39

2020학년도 6월 평가원(가형) 21번

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점] l

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$　③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

sol.)

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$\dfrac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=t$

$\therefore 1-\ln g(t)=t\{g(t)\}^2$

$l: y=ax$

$ag(a)=\dfrac{\ln g(a)}{g(a)}$, $a=\dfrac{1-\ln g(a)}{\{g(a)\}^2}$

$\therefore g(a)=\sqrt{e}$, $a=\dfrac{1}{2e}$

$1-\ln g(t)=t\{g(t)\}^2$

$\xrightarrow{\prime} -\dfrac{g'(t)}{g(t)}=\{g(t)\}^2+2tg(t)g'(t)$

$\therefore -\dfrac{g'(a)}{g(a)}=\{g(a)\}^2+2ag(a)g'(a)$

$\therefore g'(a)=-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$

$\therefore ag'(a)=-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$

39

sol₂)

$a = f'(g(a)) \longrightarrow ag'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$

: $f(g(t))$ 의 $t=a$ 에서의 변화율

$f'(g(t)) = t \longrightarrow g'(t) = \dfrac{1}{f''(g(t))}$

$\therefore a\cdot g'(a) = \dfrac{f'(g(a))}{f''(g(a))}$

$\dfrac{d}{dt}\ln f'(t) = \dfrac{f''(t)}{f'(t)} \xrightarrow{\text{구하는거}} t$에 $g(a)$ 대입

두 함수 $y=\ln x$, $y=ax$가 $x=g(a)$ 에서 접.

$\longrightarrow y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ 의 극댓값의 x좌표 $=g(a)$

$y' = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$\therefore g(a) = \sqrt{e}$

$f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$

$\dfrac{d}{dt}\ln f'(t) = -\dfrac{1}{t(1-\ln t)} - \dfrac{2}{t}\Big|_{t=g(a)=\sqrt{e}} = -\dfrac{4}{\sqrt{e}}$

$\therefore$ 답 $= -\dfrac{\sqrt{e}}{4}$