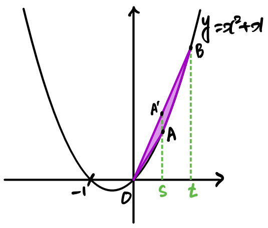
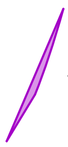
08

2014학년도 6월 평가원(B형) 30번

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] 109





$=k$

$\overline{OA}$: l : $y=(s+1)x$

$\overline{OB}$: m : $y=(t+1)x$

$k=\triangle OAA'+\triangle ABA'$

$=\frac{1}{2}\cdot s\cdot\{(t+1)s-(s^2+s)\}+\int_s^t\{(t+1)x-(x^2+x)\}dx$

$=\frac{1}{2}s^2(t-s)+\left[\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{3}x^3\right]_s^t$

$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3$

$\longrightarrow C : y^3=x^3+6k$

sol.)

$y=\sqrt[3]{x^3+6k} \longrightarrow$ 곡선 위 점 (a, b) $\longrightarrow (a, \sqrt[3]{a^3+6k})$

$d=\sqrt{(a-1)^2+\sqrt[3]{(a^3+6k)^2}}$

$\xrightarrow{\prime} 2(a-1)+\frac{2}{3}(a^3+6k)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3a^2\Big|_{a=\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}\times\frac{4}{3}=0$

$\therefore k=\frac{28}{81} \longrightarrow p+q=109$

08

2014학년도 6월 평가원(B형) 30번

sol$_2$)

$$\frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \longrightarrow \text{접·기·} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} \times \underbrace{\frac{b}{a-1}}_{\text{법선 기울기}} = -1 \longrightarrow b = \frac{4}{3} \left(\because a = \frac{2}{3} \right)$$

$$b = \left(\frac{8}{27} + 6k \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore k = \frac{28}{81} \qquad \therefore p+q = 109$$

sol$_3$) 라그랑주 승수법, Lagrange Multiplier Method

$$d = \sqrt{(s-1)^2 + t^2}$$

$$\text{minimize} \left\{ (s-1)^2 + t^2 \right\} \quad \text{subject to} \left\{ \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}s^3 = k \right\}$$

$$\left(2(s-1),\ 2t \right) = \lambda \left(\frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}t^2 \right) \ : \ s = \frac{2}{3},\ \lambda = -3,\ t = \frac{4}{3}$$

$$\therefore k = \frac{28}{81} \qquad p+q = 109$$

*라그랑주 승수법: 제약 조건 하에서 다변수함수의 최대·최소를 구할 때 사용되는 판별법

λ : Lagrange Multiplier

식 $g(x,y)=0$ 이 있을 때
$f(x,y)$ 의 최대·최소를 구하라

1. $L(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$
2. L을 각각 x, y, λ에 관해 편미분.
3. 등식 3개, 변수도 3개.