10

2014학년도 수능(B형) 30번

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점] 72

sol.)

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$

$g''(x)=\{f(x)-2f'(x)+f''(x)\}e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c$
$f'(x)=2ax+b$
$f''(x)=2a$

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}=0$

: 의 해가 $x=1$, $x=4$ ($\because$ 조건 (가))

$$\begin{cases} -\dfrac{b-4a}{a}=5 \\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4 \end{cases} \qquad \therefore b=-a,\ c=0 \longrightarrow f(x)=ax^2-ax$$

$g(x)$ 위 한 점 $(t, g(t))$에서의 접.방. : $y=g'(t)(x-t)+g(t)\Big|_{(x,y)=(0,k)}$

$= k=-tg'(t)+g(t)$

: 서로 다른 세 실근

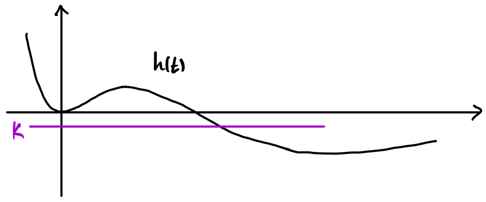
$h(t)=-tg'(t)+g(t)$

$h'(t)=-tg''(t)=0$: $t=0, 1, 4$ 에서 극값

10

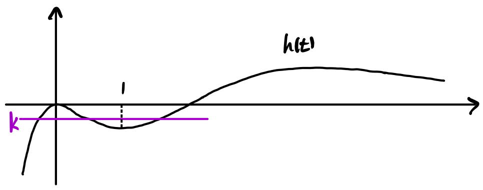
2014학년도 수능(B형) 30번

i) $a<0$



조건 성립 X

ii) $a>0$



$h(1) = -g'(1) + g(1) = -ae^{-1} = -1$

$\therefore a=e,\ b=-e,\ g(x) = ex(x-1)e^{-x}$

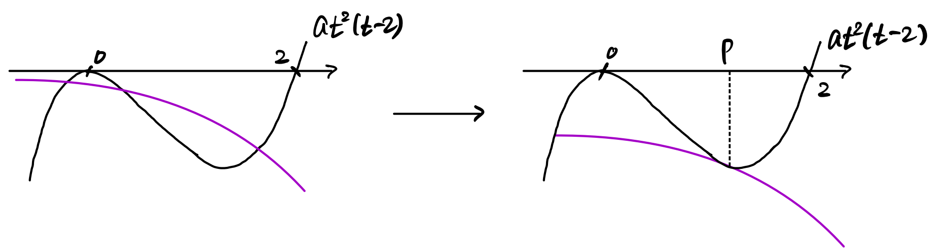
$g(-2)\cdot g(4) = 72$

sol$_2$)

$h(t) = -tg'(t) + g(t)$ (과정은 sol$_1$ 참고)

$k = a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$ke^t = a(t^3-2t^2)$



$\therefore k=-1$일 때 접

$\therefore -e^p = a(p^3-2p^2),\ -e^p = a(3p^2-4p)$ ($\because x=a$ 접 $\rightarrow f(a)=g(a),\ f'(a)=g'(a)$)

$\therefore p=1 \qquad \therefore a=e,\ b=-e,\ g(x) = ex(x-1)e^{-x}$

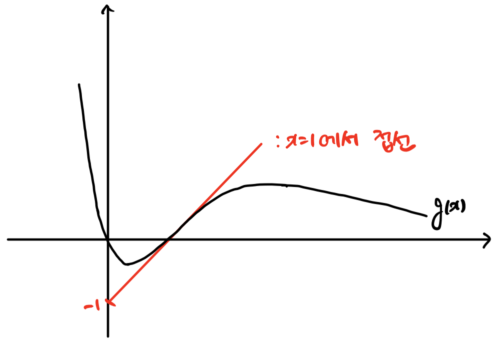
$\therefore g(-2)\cdot g(4) = 72$

10

2014학년도 수능(B형) 30번

sol 3)

$g(x) = ax(x-1)e^{-x}$ (과정은 sol 1 참고)



$x=1$에서의 접선은 $(0,-1)$을 지난다.

$-1 = g(1) - g'(1) = ae^{-1}$ $\therefore a = e$

$g(x) = ex(x-1)e^{-x}$

$\therefore g(-2) \cdot g(4) = 72$