사실을 종합하면 $f(2n)=g(n)\le f(4)$이다.

즉, $f(2n)\le f(4)$ 이므로 $2n\ge4$, 즉 $n\ge2$이다.

($\because f$가 감소함수인 상황이므로)

또한 (가) 뒷 조건인 '구간 (n,∞)에서 $g(x)\le f(4)$ 이다.' 에 의하여 $f^{-1}(g(x))\ge4$임을 미리 인지하자.

($\because f$가 감소함수이면 f^{-1} 역시 감소함수이므로)

$i)$ $n=2$일 때

(다) 조건에 의하여

$$\int_0^4 f^{-1}(g(x))dx=\int_0^2 f^{-1}(g(x))dx+\int_2^4 f^{-1}(g(x))dx$$
$$=\int_0^2 2xdx+\int_2^4 f^{-1}(g(x))dx$$
$$=4+\int_2^4 f^{-1}(g(x))dx=12$$

로부터 $\int_2^4 f^{-1}(g(x))dx=8$임을 알 수 있다.

이 정적분의 피적분함수의 함숫값이 4 이상 ($\because f^{-1}(g(x))\ge4$)이고 적분구간의 길이가 2인데 x축 사이의 넓이가 8이려면 이 함수의 함숫값은 4로 고정되어야 한다.

따라서 구간 $(2,4)$에서 $f^{-1}(g(x))=4$, 즉 $g(x)=f(4)$인 상수함수임을 알 수 있다.

$ii)$ $n=3$일 때

$$\int_0^4 f^{-1}(g(x))dx=\int_0^3 2xdx+\int_3^4 f^{-1}(g(x))dx$$
$$=9+\int_3^4 f^{-1}(g(x))dx\ge9+4\ (\because f^{-1}(g(x))\ge4)$$

이므로 $12\ge13$으로 모순

$iii)\ n \geq 4$일 때

$\int_0^4 f^{-1}(g(x))dx = \int_0^4 2xdx = 16 \neq 12$으로 모순

따라서 $n=2$이고, (가)조건을 종합하면 $g(x)$는
구간 $[0,\ 2]$에서 $g(x)=f(2x)$ 이고
구간 $(2, 4)$에서 $g(x)=f(4)$ 인 상수함수임을 알 수 있다.

그리고 $g(x)$는 미분가능한 함수이므로, $g'(2)=0$이다. 따라서 $f'(4)$ 역시 0이다. 즉 $f'(4)=\frac{a\pi}{2}+b=0$임을 알 수 있다.

이제 정확한 값을 쓰지 않은 (나)조건으로 마무리 짓자.
(맨 처음 부분에서 (나)의 적분값이 음수라는 것만 사용했었음.)

$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = -\left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)$ 이므로

$\int_0^2 f(x)dx = -2\left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)$, 그리고

$\int_0^2 f(x)dx = \left[-\frac{2a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}bx^2\right]_0^2 = 2b + \frac{4a}{\pi} = -2\left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)$

에서 $a=2,\ b=-\pi$임을 알 수 있다.

(위의 $f'(4)=\frac{a\pi}{2}+b=0$ 와 연립시켜 구할 수 있다.)

구간 $(2, 4)$에서 $g(x)=f(4)=4b=-4\pi$이므로 $g(\pi)=-4\pi$다.

따라서 $10n+\frac{g(\pi)}{\pi}=16$이다.