역함수의 정의야 뭐 다들 아실테니까 제외하고 문제 풀 때, 실전적으로 어떻게 쓰이는지 어떻게 받아들어야 하는지부터만 한번 살펴보겠습니다.
(역함수 치환적분은 분량이 너무 길어질것같아 제외했습니다. 다음번에 쓸게요 ㅠㅠ)

1. ‘역함수가 존재한다’ 가 가지는 의미

다른분들이야 당연하게 받아들이실 수도 있는데 보통 선행할 때나 문제를 풀 때 간혹 이 내용의 의미를 짚지 않는 경우가 많습니다.
아래의 문제들을 예시로 한번 보겠습니다

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$ 의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a 의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

역함수가 존재해야 한다는 의미는 무엇일까요? 옛날에는 나름 4점짜리로 나왔는데, 요즘은 3점짜리로 수준의 문제로 나오거나, 아니면 어려운문제의 한 조건으로 나오기도 합니다.

세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -ax^2+6ex+b & (x<c) \\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\frac{1}{2e}\right)$의 값은?

① $-4\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$ ③$-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$
④ $-3\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$ ⑤ $-2\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$

먼저 명제를 하나 설정하고 갑시다.

‘ 실수 전체집합에서 연속이면서 역함수가 존재하는 함수 ’ = ‘ 항상 증가하거나 감소하는 함수 ’

이 개념이 앞으로 역함수 문제를 다룰 때 기본 태도가 되어야 될 것입니다.

그 태도로 아래의 문제들을 어떤 아이디어들을 이용해서 다뤄야 할지 생각해봅시다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$
가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자.
$1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

이문제같은 경우에는 (지수함수) × (2차함수) + 직선인데, 생각해볼만한 거리는 접선의 기울기가 순간적으로 최대 혹은 최소가 되는 변곡점에서의 접선의 기울기가 더해지는 직선과 더해졌을 때 음이 되면 안된다는 식을 이용해서 문제를 풀면 되겠죠

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^x$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다. (나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

이 문제같은 경우에는 합성함수로 생각해준다면 $f(x)$는 $y=ax^3+bx$와 $y=e^x$의 합성함수로 생각할 수 있을것이고, 양수 a이므로 $f(x)$가 항상 증가해 줘야한다는 사실을 고려한다면, 삼차함수가 증가 혹은 감소하는 구간에서 다음 극값을 지니기 전까지에서 끊겨야 한다는 사실을 알기 때문에 $f'(m)=0$이어야 한다는 사실 또한 알 수 있습니다.

그런데 여기서, 왜 하필이면 구간을 $[k,\ \infty)$로 줬을까요? 닫힌구간이여도 될까요?
네 됩니다
앞에서 정의를 역함수가 존재하기 위한 조건을 항상 증가 혹은 항상 감소라고 말했는데, 이를

도함수로 표현해보면 $f'(x) \leq 0$ 혹은 $f'(x) \geq 0$ 으로 볼 수 있고, 다시말해서 $f'(x)=0$이 되는 x가 존재해도 된다는 의미입니다. 예를들어 $y=x^3$ 있잖아요?
그런데 여기서 여러분이 찝찝함을 느꼈을 이유는 역함수의 미분법 때문입니다.

역함수의 미분법

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때,

$g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

여기서 $f'(g(x)) = 0$인 순간이 존재한다면, 역함수가 존재하지 않는 것 아니냐? 라고 생각하실 수 있습니다.
이에 대해서 정확하게 말하자면, 역함수는 존재하나 미분가능하지 않은 순간이 존재하겠죠.

자 그런데 역함수의 미분법에서 이 내용 말고 추가로 할 말이 있을까요?
아래 기출을 통해 알아보겠습니다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \dfrac{1}{3}$이다.
(나) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은?

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

역함수가 실수 전체집합에서 미분가능하다 합니다. 다시말해서 $f(x)$의 접선의 기울기가 0이 되는 순간이 존재하지 않는다는 것을 말하고 있습니다.

