수학 영역

제 2 교시

성명		수험 번호						—				

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점] ④

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$2^2 = 4$

2. 반지름의 길이가 6이고, 호의 길이가 2π인 부채꼴의 중심각의 크기는? [2점] ②

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

$2\pi = 6\theta$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

3. 함수 $y = 2\sin x - 3$의 최댓값은? [2점] ③

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

$2-3=-1$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_7 = 20, \quad a_2 = 4$$

$2a_5 = 20$

일 때, a_7의 값은? [3점]

$a_5 = 10$

$3d = 6$

$d = 2$

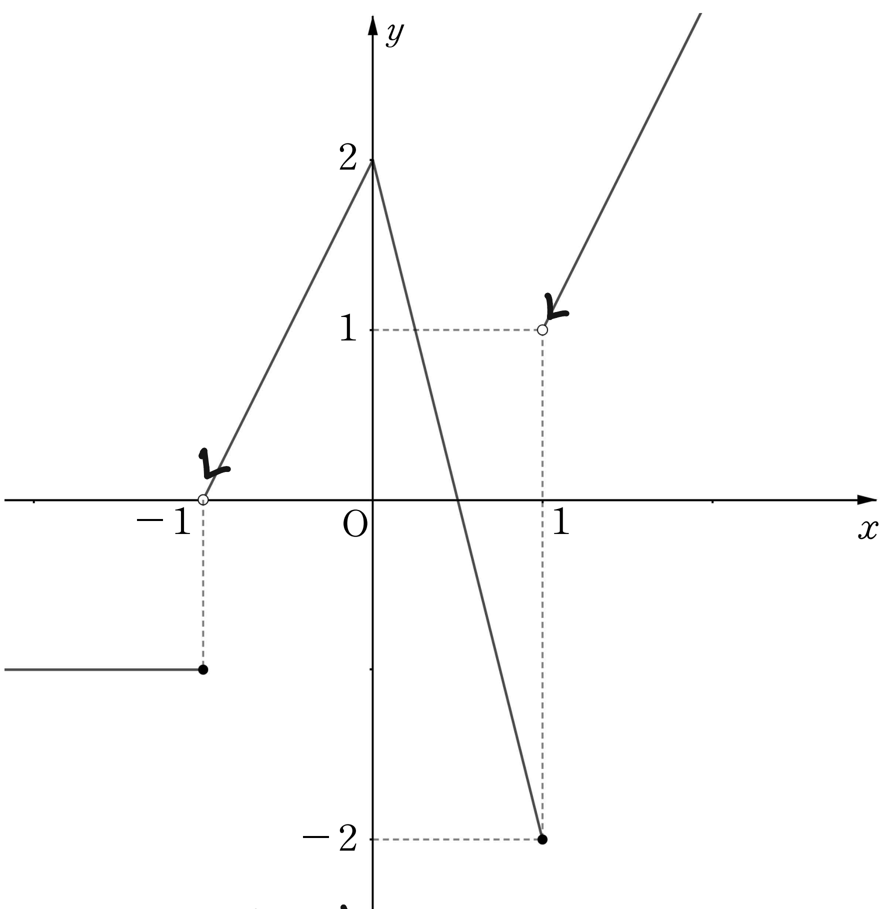
②

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$a_7 = a_5 + 2d$

$= 10 + 4 = 14$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$0-1=-1$

$\lim_{x\to-1+} f(x) - \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점] ①

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

6. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여

$$\log_4 \sqrt{a} = \log_2 b$$

가 성립할 때, $\log_b a$의 값은? [3점] ⑤

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\log_{2^2} a^{\frac{1}{2}} = \log_2 b$

$\frac{1}{4}\log_2 a = \log_2 b$

$\log_2 a = 4\log_2 b = \log_2 b^4$

$a = b^4$

$\therefore \log_b a = \log_b b^4 = 4$

7. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점] ③ $\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

8. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = -2a_n + n$$

①

을 만족시킨다. $a_5 = 10$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

10
$a_5 = -2a_4 + 4$
$2a_4 = -6$
$a_4 = -3$

-3
$a_4 = -2a_3 + 3$
$2a_3 = 6$
$a_3 = 3$

3
$a_3 = -2a_2 + 2$
$2a_2 = -1$
$a_2 = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$
$a_2 = -2a_1 + 1$
$2a_1 = \frac{3}{2}$
$a_1 = \frac{3}{4}$

9. 함수 $f(x)$가

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 3$

$$\lim_{x\to 0}(x+4)f(x) = 12$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2 - 1}{f(x)+1}$의 값은? [3점] ⑤

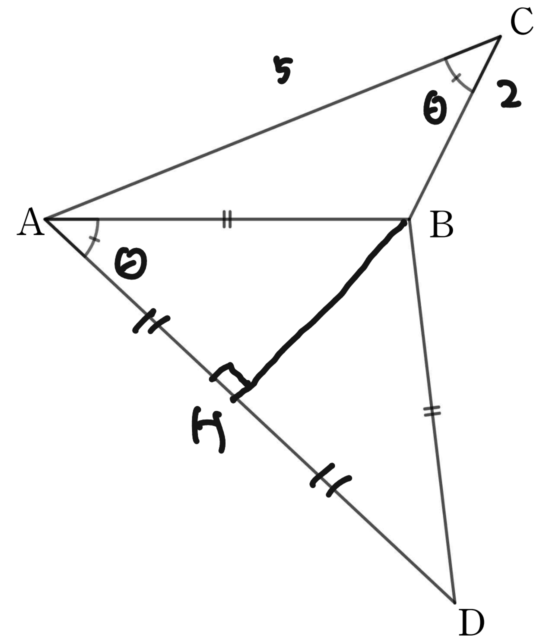
9, 3

$= \frac{8}{4} = 2$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

10. 그림과 같이 $\overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 2$이고, $\cos(\angle ACB) = \frac{3}{4}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AB} = \overline{BD}$, $\angle ACB = \angle BAD$가 되도록 점 D를 잡을 때, 선분 $\overline{AD}$의 길이는? [3점] ④

