이제 물체의 운동을 분석하기 위해서 ‘빠르기’에 대해 알아보도록 하죠.

일상에서와는 다르게, 빠르기를 의미하는 물리량에는 두 가지가 있습니다.

첫 번째, **속도**는 시간에 대한 위치의 변화율입니다.

물리1 수준으로 적자면 단위 시간당 변위 정도가 되겠네요.

위치가 벡터이기 때문에 변위도 벡터이고, 속도도 벡터가 됩니다.

두 번째, 속력은 시간에 대한 이동거리의 변화율입니다.

역시 쉽게 적으면 단위 시간당 이동거리라고 볼 수 있습니다.

이동거리가 스칼라이기 때문에 속력은 스칼라입니다.

아시다시피, 변화율에는 평균변화율과 순간변화율이 있죠. (고등학교 미분)

그래서 우리가 사용하는 속도와 속력에도 각각 두 가지가 있습니다.

그렇게 총 네 가지 물리량이 있는 것이죠.

먼저, 가장 이해하기 편한 **평균속력**에 대해서 알아보죠.

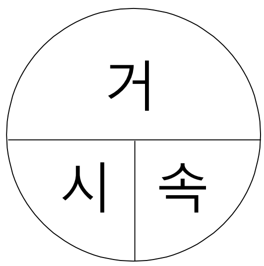
정의부터 이야기하자면, 평균속력은 시간에 대한 이동거리의 평균변화율입니다.

수식으로 쓰면, “시간 $\Delta t$ 동안의 이동거리가 $\Delta s$일 때, 평균속력 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$“죠.

예시를 들어봅시다. 철수네가 자동차를 타고 서울에서 부산까지 이동했다고 합시다.

출발한 시각은 12시였고 도착한 시각은 5시입니다.

두 도시의 직선거리는 정확히 $300\,\mathrm{km}$이고 (실제는 아닙니다)




미터기에 찍혀있는 주행거리는 정확히 $400\,\mathrm{km}$라고 합시다.

이때 $\Delta s = 400\,\mathrm{km}$이고 $\Delta t = 5\,\mathrm{h}$이므로, (시간은 hour)

평균속력 $\bar{v} = \dfrac{400\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{h}} = 80\,\mathrm{km/h}$입니다. 보통 시속 $80\,\mathrm{km}$라고 이야기하는 속도죠.

이런 문제들은 중학교 때 실생활 문제로 많이 풀어보기도 했고,

수Ⅱ 분수방정식의 활용에도 등장하기 때문에, 계산이야 다들 잘 할 수 있을 겁니다.

우리는 좀 더 물리량의 의미에 대해 탐구해 보자고요.

철수네 자동차의 속력이 항상 $80\mathrm{km/h}$로 일정하지는 않았을 것입니다.

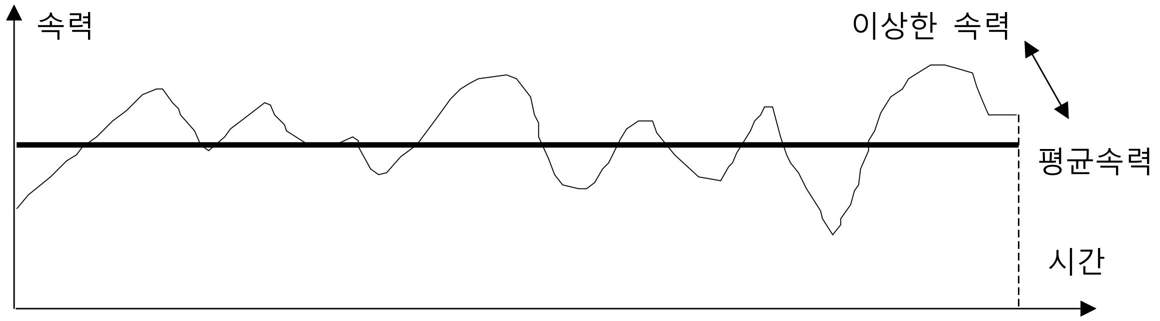
2시간 반 동안 정지해있다가 출발해서 $160\mathrm{km/h}$의 속력으로 달렸을 수도 있죠.

$70\mathrm{km/h}$의 속력과 $90\mathrm{km/h}$의 속력 사이를 왔다 갔다 했을 수도 있고요.

뭐, 어떻게 운동했던지 $80\mathrm{km/h}$의 속력으로 달린 것과 같은 거리를 이동한 겁니다.

따라서 속력이 쭉 $80\mathrm{km/h}$인 것, 즉 1시간 당 $80\mathrm{km}$를 가는 속력과 ‘동등’합니다.

평균이란 이런 의미입니다.




위의 곡선처럼 속력이 시간에 따라서 복잡하게 변한다면,

이를 ‘총 이동거리’가 동등한 ‘평균속력’으로 바꾸면 계산에 편리할 겁니다.