생각의 순서는 다음과 같습니다.
역함수가 존재하는 함수이므로 $f(x)$가 항상 증가하거나 감소해야하나, 최고차항의 계수가 양수이므로 항상 증가한다. 다시말해서 극값이 존재하지 않는 삼차함수이다.
극값이 존재하지 않는다 하더라도, 변곡점에서의 접선의 기울기 또한 고려해야 할 대상이다. 그 이유는 접선의 기울기가 최대 혹은 최소가 되는 지점이기 때문이다. 그런데 역함수가 실수 전체칩합에서 미분가능하다. 다시말해서 변곡점에서의 접선의 기울기가 0이 아니다.

여기까지가 앞에서 언급한 내용을 토대로 진행한 내용입니다. 자 여기서 추가로 한가지만 더 꺼집어 내고 다음단계로 넘어가겠습니다.

(가)에서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \leq \dfrac{1}{3}$이다. 라고 했습니다.

여기서 이 조건이 어떤 의미를 가지는지, 한번 역함수의 미분법을 가지고 와서 다시 적어보겠습니다.

$g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} \leq \dfrac{1}{3}$

그리고 양 변을 역수처리하면

$f'(g(x)) \geq 3$

간단히 말해서 $f'(x)$의 값이 3보다 크거나 같다는 소리인데, 이는 최솟값이 3이라는 의미입니다.

증가하는 삼차함수에서 접선의 기울기가 최소가 되는 점은 변곡점이기 때문에 변곡점인 x좌표를 $x = c$라 하면 $f'(c) = 3$이라고 이해할 수 있습니다. 이를 통해서 접근할 수 있겠죠

그래서 위의 내용을 정리하면 다음과 같습니다.

함수의 변곡점에서의 접선의 기울기의 역수는 역함수의 접선의 기울기의 최대최소가 될 수 있다.

역함수와 연속성

이번에는 역함수와 그 연속성에 대해 한번 알아보겠습니다.
앞에서 항상 증가 혹은 항상 감소하는 함수라고 가볍게 정리하고 넘어갔습니다.
그렇다면 우리는 이를 통해 하나의 의문을 가져볼 수 있는데요, 항상 증가하거나 감소하는 함수들은 역함수를 가지는데, 그 역은 성립할까요?

아래의 예시문제를 가지고 하나 풀어보겠습니다.

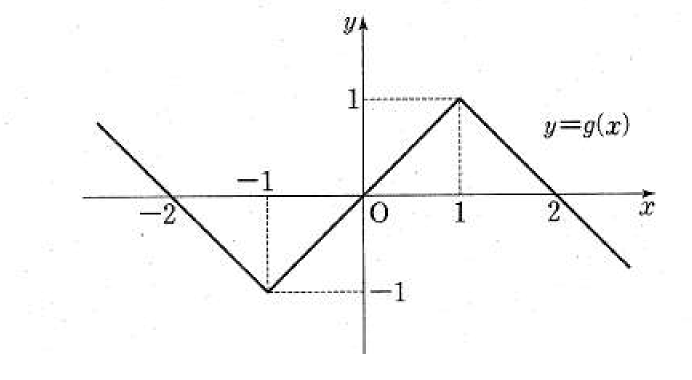
실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g \circ f$는 실수전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2



이문제도 크게 따지자면 항상 증가해야 하나는 범주에서 벗어나진 않습니다.
합성함수 $g \circ f$인데. $f(x)$는 $x<-1$과 $x \ge 1$에서 기울기가 1인 직선이기 때문에 $f(x)$가 증가하는 것을 알 수 있습니다.
이를 연장시켜 합성함수로 되돌아가 생각한해봅시다.
원래 $g(x)$는 실수 전체 집합에서 증가하거나 감소하는 함수가 아닙니다.
하지만 합성시켰을때 역함수가 존재하려면 위 성질을 만족시켜주어야 하므로
$g(x)$가 감소하는 범위에서 $f(x)$가 감소해야 증가하겠죠.
마저 조건을 구하기 위해 정리해봅시다.

문제에서 '실수전체의 집합에서 정의된 역함수' 를 가져야 된다고 했으므로
$f(x)$도 연속이여야 하지만, $-1 \le x < 1$에서 감소해야 됨을 생각해보면
$x = -1$에서 $a = b-1$, $x = 1$에서 $b = 1-c$ 를 통해 주어진 문제를 풀 수가 있게 됩니다.

