23학년도 6월 평가원 공통

개념화 목록들

현의 일부분의 길이를 구할 때
→ 할선정리

출발 지점으로 돌아온다.
→ 변위 = 0

절댓값이 등장 → 0 이상일 때와 0 미만일 때로 케이스 분류!

$f(ax)$는 $f(x)$를 a배 압축한 함수이다.

$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6 → 부등호를 반대로

$f(x) =$ vs $g(x) =$

경우의 수가 생기면 케이스 분류!

ㄱ,ㄴ,ㄷ에서는 식과 그래프를 모두 쓴다.

경우의 수가 생기면 케이스 분류!

규칙이 있을거란 믿음

최고차항의 계수를 줄 때

극대, 극소가 나오면 → 미분계수 0을 사용

정적분으로 정의된 함수의 미분

이차함수와 삼각함수가 출제 → 대칭성

자연수/정수가 되도록 → $= k$

무엇에 대해 셀 것인가?

극한값이 존재 → 인수의 개수

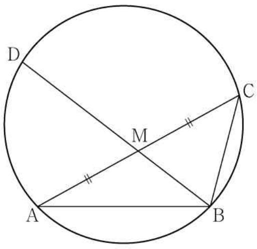
유리화

이차함수와 삼차함수의 식 작성

상수 0과 0으로 수렴하는 것의 구분

극한문제에서 값을 모르는 게 나왔다.
→ 케이스 분류

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

답 : ③

현의 일부분의 길이를 구할 때 → 할선정리
BD라는 현에서 BM만큼 잘린 MD의 길이를 묻고 있다. 최우선으로 생각해야 할 것은 할선정리이다. 할선정리의 증명이 삼각형의 닮음이니 삼각형의 닮음과도 같은 말이다.

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

답 : ⑤

출발 지점으로 돌아온다. → 변위 = 0

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $a_5\times a_7<0$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

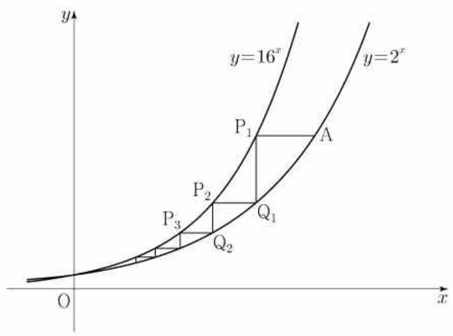
① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

답 : ③

절댓값이 등장 → 0 이상일 때와 0 미만일 때로 케이스 분류!
(나) 조건을 해석하면 $\|a_6\|$이 나온다. $\|a_6\| = \begin{cases} a_6 & (a_6 \geq 0) \\ -a_6 & (a_6 < 0) \end{cases}$ 케이스를 분류해서 해결해야 한다.

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



답 : ①

$f(ax)$는 $f(x)$를 a배 압축한 함수이다.

$16^x = 2^{4x}$ 이므로 $f(x)=2^x$라 하면
$16^x = f(4x)$이다.

$f(4x)$는 $f(x)$를 y축 쪽으로 4배 압축한 함수이다. (좌우로만 압축, 상하로 압축X)

ex) $y=16$과 만나는 x좌표는 각각 $x=1$과 $x=4$이다. 4배 차이이다.
ex2) 같은 이유로 $\sin 2x$는 $\sin x$를 2배 압축한 함수이기 때문에 주기가 절반이다.

$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6
→ 부등호를 반대로

이런 발문의 해석법은 다음과 같다.

$n=6$일 때는 조건식을 만족시키므로
$x_6 = \frac{1}{64} < \frac{1}{k}$이다.

$n=5$일 때는 조건식을 만족시키지 못하므로
$x_5 = \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k}$ 이어야 한다.
(부등호를 반대로)

따라서, $\frac{1}{64} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{16}$ 이다.
k의 개수는 $64-16=48$이다.

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답 : ④

$f(x)=$ vs $g(x)=$

$f(x)$와 $g(x)$ 두 함수가 주어진 문제의 경우, $f(x)=$꼴로 정리할지, $g(x)=$꼴로 정리할지 선택해야 한다.

ㄱ,ㄴ,ㄷ에서 $f(x)$를 묻고 있으므로 우리는 $f(x)=$꼴로 정리를 해야 한다.

$f(x)=\begin{cases} -g'(x)\ (x<0) \\ g'(x)\ (x\ge 0) \end{cases}$ 로 정리를 하자.

경우의 수가 생기면 케이스 분류!

ㄱ에서의 $g'(0)=0$만으로는 $g(x)$가 가질 수 있는 개형이 여러 가지이고 그렇기에 $f(x)$의 개형 또한 여러 가지이다.

하나로 결정되어 있지 않기 때문에 풀 수 없다. -> X
경우의 수가 생기면 케이스 분류! -> O

ㄱ,ㄴ,ㄷ에서는 식과 그래프를 모두 쓴다.

ㄷ을 해결하려면 $f(x)$의 식을 세워야 한다.

ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제는 대부분 식과 그래프를 모두 쓰도록 출제되고 있다.

ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제에서 식이 막히면 그래프로, 그래프가 막히면 식으로 풀 준비가 되어있어야 한다.

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

답 : ②

경우의 수가 생기면 케이스 분류!

$a_3=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}$가 0 이하인지 0 초과인지가 k값에 따라 달라지게 된다.