평균속력의 정의 $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$에서 양변에 $\Delta t$를 곱해주면, 이동거리 $\Delta s=\overline{v}\Delta t$를 얻습니다.

“$\text{거리}=\text{속력}\times\text{시간}$”을 좀 더 정확하게 적은 표현이라고 볼 수 있겠죠 ^^

물리에서는 애매한 표현을 사용하면 안 됩니다. 상황이 조금만 달라져도 틀릴 수가 있거든요.

“$\text{거리}=\text{속력}\times\text{시간}$”이라고만 쓰면 속력이 변하는 경우에는 통하지 않죠.

“$\text{이동거리}=\text{평균속력}\times\text{걸린 시간}$”으로 써야 정확합니다.

거리도 아니고 이동거리, 속력도 아니고 평균속력, 시간도 아니고 걸린 시간(시간 간격)입니다.

그렇지만 항상 평균속력만을 이용할 수는 없겠죠?

평균속력은 항상 두 시점 사이에서 정의되기 때문에

구간에서의 빠르기를 대표하는 물리량으로는 이용할 수 있겠지만,

어느 한 시점에서의 빠르기를 대표하는 물리량으로는 이용할 수가 없습니다.

어느 한 시점에서의 빠르기를 알아보고 싶으면 새로운 물리량을 정의해야 합니다.

이를 **순간속력**이라고 합니다.

순간속력은 시간에 대한 이동거리의 순간변화율로 정의합니다.

식으로 쓰면, $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$가 됩니다. 미분기호를 동원하면 $v=\frac{ds}{dt}$가 되겠죠?

따라서 시각 $t$에서의 총 이동거리가 $s(t)$일 때, ($s=f(t)$라면)

시각 $t_0$에서의 속력 $v(t_0)=\frac{ds}{dt}(t_0)$가 됩니다. ($\frac{ds}{dt}=f'(t)$입니다)

"$거리=속력\times 시간$"의 속력이 평균속력이라면,

자동차의 계기판이 가리키는 속력이 바로 순간속력입니다.

보통 그냥 '속력'이라고 하면 '순간속력'을 가리키는 말입니다.

당연하지만 실제로는 속력을 이용해서 빠르기를 이야기하겠죠.

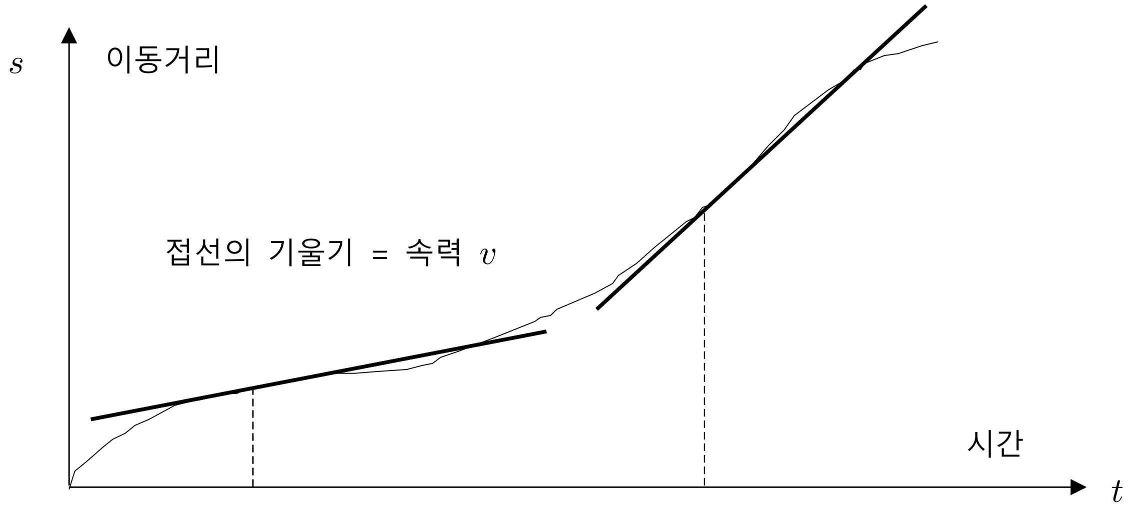
하지만 물리1이라는 과목 특성상 미적분을 그대로 넣으면 안 되다보니.......

속도랑 관련지어서 이야기하거나, 그래프의 기울기로 이해하게 됩니다.

속도는 속력 뒤에 이어지니 그때 살펴보도록 하고 지금은 그래프를 이해해봅시다.

$v=\frac{ds}{dt}$이기 때문에, 이동거리-시간 그래프, 즉 $s-t$ 그래프에선

접선의 기울기가 $v$가 됩니다. 그래프 모양만 한 번 보고 넘어갑시다.




심플하죠?