여기서 주의해야 하는 점은 다음과 같습니다.
역함수를 가진다고 해서 실수 전체집합에서 연속인것은 아닙니다. 실수 전체 집합에서 연속인 함수가 역함수를 가질 때, 역함수도 실수 전체 집합에서 정의될 수 있는 것이죠.

명제를 다시 한번 떠올리고 가겠습니다.

'실수 전체집합에서 연속인 함수가 역함수를 가질 때, 우리는 항상 증가하거나 항상 감소한다고 판단할 수 있다.'

위의 성질은 평소에 되게 당연하게 생각되는 내용인데, 이게 문제에 적용되었을때 어려운 문제도 꽤 쉽게 풀림을 한번 적용해보겠습니다.

실수 k에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + k$ 의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x) + 12x - 18 = (f' \circ g)(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $m^2 + M^2$의 값을 구하시오.

거두절미하고 필요한 내용만 풀이에서 뽑아내겠습니다.
식을 정리할 때, 아래와 같이 도달할겁니다.

$g(x) - 2x = 0$ 또는 $g(x) + 2x - 2 = 0$

한가지 한가지 경우에 맞춰 가봅시다.

1) $g(x) = 2x$

$g(x)$는 삼차함수의 역함수이므로 실수 전체집합에서 연속입니다. 그리고 증가하겠죠
다시말해서 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 각각의 숫자를 대입해보면
$g(0) = 0$, $g(1) = 2$를 얻습니다.
여기서 다시 $f(0) = 0$, $f(2) = 1$이 되어줄텐데, 그때 각각의 k값은 다릅니다.
$f(0) = 0$일때 $k = 0$
$f(2) = 1$일때 $k = -7$이 되어줍니다.
물론 엄밀하게 풀 수도 있지만, 역함수가 구간안에서 연속성을 띰을 생각해준다면

방정식의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값도 연속적으로 나타남을 간단히 유추해 볼 수 있습니다.
따라서 여기서 범위는 $-7 \le k \le 0$으로 생각해 볼 수 있는것이구요
동일하게 따져줍시다.

2) $g(x)=-2x+2$
이때는 $g(0)=2$, $g(1)=0$이고 이를 다시 뒤집어주면
$f(2)=0$, $f(0)=1$ 이어야 합니다.
$f(2)=0$일때, $k=-8$
$f(0)=1$일때 $k=1$을 얻게되고 위와 같은 논리로
$-8 \le k \le 1$이 되어줌을 알 수 있습니다.

1) 과 비교했을때, 2)에서 최대와 최소의 범위를 가지므로 답은 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$으로 구해줄 수 있겠죠.

역함수와 대칭성

자 그 다음에 다룰 소재는 역함수와 대칭성, 그리고 그 교점에 관한 내용입니다.

보통 제일 많이 하는 실수(요즘엔 안하지만)가 있습니다
역함수와의 교점 = '$y=x$' 와의 교점
왜냐하면 역함수는 $y=x$에 대칭시킨 함수니까요
하지만 반례 $y=\dfrac{1}{x}$와 같은 함수들을 살펴보면 잘못된 내용이란걸 금방 알 수 있죠. 정리해보면 다음과 같습니다.

감소하는 함수와 역함수와의 교점 $\neq$ '$y=x$' 와의 교점

그렇다면 이 개념을 좀 더 확장해서 세밀화 시킬 수 있을까요?
아래문제들을 먼저 한번 살펴보고나서 정리해봅시다.

함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}\,(k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은?

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$
④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

이문제에서도 제일 큰 문제점 역시 생각없이 역함수와의 교점과 $y=x$의 교점이 동일하다고 문제를 푸는 순간 발생하게 됩니다.
함수 $f(x)$에서 k가 양수이므로 $f(x)$가 역함수를 가지려면 실수 전체집합에서 감소해야합니다.
그런데 분명히 원점을 지나는 함수이므로 $(0,\,0)$을 지난다고 해주면 이는 $f^{-1}(0)=0$이어야 할 것입니다.
그러고나면 남은 좌표가 α와 β인데 $y=x$와의 교점이 아니므로 $f(\alpha)=\beta$이고 $f(\beta)=\alpha$여야 역함수와의 교점이 이루어 질 것입니다.

