42

2020학년도 수능(가형) 21번

실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 (t, e^t)에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)dt=m$이라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, b $(a<b)$가 존재한다.

ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.

ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

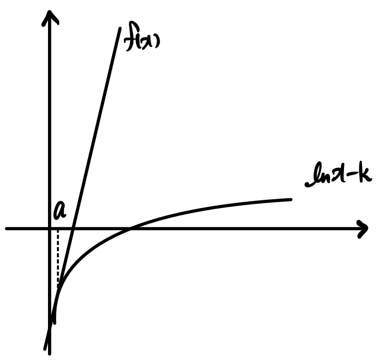
$f(x)=e^t(x-t)+e^t$
$=e^t x+(1-t)e^t$

$$y=|f(x)+k-\ln x|=\begin{cases} f(x)+k-\ln x & (f(x)+k\ge \ln x) \\ \ln x-\{f(x)+k\} & (f(x)+k<\ln x) \end{cases}$$

→ 양의 실수 전체 집합에서 미.가.

→ $y=f(x)$와 $y=\ln x-k$가 접 or 만나지 X

+) k가 최소이려면: $y=f(x)$와 $y=\ln x-k$가 접



→ $x=a$ 에서 접

42

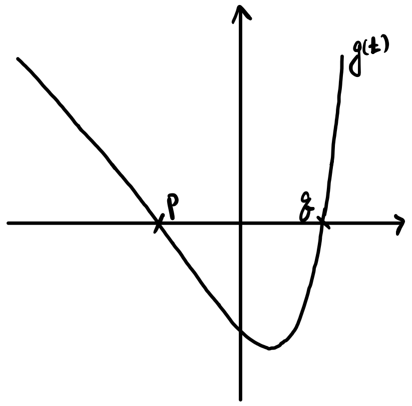
2020학년도 수능(가형) 21번

$f'(a) = e^t = \frac{1}{a} \longrightarrow a = e^{-t}$

$f(a) = e^t(a-t) + e^t = \ln a - k$

$\longrightarrow e^t \cdot e^{-t} - te^t + e^t = \ln e^{-t} - k$

$\therefore g(t) = (t-1)e^t - (t+1)$



ㄱ.

$p < t < q$ 에서 $g(t) < 0$ 이므로
$a = p$, $b = q$ 라 하면
$m < 0$ 이 자명하다.

ㄴ.

$g(c) = 0 \longrightarrow (c-1)e^c = c+1$

$g(-c) = -(c+1)e^{-c} + c - 1$
$= -(c-1)e^c \cdot e^{-c} + c - 1$
$= 0$

42

2020학년도 수능(가형) 21번

ㄷ.

$g'(t) = te^t - 1$

$\longrightarrow g(c) = g(-c) = 0, \quad g(0) \neq 0$

$\longrightarrow g(t) = 0$ 의 실근은 : $t = \pm c \quad (c \neq 0)$

$m = \int_\alpha^\beta g(t)dt$ 가 최소가 되려면

α : $g(t) = 0$ 의 음의 실근

$\beta = g(t) = 0$ 의 양의 실근

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} = \frac{\beta e^\beta}{\alpha e^\alpha} = \frac{\beta e^\beta}{-\beta e^{-\beta}} = -e^{2\beta}$$

$g(1) = -2$ 이므로 $1 < \beta$

$\therefore -e^{2\beta} < -e^2$ 이 성립한다.