하나로 결정되어 있지 않기 때문에 풀 수 없다. -> X
경우의 수가 생기면 케이스 분류! -> O

$k=1$일 때와 $k \ge 2$일 때로 케이스를 분류해서 해결한다.

규칙이 있을거란 믿음

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

답 : 13

최고차항의 계수를 줄 때

발문에서 최고차항의 계수를 줄 때의 마음가짐은 다음과 같다.

① 함수의 개형이 어느정도 정해졌구나

: 최고차항의 계수가 양수인지 음수인지 안 것 만으로도 개형 후보는 많이 압축된다.

② 식 작성이 용이해졌구나

: 최고차항의 계수를 구해야 하는 일이 없어졌다.

③ $\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$

: 삼차함수의 극대값-극솟값 = $\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$

(a는 최고차항의 계수, α,β는 극값을 가지는 x좌표이다.)

최근들어 $\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$ 이 공식을 사용해야 하는 경우가 늘어났다.

특히 최고차항의 계수가 1이 아닐 때는 이 공식을 쓸 가능성이 높으니 염두하자.

정적분으로 정의된 함수의 미분

$I(x)=\int_{g(x)}^{h(x)}f(t)dt$라 할 때,

$I'(x)=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$이다.

극대, 극소가 나오면 → 미분계수 0을 사용

첫 번째) 미분계수 = 0 (미분가능할 때)
두 번째) 도함수의 부호변화 체크

따라서, $g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|=0$의 근이 $x=1,x=4$이다.

이차함수와 삼각함수가 출제 → 대칭성

이차함수와 삼각함수가 출제될 때, 최우선으로 고려해야 할 것은 대칭성이다.

$x=1,x=2$와 $x=4,x=5$를 서로 대칭이 되도록 배치해보자.

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

답 : 426

자연수/정수가 되도록 $\rightarrow\ = k$

$4\log_{64}(\frac{3}{4n+16}) = k$ (k는 정수) 라고 놓는 것이 이 유형 풀이의 시작이다.

무엇에 대해 셀 것인가?

$4\log_{64}(\frac{3}{4n+16}) = k$ (k는 정수) 라 놓으면 이는 n에 대해 셀 것이라는 표현이다.
$n = 1, 2, 3\cdots$을 넣어보는 것이다.

$n = \frac{3}{2^{\frac{3k}{2}+2}} - 4$ 라 놓으면 이는 k에 대해 셀 것이라는 표현이다.
$k = 1,2,3\cdots$을 넣어보는 것이다.

그리고 이 문제는 k에 대해 세는 것이 압도적으로 편하다.

22. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

답 : 19

극한값이 존재 → 인수의 개수

$\dfrac{0}{0}$꼴의 극한에서 극한값이 존재하는 경우 :

① 분모와 분자의 인수 개수가 같다.

② 분자가 분모보다 인수 개수가 많다.
(이 경우엔 극한값은 0이 된다.)

t가 -3과 6이 아닐 때는 ① 또는 ②를 만족시켜야 한다.

대부분 ①의 경우가 많이 나왔다.
그러나 230622는 ②의 경우를 출제했다.

유리화

킬러 문제에서 유리화를 적용해야 하는 기출문제는 거의 없었다.

유리화를 떠올리지 못한 사람들은 내가 몰랐던 부분이 6평 때 나와서 오히려 다행이라고 생각해야 한다. 이제 수능에 유리화가 나오면 풀 수 있게 되었다.

이차함수와 삼차함수의 식 작성

<최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-3)=0$일 때 식 작성>

$f(x) = (x+3)(x-k)$
(단, $k=-3$또는$k\neq -3$)

그리고 $k=3$일 때와 $k\neq -3$ 일때로 케이스를 분류해서 해결한다.

<최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-3)=0$일 때 식 작성>

$f(x) = (x+3)(x^2+ax+b)$
$x^2+ax+b=0$의 두 근 중에서 -3이 있을 때와 없을 때로 케이스를 분류해서 해결한다.

주의) $f(x) = (x+3)(x-a)(x-b)$
이렇게 작성하면 안 된다.
$x^2+ax+b=0$이 허근을 가질 경우,
$(x-a)(x-b)$형태로 인수분해가 되지 않기 때문이다. (a,b가 유리수일 때)

상수 0과 0으로 수렴하는 것의 구분

상수 0은 지워도 된다. 하지만 0으로 수렴하는 것은 함부로 지우면 안 된다.
분모에 존재하는 $\sqrt{|g(x)|+g(t)^2}+|g(t)|$ 에서 $\lim_{x\to -3}$이므로 $|g(x)|$는 0으로 수렴한다.
$|g(t)|=0$일 경우, 이 때의 0은 상수이므로 지울 수 있다. 그래서 $\sqrt{|g(x)|}$만 남게 된다.
하지만 이후 $g(x)$도 0으로 수렴한다고 해서 $\sqrt{|g(x)|}$의 $g(x)$마저 지우면 안된다. 0으로 수렴하는 것과 0인 것은 다르기 때문이다.

극한문제에서 값을 모르는 게 나왔다. → 케이스 분류

유리화 후 분모에 $\sqrt{|g(x)|+g(t)^2}+|g(t)|$ 의 $|g(t)|$가 0인지 아닌지에 따라 계산이 많이 달라진다.

이렇게 극한문제에서 값을 모르는 게 나오면
0일 때와 아닐 때로 케이스를 분류해야 한다.