고속도로라면 저 접선의 기울기가 특정 값보다 커지게 되면 벌금을 물게 되는 거죠.

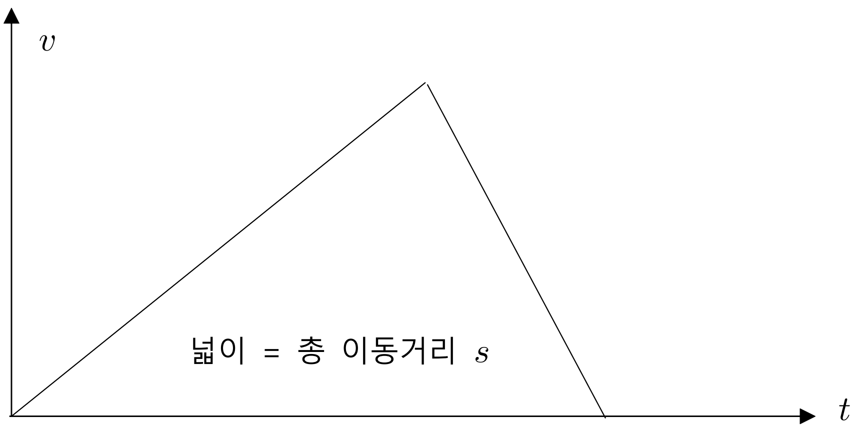
벌금은 평균속력이 아니라 순간속력으로 매겨야하니까요.

이제 속력의 정의를 조금 고쳐보면, $v = \dfrac{ds}{dt}$에서 $ds = v\,dt$이므로 $s = \displaystyle\int v\,dt$가 됩니다.

따라서 이동거리는 속력을 시간에 대해 적분해서 얻을 수 있습니다.

물론 이를 실제로 계산하는 것은 대학교 미적분학 내용이므로,

물리1 수준에선 그래프 아래의 넓이로 생각합니다.




※ 앞에서 이동거리는 $\Delta s$라고 하였으니, $s$는 0초부터의 총 이동거리로 이해하면 됩니다.

속력은 다 정리를 해보았으니, 이제 속도에 대해서 알아봅시다.

<u>시간에 대한 위치의 평균변화율</u>을 **평균속도**라고 합니다.

수식적으로 쓰면, “시간 $\Delta t$ 동안의 변위가 $\Delta s$일 때, 평균속도 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$“입니다.

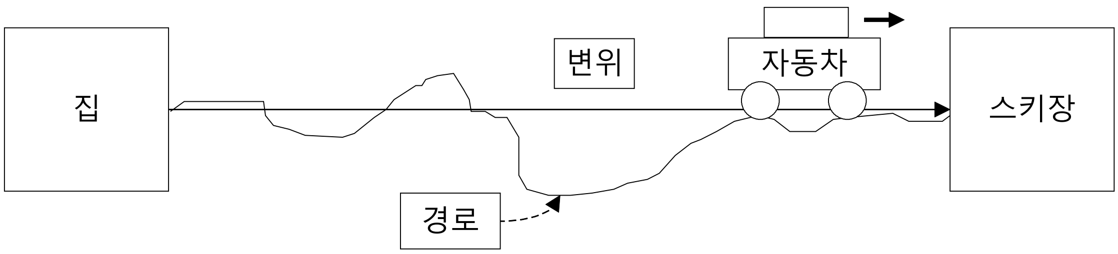
종종 $\dfrac{s}{t}$라고 쓰는 경우도 있으나, 그렇다고 평균속도가 $\dfrac{\text{위치}}{\text{시각}}$인 것은 아닙니다.

다만 시공간 상의 원점이 $(0,\ 0)$인 경우에는 두 식이 같아질 뿐입니다.

속도와 속력은 딱 변위와 이동거리만큼 다릅니다. 예제를 들어봅시다.

| |
|---|
| **예제 1)** 12시에 집을 나선 철수네 가족은 자동차를 타고 2시 반에 동쪽으로 $150\,\mathrm{km}$ 떨어진 스키장에 도착하였다. 주행 거리는 $250\,\mathrm{km}$이었을 때, 철수네 가족이 집에서 스키장까지 이동하는 동안 자동차의 평균속도는? |

이 상황을 그림으로 그려보면 다음과 같습니다.




여기서 자동차의 각 순간의 속도라거나 운동한 경로, 그리고 속력은 의미가 없습니다.

즉, 자동차의 계기판이나 실제 주행 거리는 의미가 없다는 말입니다.

평균속도의 정의(변위 / 걸린 시간)를 잘 생각해보세요.

동쪽을 (+) 방향으로 두면 (스키장의 위치) $-$ (집의 위치)는 $+150\,\mathrm{km}$가 됩니다.

따라서 자동차의 변위는 $+150\,\mathrm{km}$입니다.