물론 이 이후의 문제풀이는 그 다음테마에서도 한번 더 다룰것이므로 이 문제는 여기까지만 다루겠습니다.

한문제 더 보겠습니다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$ 이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$)

이문제 또한 다음 테마에서도 한번 더 다룰 내용이긴 한데, 가볍게 하나만 살펴보겠습니다.
원래 극점이 존재하는 삼차함수는 역함수를 가지지 못합니다.
하지만 범위를 증가하는 범위나, 감소하는 범위만으로 제한시킨다면 역함수를 가질 수 있죠.
이를 이용하게 된다면 방정식 $(f \circ f)(x) = x$에서
$f(x) = x$뿐만 아니라 $f(\alpha) = \beta$ 그리고 $f(\beta) = \alpha$가 쌍으로 존재해야 한다는 사실을 알 수 있습니다.

정리하자면 다음과 같습니다.
역함수는 원함수를 $y = x$에 대칭시킨 함수이기 때문에 역함수와 원함수의 교점은 항상 $y = x$에 대칭일 수 밖에 없습니다.
증가하는 함수에 대해서는 $y = x$와의 교점과 동일하지만
감소하는 함수에 대해서는 교점이 대칭되는 쌍으로 만들어져야합니다.

하지만 실제 문제를 풀게되면 역함수가 존재하는 함수가 증가하는지, 감소하는지를 역으로 추론해야 하는 상황이 자주 펼쳐집니다. 이를 역으로 생각해보기 위해 아래와 같은 조건을 통해 추론해 볼 수 있습니다.

$f(x)$가 증가함수 일때는 역함수와의 교점의 갯수의 제한이 없고
$f(x)$가 감소함수 일때는 역함수와의 교점의 갯수가 항상 홀수개여야 합니다. 그중에 하나는 반드시 $y = x$위에 존재해야 합니다. 그리고 그 하나는 역함수의 교점의 x좌표를 크기순대로 나열했을때 중앙에 있는 값이 되겠죠. 그를 제외한 나머지 좌표들은 기울기가 -1인 직선 위에 존재하여야 할 것입니다.

그래서 위의 내용들을 묶어서 정리하자면

$f(x)$가 증가함수일때 : 역함수와 교점이 $y = x$위에 존재, 갯수제한 X
$f(x)$가 감소함수일때 : 역함수와의 교점중 1개만이 $y = x$위에 존재, 나머지는 기울기가 -1인 직선에 대칭($f(\alpha) = \beta$ 이면 $f(\beta) = \alpha$), 교점의 갯수가 항상 홀수개

정리가 되셨으면 아래문제를 한번 풀어보시면 좋겠습니다.

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때,
$2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

+ 첫번째 테마와 방금테마를 결합시키면 역함수와 원함수가 접할때의 접선의 기울기가 ± 1이란것도 한번 유추해 볼 수 있을겁니다

역함수 미분과 부분적 역함수

그 다음 테마인 부분적으로 역함수를 가지는 문제들에 대해서 다뤄보겠습니다.
라이프니츠 미분으로도 풀게 되는 문제이기도 한데, 저는 주로 부분적으로 역함수를 가진다고 문제를 풉니다.

아래문제가 아마 라이프니츠로 많이 유명한 문제이기도 하면서, 97년생들이 답을 97로 찍어서 정답률이 1% 올라간 객관식 보정으로 정답률이 소폭 상승했던 문제였을겁니다.
하지만 저는 이문제 현장에서 풀때, 역함수미분으로 풀었었습니다.
그리고 역함수는 사실 합성함수미분의 한 파트이죠.

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

이문제 이후로 y좌표가 t일때 정의되는 x좌표들을 함수로 표현하는 문제들이 되게 많이 나왔었는데 대부분 그런 함수들은 역함수가 존재하지 않는 함수들이었습니다.
작년인지, 올해수특인지 기억은 나지않는데 그런문제도 한번 있었구요

역함수 미분 법부터 한번 적어보고 가겠습니다.

