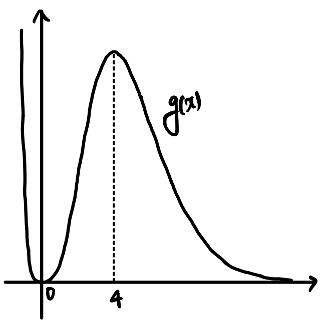
# 36 2019학년도 9월 평가원(가형) 30번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.<br>(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.<br>(다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다. |

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점] 30




sol.)

min(f(x)) = 0 : 한 점이 접 or 두 점이 접

if. $(\alpha, 0)$ 에서만 만난다

→ $g(x)=\alpha$ 교점 개수의 최댓값 : 3개

→ $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근 개수의 최댓값 : 3개

→ 가) 에 모순.

→ $f(x)$는 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ 에서 접한다.

$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$g(x)$ : $x=0$ 에서 극소 : 고려대상 X

$\therefore \lim_{x\to 0+} f'(g(x)) = \lim_{x\to 0+} f'(x) > 0$

가) 조건을 만족시키기 위해선
$g(x)=\alpha$, $g(x)=\beta$ 의 실근의 개수가 각각 $\begin{matrix}1,3\\3,1\end{matrix}$ 中 1 이 돼야한다.

if) $g(x)=\alpha$ 교점 개수가 3개라면

$\longrightarrow 0<\alpha<g(4)<\beta$

$\longrightarrow \lim_{x\to 0+} f'(x) < 0$ : 모순

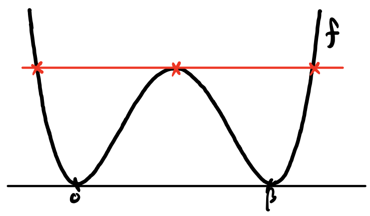
$\longrightarrow g(x)=\alpha$ 교점 개수는 1개, $g(x)=\beta$ 교점 개수는 3개

$\therefore 0=\alpha<\beta<g(4)$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$

if) $f(x)$의 극댓값이 8일 때

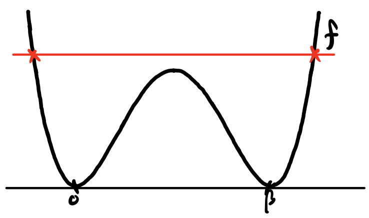
$g(x) =$ 음수 : 존재 X
$= \frac{\beta}{2}$ : 3개 (∵ $g(x)=\beta$ 개수가 3개)
$=$ 양수 $>\beta$ : 3개 (단, $\beta<$ 양수 $<g(4)$)




if) $f(x)$의 극댓값 $>8$

$g(x) =$ 음수 : X
$=$ 양수 : 최대 3개

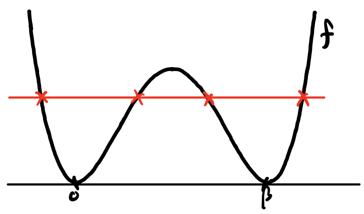
$\longrightarrow$ X



# 36



if) $f(x)$의 극댓값 $< 8$




$g(x) =$ 음수 : X

$=$ 양수 $< \frac{\beta}{2}$ : 3개

$= \frac{\beta}{2} <$ 양수 $< \beta$ : 3개

$=$ 양수 $> \beta$ : 적어도 1

$\longrightarrow$ X

$\therefore f(x)$ 극댓값 $= 8$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

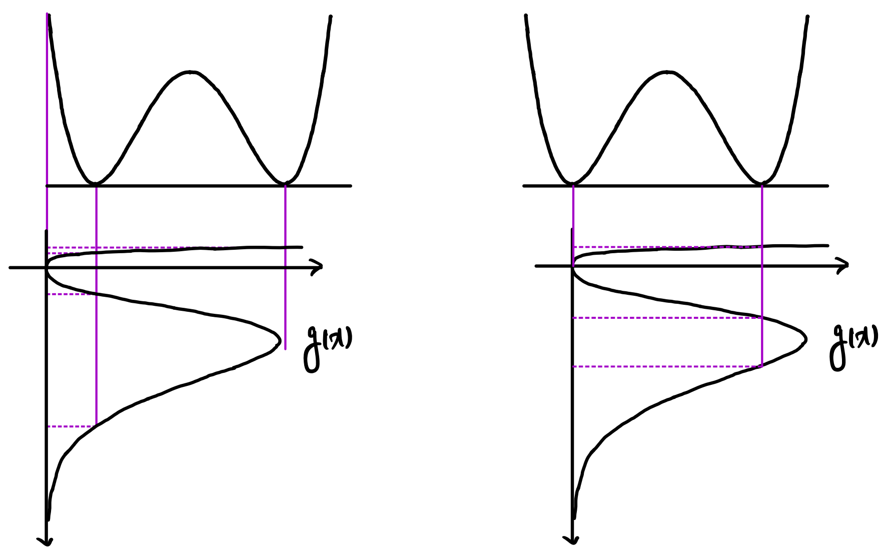
$\therefore f'(5) = 30$

Sol2)

⋮

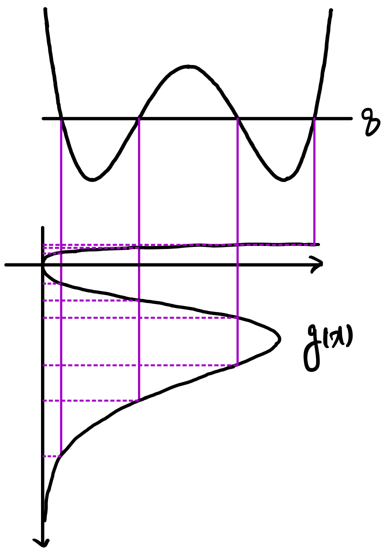
$f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

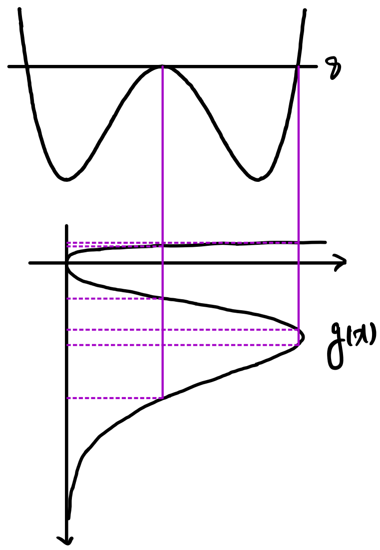
$g(x)$의 그래프를 적절히 회전시켜서 정의역처럼 생각해보자.



합성함수가 그려지는 과정을 살펴보면 $\alpha=0$이 되어야만 나) 조건을 만족시킨다.

$\because$ $\alpha, \beta \neq 0$ 이면 $x=0$ 에서 극대를 가지기 때문




그림을 그려보니 $f(x)$의 극댓값이 $y=8$이 되어야 조건 만족.

$\therefore \beta=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

$\therefore f'(5)=30$