정의에 따라, 자동차의 평균속도 $\overline{v} = \dfrac{+150\,\mathrm{km}}{2.5\,\mathrm{h}} = +60\,\mathrm{km/h}$가 됩니다.

**예제 2)** 원점에 정지해 있던 물체가 0초일 때 출발하여 5초일 때 $+10\,\mathrm{m}$ 지점에 있었고 10초일 때 $-10\,\mathrm{m}$ 위치에 있었다. 이때 0~5초, 5~10초, 0~10초 동안 물체의 평균속도는?

0~5초 동안의 평균속도는 변위가 $+10\,\mathrm{m}$ 이므로 $\frac{+10\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} = +2\,\mathrm{m/s}$입니다.

5~10초 동안의 평균속도는 변위가 $(-10\,\mathrm{m}) - (+10\,\mathrm{m}) = -20\,\mathrm{m}$ 이므로

$\frac{-20\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} = -4\,\mathrm{m/s}$입니다.

0~10초 동안의 평균속도는 변위가 $-10\,\mathrm{m}$ 이므로 $\frac{-10\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -1\,\mathrm{m/s}$입니다.

평균속력에서와 마찬가지로, 평균속도 역시 $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 이므로 변위 $\Delta s$를

$\Delta s = \overline{v}\Delta t$로 구할 수 있습니다.

**예제 3)** 물체의 평균속도가 $+2\,\mathrm{m/s}$일 때, 4초 동안의 변위는?

평균속도가 그냥 주어진다면 문제도 아닙니다.

4초간의 변위 $\Delta s = +2 \times 4 = +8\,\mathrm{m}$ 로 계산하면 끝납니다.

그렇다면 조금씩 문제를 꼬아볼까요?

**예제 4)** 처음 2초 동안 물체의 평균속도가 $+2\,\mathrm{m/s}$이고, 나중 2초 동안 물체의 평균속도가 $+3\,\mathrm{m/s}$이다. 처음 위치가 $+2\,\mathrm{m}$ 지점일 때, 4초 후의 위치는?

물체의 평균속도가 중간에 변하는 경우는

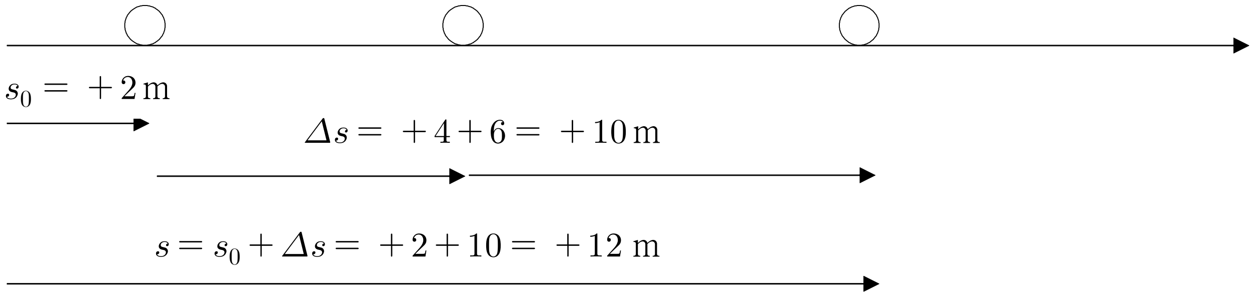
$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = \overline{v_1}\Delta t_1 + \overline{v_2}\Delta t_2$로 계산하면 됩니다.

대입해서 계산을 해보면 4초간의 변위 $\Delta s = 2\times 2 + 3\times 2 = +10\,\mathrm{m}$ 입니다.

처음 2초 동안 (+)방향으로 $4\,\mathrm{m}$를 이동하고, 그 다음 2초 동안 (+)방향으로 $6\,\mathrm{m}$를 이동했죠.

따라서 나중 위치 $s = s_0 + \Delta s = +2 + 10 = +12\,\mathrm{m}$ 입니다.

벡터를 이용해서 상황을 이해해봅시다.




위처럼 화살표 그림을 그리면 좀 더 물리량의 의미가 명확해지죠?

이 문제는 계산이 간단하지만, 복잡한 경우에도 화살표를 이용하면 쉽게 이해할 수 있습니다.

