12

2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
> (다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = 2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

나) 조건 해석 :

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 124

sol1) 가로 t+1, 세로 f(t) 직사각형 − 삼각형

$$(t+1)f(t) - \frac{1}{2}tf(t) - \frac{1}{2}(t+1)f(t+1) - \frac{1}{2}(t+1-t)\{f(t)-f(t+1)\}$$

$$= \frac{(t+1)f(t) - tf(t+1)}{2}$$

sol2) 신발끈 공식

$(0,0)$ $(t, f(t))$ $(t+1, f(t+1))$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} 0 & t & t+1 & 0 \\ 0 & f(t) & f(t+1) & 0 \end{array}\right|$$

$$\frac{1}{2}\left|tf(t+1) - (t+1)f(t)\right|$$

$$\therefore \frac{t+1}{t} = \frac{(t+1)f(t) - tf(t+1)}{2}$$

$$\frac{2(t+1)}{t} \times \frac{1}{t(t+1)} = \frac{(t+1)f(t) - tf(t+1)}{t(t+1)}$$

$$\frac{2}{t^2} = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1}$$

$$\frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{f(t)}{t} - \frac{2}{t^2}$$

$\dfrac{f(t)}{t} = g(t)$ 치환

$$g(t+1) = g(t) - \frac{2}{t^2}$$

$\displaystyle\int_1^2 g(x)dx = 2 \longrightarrow \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = 2$: 구해야 할거

12

2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

본 풀이:

Sol1) 정적분 성질

$$\int_n^{n+1} g(x)dx = \int_{n-1}^{n} g(x+1)dx$$
$$= \int_{n-1}^{n} g(x) - \frac{2}{x^2}\,dx$$
$$= \int_{n-1}^{n} g(x)dx - \left[\frac{2}{x}\right]_{n-1}^{n}$$
$$= \int_{n-1}^{n} g(x) - 1 - \frac{2}{n(n+1)}$$

$n = \frac{9}{2}$ 대입

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx - \frac{8}{63}$$
$$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx - \frac{8}{63}$$
$$= 2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{4} g(x)dx + \int_{4}^{\frac{9}{2}} g(x)dx\right\}$$
$$\vdots$$
$$= 2\int_3^4 g(x)dx - \frac{20}{63}$$
$$= 2\times\frac{2}{3} - \frac{20}{63} \quad \left(\because \int_2^3 g(x)dx = \int_1^2 g(x)dx - 1 = 2-1 = 1,\ \int_3^4 g(x)dx = \int_2^3 g(x)dx - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{64}{63}$$

$\therefore p+q = 127$

★ 참고

$$\int_{n-1}^{n} f(x+1)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

12

2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

Sol₂) 축차대입

$$\int g(t+1)\,dt = \int g(t)\,dt + \int \frac{2}{t^2}\,dt$$

$$G(t+1) = G(t) - \frac{2}{t} + C \longrightarrow t=1 \text{ 대입} \longrightarrow C=0$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = G(x)\Big|_1^2 = G(2) - G(1) = 2$$

$$\text{i) } t=\frac{7}{2} \longrightarrow G\left(\frac{9}{2}\right) = G\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{4}{7}$$

$$\text{ii) } t=\frac{9}{2} \longrightarrow G\left(\frac{11}{2}\right) = G\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{4}{9}$$

$$\therefore G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{64}{63}$$

$$\therefore p+q = 127$$

* 신발끈 공식 : 좌표를 이용하여 넓이 구하기 (삼각형만 되는거 아님)

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3\right|$$