19

2016학년도 수능(B형) 30번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 35

sol.1)

$f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$

$x \le b$ 일 때, $f'(x) = 2a(x-b)$

$2a(x-b) = \sqrt{4-2a(x-b)^2-2c}$

$2a(2a+1)(x-b)^2+2c-4=0$

$\therefore c=2,\ a=0$ or $a=-\frac{1}{2}$ ($\because$ 항등식)

i) $a=0$일 때

$f(x)=2$ $(x \le b)$

$f(0)=0$ $(\because \int_0^0 = 0)$

$\longrightarrow b<0$

$\longrightarrow$ 구간 $[b,0]$ 에서 연속이 되려면

평균변화율 $\frac{2}{b}$인 점이 구간 $(b,0)$에서 존재 ($\because$ 평균값정리)

but. f'는 모든 구간에서 ≥ 0.

$\therefore$ 모순

19

ii) $a=-\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2 \quad (x\le b)$

$b<0$일 때 : i)과 마찬가지로 모순

$\longrightarrow b\ge 0,\ f(0)=0=-\frac{1}{2}\cdot b^2+2$

$\therefore b=2$

$\therefore f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$ —— $\because$ $f(x)>2$: $\sqrt{\text{음수}}$: X

$f(x)<2$: 감소함수 : X

$\therefore \int_0^6 f(x)dx=\frac{32}{3}$

$\therefore p+q=35$

sol2) 가 조건 없이 미분방정식으로 풀기

$\frac{d}{dx}f(x)=\sqrt{4-2f(x)}$

$$\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}=1$$

$$\int\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}dx=\int 1\,dx$$

$-\sqrt{4-2f(x)}=x+C$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x^2+C^2+2Cx)+2$

$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\ (f(x)\ne 2)\ (\because f(0)=0)$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x \le 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases} \longrightarrow (가) \text{ 과 조건}$$

*참고: 미분 방정식

$$\underbrace{\int \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}dx = \int -\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}_{t=4-2f(x) \to f(x) = -\frac{x-4}{2},\ dx = -\frac{1}{2}dt} = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{t} = -\sqrt{t} = -\sqrt{4-2f(x)}$$