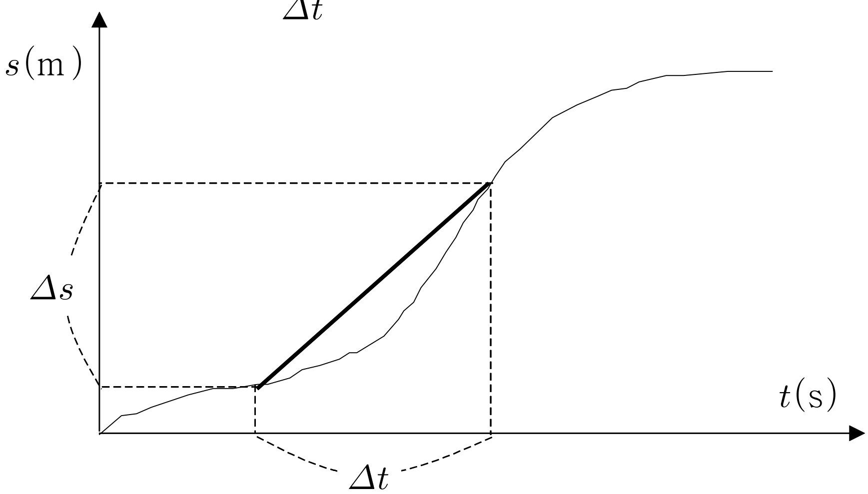
여기서 $\Delta s$의 부호가 음수라면, 화살표의 방향을 반대로 해서 더하면 되겠죠.

하지만 문제에서 평균속도가 얼마인지 대놓고 주어지는 경우는 별로 없습니다.

대부분의 경우, $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$공식을 이용해서 평균속도를 구하게 됩니다.

하지만 아직은 이 공식을 쓰지 맙시다. ^^;

이제 평균속도 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$를 그래프를 이용해서 해석해봅시다.




이것은 물체의 위치($s$)를 시간($t$)에 따라 나타낸 $s-t$ 그래프입니다.

이 그래프에서 굵은 선으로 그어진 선분의 기울기가 바로 $\Delta t$ 동안의 평균속도입니다.

그 다음 어떻게 될지 예상이 되시죠? 이제 $\Delta t$를 0으로 보낼 겁니다.

그러면 시간에 대한 위치의 순간변화율을 구할 수 있습니다.

이를 **순간속도**라고 하고, 보통 속도라고 하면 순간속도를 일컫습니다.

이제 순간속도나 순간속력이라는 단어 대신 속도나 속력이라는 단어를 계속 사용하겠습니다.

속력에서와 마찬가지로, 속도 역시 미분기호를 이용해서 나타냅니다.

따라서 시각 $t$에서의 위치가 $s(t)$일 때, ($s = f(t)$라면)

시각 $t_0$에서의 속도 $v(t_0) = \dfrac{ds}{dt}(t_0)$가 됩니다. ($\dfrac{ds}{dt} = f'(t)$입니다)

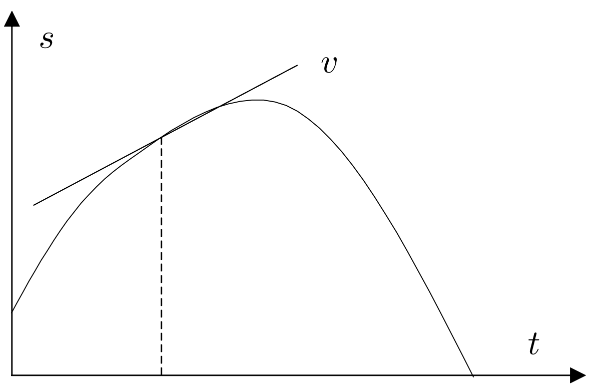
※ 참고로 고등학교 수Ⅱ의 표현에 따르면, (분명히 배웠습니다.)

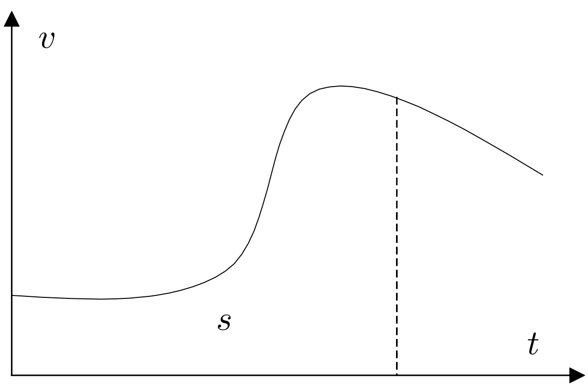
물체의 위치 $s = (x,\ y)$일 때, 물체의 속도 $v = \dfrac{ds}{dt} = (\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt})$가 됩니다.

역으로, 속도를 시간에 대해서 적분하게 되면 $ds = v\,dt$에서 $s = \displaystyle\int v\,dt$를 얻습니다.

$s$가 이동거리가 아니라 변위, $v$가 속력이 아니라 속도라는 점을 빼면 식이 같죠.

물론 물리Ⅰ에서 미적분을 계산할 순 없으니, 미분은 기울기로 적분은 넓이로 이해합니다.



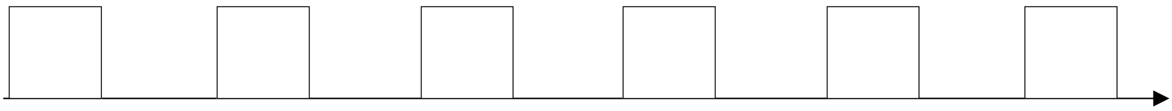



그리고 미적분을 사용하지 않으면, 우리가 구할 수 있는 기울기와 넓이는 한정되어있죠.

