05

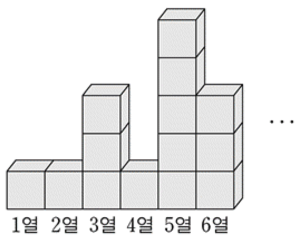
자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

> 블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\dfrac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 19



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1		2		3		4		5		6		7		8
			1				2				3				4 ⋯
							1								2
															1

sol1)

$f(2^1) = 1+1 = 1^2+1$

$f(2^2) = 1+3+1+1 = 2^2+1^2+1$

$f(2^3) = 1+3+5+7+1+3+1+1 = 4^2+2^2+1^2+1$

$f(2^4) = 1+3+\cdots+15+(1+3+5+7)+\cdots = 8^2+4^2+2^2+1^2+1$

$\vdots$

$f(2^n) = 1+1+2^2+4^2+\cdots+(2^{n-1})^2$

$= 1+\dfrac{1^2\cdot(4^n-1)}{4-1} = \dfrac{4^n+2}{3}$

05

2011학년도 수능(가형) 25번

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}+2}{3} - \frac{4^n+2}{3}}{\frac{4^{n+2}+2}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 4^n}{16\cdot 4^n} = \frac{3}{16}$$

$p=16,\ q=3 \qquad \therefore p+q=19$

sol2)

$$\begin{cases} g(n) = (2^{n-1}+1)\text{th 항부터 } 2^n\text{th 항까지의 합} \\ g(0)=1,\ g(1)=1,\ n\geq 2\text{인 정수} \end{cases}$$

$g(2)=4 \qquad g(3)=16 \qquad g(4)=64$

$\longrightarrow g(n)=4^{n-1} \quad (n\geq 2\text{인 정수})$

$$\therefore f(2^n) = g(0)+g(1)+\cdots+g(n) = 1+1+4+16+64+\cdots$$
$$= 1+1+2^2+4^2+8^2+\cdots$$

⋮ 이하 동일