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$
이 식이 어디서부터 유도되었는지를 살펴보면, $f(g(x))=x$입니다.
예시로 든 위의 문제도 정리를 해보자면 아래와 같습니다.
$y=x^3+2x^2-15x+5$를 $p(x)$라 하면 $p(x)=x^3+2x^2-15x+5$
그리고 $y=t$와 만나는 점들의 좌표가 $(f(t),t)$, $(g(t),t)$였는데 이를 직접 대입해보겠습니다.
그러면 $p(f(t))=t$, $p(g(t))=t$로 표현됩니다.
역함수와의 유사성이 상당히 눈에 띄는것을 알 수 있습니다. 하지만, 역함수가 애초에 존재하지 않는 함수이므로 이 생각을 하지 못할 수도 있는데, 부분적으로 끊어봅시다.
$p(x)$를 미분해보면 $p'(x)=3x^2+4x-15=(3x-5)(x+3)$
$x=-3$에서 극소를 지니고 $x=\dfrac{5}{3}$에서 극대를 지닙니다.
여기를 기준으로 끊는다면 3개의 구간으로 나오게 되겠죠

$(-\infty,\ -3),\ \left[-3,\ \frac{5}{3}\right),\ \left(\frac{5}{3},\ \infty\right)$
각각 증가하거나 감소하는 구간들만 존재하게 되니까, 이 구간안에서는 부분적으로 역함수를 지니게 되는겁니다.
그러니까 역함수의 미분법을 사용할 수 있게 되는거겠죠.

다른문제도 한번 살펴보겠습니다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$ 이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$)

방정식 $(f \circ f)(x) = x$ 임을 고려해보면 $f(x) = x$이 만족된다는 사실을 알 수 있지만, 그 외의 케이스는 이 문제를 처음보는사람 입장에서 잘 떠오르기 쉽지 않습니다.

이를 위해 삼차함수의 특성에서 떠올려야 되는 사실 두가지입니다.

① 모든 삼차함수는 점대칭 함수이다
② 구간별로 끊어주면 역함수를 가진다.

사실 ①의 내용만으로도 문제는 풀리긴 하지만, ②와 결합지어 생각하면
$f(x) = x$를 제외한 다른근은 $f^{-1}(x) = f(x)$의 근이라는 사실을 이해할 수 있고, 이는 부분적으로만 성립한다는 사실을 알 수 있습니다.
그리고 그 다음조건을 살펴봅시다.
$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0$
이 두 조건으로 인하여 감소하는 구간 안에서 $f^{-1}(x) = f(x)$이 발생해야하므로 $f(1) = 2$, $f(2) = 1$을 쉽게 얻어낼 수 있습니다. 그러면 그 중간에 존재하는 $x = a$는 점대칭이 되는 점이 되어주겠죠. 그래서 $a = \frac{3}{2}$또한 얻어낼 수 있고, b는 0과 점대칭이므로 $b = 3$ 또한 얻어줄 수 있고, 나머지는 $y = x$와의 교점이 되어주므로
$f(0) = 0,\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},\ f(3) = 3$ 또한 얻을 수가 있게 됩니다.

이번 테마의 내용을 정리하면 다음과 같습니다

역함수가 존재하지 않는 함수도 구간을 제한시키면 부분적으로 역함수를 가질 수 있다.

그 외의 상황에 대한 역함수 문제

정형화된 꼴이 아닌 역함수가 주어졌을 때

평소에 여유가 있으면 간단하게 풀리는데, 시험장에서 시간없을때 나오면 짜증나는 유형중 하나입니다.
이에 대한 대처법 및 행동강령입니다. 아래 예시문제를 통해 한번 정리해보겠습니다.

함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}$ $(k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은?

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$
④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

아까 어느정도 상황에 대한 이해를 했으므로 이제 그 다음단계를 다시 살펴봅시다.
$f(\alpha)=\beta$이고 $f(\beta)=\alpha$여야 하는것은 알겠는데, 문제는 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대해 상황을 물어보고 있습니다.
이럴때는 복잡하게 생각하지말고, 역함수와 원함수를 합성하면 항등함수($y=x$)가 나온다는 기본 원리를 사용하는게 기본 원칙입니다.