그래서 물리Ⅰ에 등장하는 운동의 첫 번째 형태인 **등속 직선 운동**이 등장하게 됩니다.

이때, 등속 직선 운동은 **등속도 운동**이라고도 합니다.

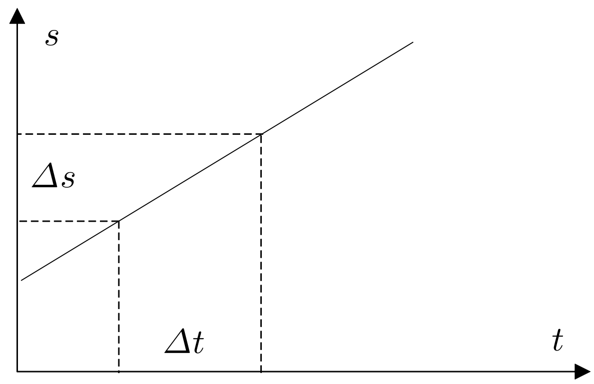
운동하는 속도가 일정하면 방향이 일정해서 경로가 직선이 되기 때문입니다.

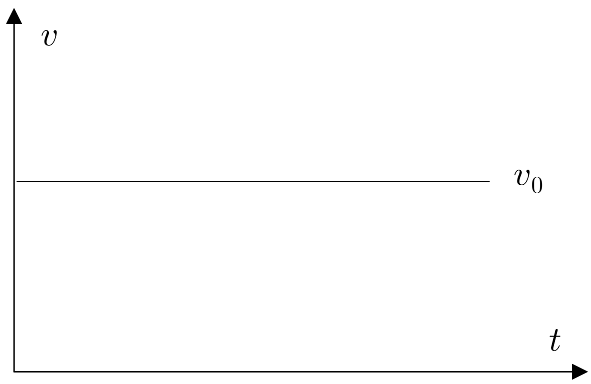


왜 등속도 운동인가하면, 등속도 운동하고 있을 때에는 평균속도와 속도가 같기 때문입니다.

따라서 평균속도를 구하는 식을 이용해서 각 시점에서의 속도를 구하는 것이 가능합니다.

그 이유는 그래프를 그려보면 쉽게 알 수 있습니다.




물체의 속도가 계속 일정하다면, 물체의 위치는 시간에 대한 1차함수가 됩니다.

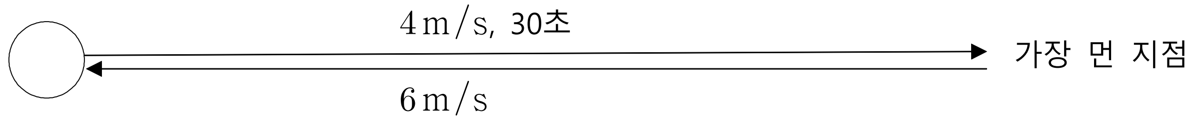
$v = v_0 \rightarrow s = v_0 t + s_0$

1차함수에서는 직선의 기울기(평균변화율) = 미분계수(순간변화율)이기 때문에

등속도 운동하는 물체의 평균속도를 구했다면, 그것이 곧 (일정한) 속도가 되는 것입니다.

| |
|---|
| **예제 5)** 원점에서 출발한 물체가 30초 동안 $4\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 등속도 운동하다가 반대 방향으로 $6\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 등속도 운동하여 다시 원점에 도달하였다. 이때 물체의 이동거리, 변위, 평균속력, 평균속도는? |

물체의 경로를 대략적으로 도시해봅시다.




물체가 가장 먼 지점까지 갔다가 다시 돌아오는 상황이네요.

이동거리는 경로의 길이니까, 원점과 가장 먼 지점 사이의 거리를 2배하면 됩니다.

처음 30초 동안의 이동거리가 $4 \times 30 = 120\,\mathrm{m}$ 이므로, 총 이동거리는 $240\,\mathrm{m}$.

이제 물체가 원점을 출발한 후 다시 원점으로 돌아올 때까지의 평균속력을 구해봅시다.

이동거리는 알고 있으니 시간을 구하면 되는데

갈 때 걸린 시간은 30초이지만 올 때 걸린 시간은 아직 미지수입니다.

올 때 속력(= 속도의 크기)이 $6\,\mathrm{m/s}$이므로 걸린 시간은 $\dfrac{120\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{m/s}} = 20\,\mathrm{sec}$입니다.

이제 평균속력을 구하면, $\dfrac{240\,\mathrm{m}}{30 + 20\,\mathrm{sec}} = 4.8\,\mathrm{m/s}$. (총 걸린 시간 = 50초)

여기서 속력 = 속도의 크기라는 것을 이용하였습니다.

속력의 의미는 원래 시간에 대한 이동거리의 변화율이지만

이를 다시 보면 곧 속도의 크기가 됩니다. 그래서 속력을 속도의 크기로 정의하기도 합니다.

※ 미소 시간 $dt$ 동안 미소 변위의 크기 $|d\boldsymbol{s}|$는 미소 이동거리 $ds$와 같습니다. 그 비도 마찬가지죠.

다만 평균속력은 항상 평균속도의 크기인 것은 아닙니다. 주의해야합니다.

이제 변위는 $s_0 - s_0 = 0\,\mathrm{m}$ 이고, 평균속도는 정의에 따라 $0\,\mathrm{m}/50\,\mathrm{sec} = 0\,\mathrm{m/s}$입니다.

평균속도의 크기와 평균속력의 값이 다르죠?

이는 운동하는 중간에 물체의 **운동방향**이 반대로 바뀌기 때문에 일어납니다.

물체의 운동방향이 일정하다면 평균속도의 크기 = 평균속력이 됩니다.

운동방향이란? 속도의 방향을 의미합니다.

등속도 운동이 물리Ⅰ에 등장하는 운동의 첫 번째 형태라면, 당연히 두 번째 형태도 있겠죠.

바로 속도가 시간에 따라 일정하게 변하는 운동, **등가속도 운동**입니다.

등가속도 운동에 대해서 이야기하기 위해서는 먼저 **가속도**를 정의해야 합니다.

가속도란 시간에 대한 속도의 변화율, 단위 시간 당 속도의 변화량입니다.

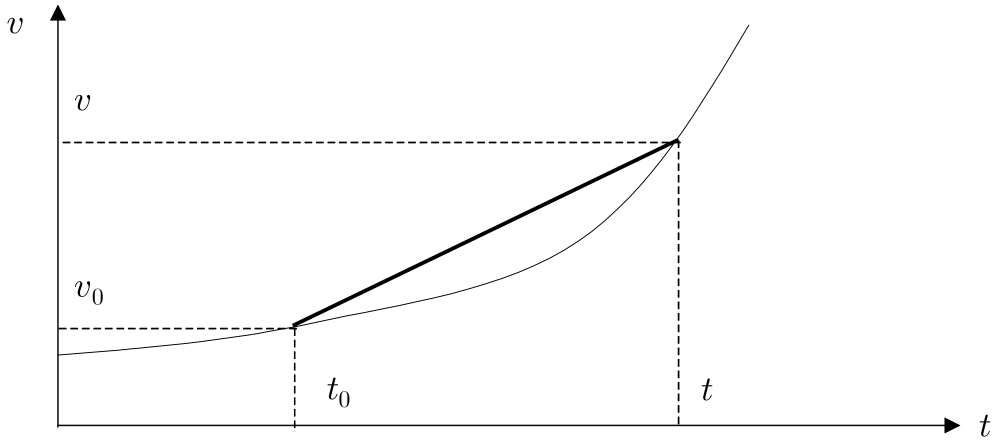
시간이 흐름에 따라 속도가 어떻게 변하는지를 의미하는 물리량이죠.

가속도도 변화율이므로 속도나 속력과 마찬가지로 두 가지가 있습니다.

평균가속도는 시간에 대한 속도의 평균변화율입니다.

속도가 일정하지 않고 변하는 운동을 하는 물체 A가 있습니다.

이 물체의 속도를 시간에 따라 그래프로 나타내보니 아래와 같았다고 합니다.




이때, 시각 $t_0$에서 $t$까지 속도가 $v_0$에서 $v$로 변하는 정도를 평균가속도를 이용해서 나타내면

$\overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t - t_0}$가 됩니다.

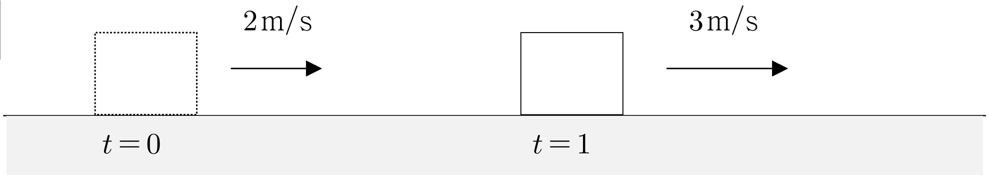
이처럼 시간 $\Delta t$ 동안의 속도 변화량이 $\Delta v$일 때, 평균가속도 $\overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$로 정의합니다.

즉, 전체 속도의 변화량을 총 걸린 시간으로 나누어주면 됩니다.

몇 가지 예시를 살펴봅시다.

각 유형별로 직접 평균가속도를 계산해보세요.