여기서 한번 선택장애가 올 수 있는데, $g(x)$를 안에 집어넣을것인지, $g(x)$의 안에 집어넣을것인지 겠죠.
다만 여기서 함수가 y축으로도 평행이동 된 함수기 때문에 $g(x)$안에 집어넣어서 정리하는게 좀 덜 헷갈릴 것입니다. 넣어주면
$g(f(x-2\beta)+2\alpha)=x$ 입니다.
여기에서 미리 $x=\alpha,\ \beta$를 대입해보면
$g(f(\alpha-2\beta)+2\alpha)=\alpha$
여기선 딱히 얻어지는게 없지만

$g(f(\beta-2\beta)+2\alpha)$
$=g(f(-\beta)+2\alpha)$
$=g(f(\alpha)+2\alpha)$
$=g(\beta+2\alpha)$

$=g(-\alpha+2\alpha)$
$=g(\alpha)=\beta$
(α와 β 는 $y=-x$와의 교점이기 위해서 , $f(x)$가 기함수기 때문에 $\alpha=-\beta$이므로)

미분을 해준다면
$g'(f(x-2\beta)+2\alpha)\times f'(x-2\beta)=1$이 되어줄 것이고

문제에서 준 조건이 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$이기 때문에 $x=\beta$를 넣으면 되겠습니다.
넣어주면
$$g'(\alpha)=\frac{1}{f'(-\beta)}$$
가 정리되므로
$$f'(\beta)=2g'(\alpha)=\frac{2}{f'(-\beta)}$$
$$f'(\beta)\times f'(-\beta)=2$$
로 계산해주면 답이 나오겠죠.

2. 그 외

함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$과 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$이다.

함수 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에 대하여 $h'(e)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

다짜고짜 역함수를 그냥 식에 포함시켜버립니다.
그말인 즉슨 $f(x)$가 역함수가 존재하는 함수라는 소리고, 항상 증가, 항상 감소니까 도함수의 부호가 항상 일정해야 합니다.
(2차함수)×(지수함수) 특성상 도함수의 극솟값이 점근선보다 밑에 내려가지만 않으면 되겠죠.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x 에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. $a^2 \leq 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이런 문제에서도 그냥 다짜고짜 역함수가 존재한다고 해버립니다. 그 이후에 해야할 행동은 이제 다 아시리라고 생각합니다.

$\frac{3}{5} < x < 4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

역함수가 존재하고 미분가능하답니다. $f'(x) \neq 0$을 생각해볼 수 있을것이고, 나머지는 x대신 $g(x)$를 대입하여 계산해주는 과정만이 남아있음을 알 수 있습니다 정리해주면

$$f'(g(x))=\frac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}=\frac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}=\frac{1}{g'(x)}$$ 이므로

$$g'(x)=\frac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}$$

이렇게 되어주겠죠.

그래서 이때까지 나왔던 테마를 다시한번 총 정리해보겠습니다.
(함수 $f(x)$는 실수 전체집합에서 연속, $f^{-1}(x)=g(x)$)

① 실수 전체집합에서 연속이면서 역함수가 존재하는 함수 = 항상 증가하거나 감소하는 함수

② 함수의 변곡점에서의 접선의 기울기의 역수는 역함수의 접선의 기울기의 최대최소가 될 수 있다.

1) $f'(x)=0$인 순간이 존재하면 역함수가 미분가능하지 않은 순간이 존재한다.
2) $f(x)$와 $g(x)$ 접할때, 접선의 기울기가 ± 1이다.

③
$f(x)$가 증가함수일때 : 역함수와 교점이 $y=x$위에 존재, 갯수제한 X
$f(x)$가 감소함수일때 : 역함수와의 교점중 1개만이 $y=x$위에 존재, 나머지는 기울기가 -1인 직선에 대칭($f(\alpha)=\beta$ 이면 $f(\beta)=\alpha$), 교점의 갯수가 항상 홀수개

④ 역함수가 존재하지 않는 함수도 구간을 제한시키면 부분적으로 역함수를 가질 수 있다.

⑤ 함수가 복잡한 함수의 역함수가 주어졌을 때, 역함수와 원함수를 합성하면 항등함수($y=x$)가 나온다는 기본 원리를 사용하라