유형1

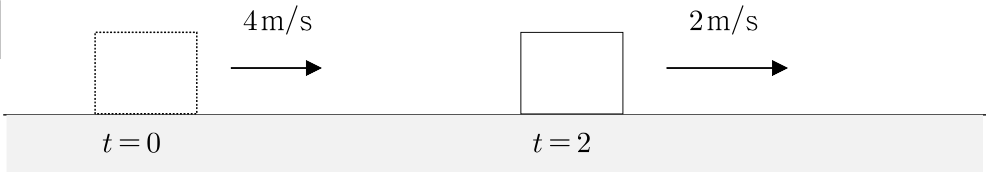



첫 번째, 시간이 지날수록 속력(속도의 크기)이 증가하는 경우입니다.

물체에 줄을 연결해 당기거나, 높은 곳에서 물체를 가만히 놓는 경우가 이에 해당합니다.

이때 평균가속도는 $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{3-2}{1-0}=1\,\mathrm{m/s^2}$입니다.

유형2




두 번째, 시간이 지날수록 속력이 감소하는 경우입니다.

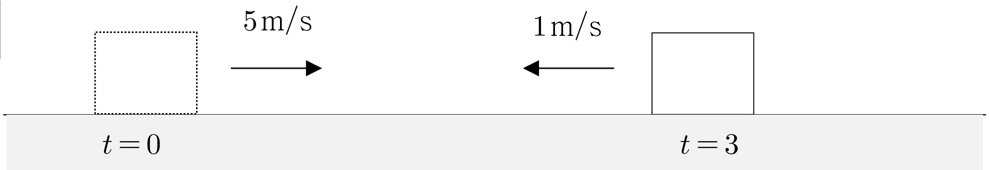
물체를 연직 위로 던진다던가, 물체가 빗면 위로 거슬러 올라가는 경우가 이에 해당합니다.

이 예시에서 평균가속도는 $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{2-4}{2-0}=-1\,\mathrm{m/s^2}$입니다.

가속도 역시 벡터량이므로 여기서의 (-)부호는 왼쪽 방향을 의미합니다.

왜냐하면 물체가 맨 처음 운동했던 방향인 오른쪽을 (+)로 두었기 때문입니다.

유형3




마지막으로 운동방향이 변하는 경우입니다.

빗면 위를 오르내리는 운동이나 위로 던진 물체가 다시 되돌아오는 경우가 이에 해당합니다.

여기서 평균가속도는 당황하지 말고 정의 그대로 $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{(-1)-5}{3-0}=-2\,\mathrm{m/s^2}$입니다.

수능 물리는 알고 있는 정의만 명확하다면, 그대로 대입만 하면 풀립니다.

지금까지 평균가속도의 유형들을 살펴보았는데요, 잘 계산할 수 있는지 예시를 풀어보죠.

| |
|---|
| **예제 6)** 활주로에서 $20\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 운동하던 비행기가 10초 후에 $100\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 이륙하였다. 10초 동안 비행기의 평균가속도는? (단, 비행기의 운동방향은 동쪽으로 일정하다.) |

동쪽 방향을 (+)로 두면 $\overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{100-20}{10} = 8\,\mathrm{m/s^2}$가 됩니다.

이제 이번 특강의 마지막 물리량인 **순간가속도**에 대해서 알아봅시다.

순간가속도는 당연히 평균가속도의 극한으로 정의합니다. 기호로 쓰자면 $a = \dfrac{dv}{dt}$입니다.

속도가 순간속도를, 속력이 순간속력을 의미하듯 그냥 가속도도 순간가속도를 의미합니다.

앞으로 그냥 가속도라고 쓰면 순간가속도 $a = \dfrac{dv}{dt}$를 의미하는 것으로 약속합시다.

그런데, 역시나 우리는 $\dfrac{dv}{dt}$, 혹은 $\dfrac{d^2s}{dt^2}$를 수학적으로는 계산할 수가 없습니다.

앞에서는 속도 $v = \dfrac{ds}{dt}$를 등속도 운동 조건 하에서 평균속도를 이용해서 구했죠.

마찬가지로 가속도 $a = \dfrac{dv}{dt}$는 등가속도 운동 조건 하에서 평균가속도로 구할 것입니다.

등가속도 운동은 가속도가 시간이 흘러도 일정한 운동입니다.

따라서 등가속도 운동을 하고 있는 물체의 가속도는 평균가속도와 같습니다.

즉, 두 시점에서의 속도만 알고 있으면 속도의 변화량 $\Delta v$을 구해 $\Delta t$로 나누어서

평균가속도 $\overline{a}$를 구하고, 이를 가속도 $a$로 사용할 수 있다는 뜻입니다.

등속도 운동과 마찬가지로 역시 미적분 공식을 사용하지 않아도 기울기와 넓이가 구해지니

이제부터 그런 조건 하에서 직접적인 문제 풀이의 방법들을 살펴봅시다.