θ



① $\frac{3\sqrt{14}}{4}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\frac{5\sqrt{14}}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{14}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{14}}{4}$

$\overline{AB}^2 = 25+4-2\cdot 5\cdot 2\cdot \cos\theta \; \frac{3}{4}$

$= 25+4-15$

$= 14$

$\overline{AB} = \sqrt{14}$

$\cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{4}$

$\overline{AH} = \frac{3}{4}\sqrt{14}$

$\overline{AD} = 2\overline{AH} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$

11. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_1=3$이고 수열 $\{a_n\}$이 $S_{n+1}-S_{n-1}=4n+4$ $(n \geq 2)$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

⑤

① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120

$a_{n+1}+a_n=4n+4$ $(n\geq 2)$

$\Rightarrow a_n=2n+1$ $(n \geq 2)$

+) $S_1=a_1=3$ ← 성립.

∴ $a_n=2n+1$ $(n\geq 1)$

$\sum_{n=1}^{10} a_n = 2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10$

$=120$

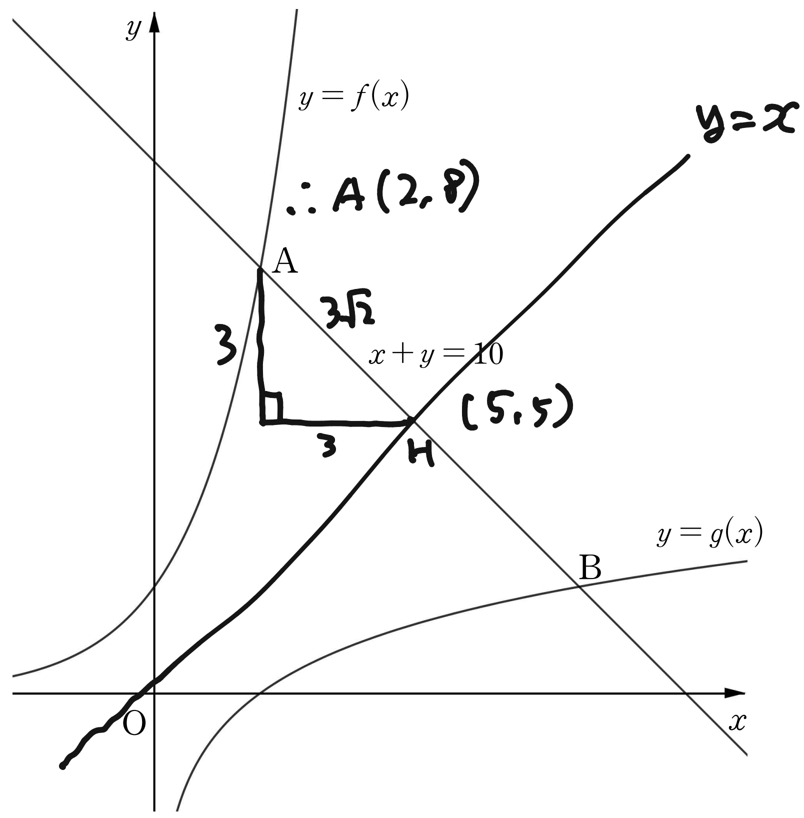
역함수은 $y=x$ 대칭!

12. 6보다 작은 자연수 a와 정수 b에 대하여 그림과 같이 두 함수 $f(x)=a^{x-b}$, $g(x)=\log_a x+b$이 직선 $x+y=10$과 만나는 지점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$일 때, $a-2b$는? [3점]

②

$\overline{\mathrm{AH}}=3\sqrt{2}$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



∴ $f(2)=a^{2-b}=8$

가능한 (a,b)

은 $(2,-1)$ $(8,1)$

✕

∴ $a-2b=2+2=4$

13. $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$일 때, $\sin^8\theta-\cos^8\theta$의 값은? [3점]

①

① $\frac{7\sqrt{5}}{27}$　② $\frac{8\sqrt{5}}{27}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$　④ $\frac{10\sqrt{5}}{27}$　⑤ $\frac{11\sqrt{5}}{27}$

$(s+c)^2=1+2sc=\frac{1}{3}$　　$(s-c)^2=1-2sc=\frac{5}{3}$

$s+c=\frac{1}{\sqrt{3}}$　　$s-c=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$s^2-c^2=(s+c)(s-c)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$(s^4-c^4)=(s^2+c^2)(s^2-c^2)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$(s^2+c^2)^2=s^4+c^4+2(sc)^2$

$1=s^4+c^4+\frac{2}{9}$

$s^4+c^4=\frac{7}{9}$

$s^8-c^8=(s^4+c^4)(s^4-c^4)$

$=\frac{7}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$

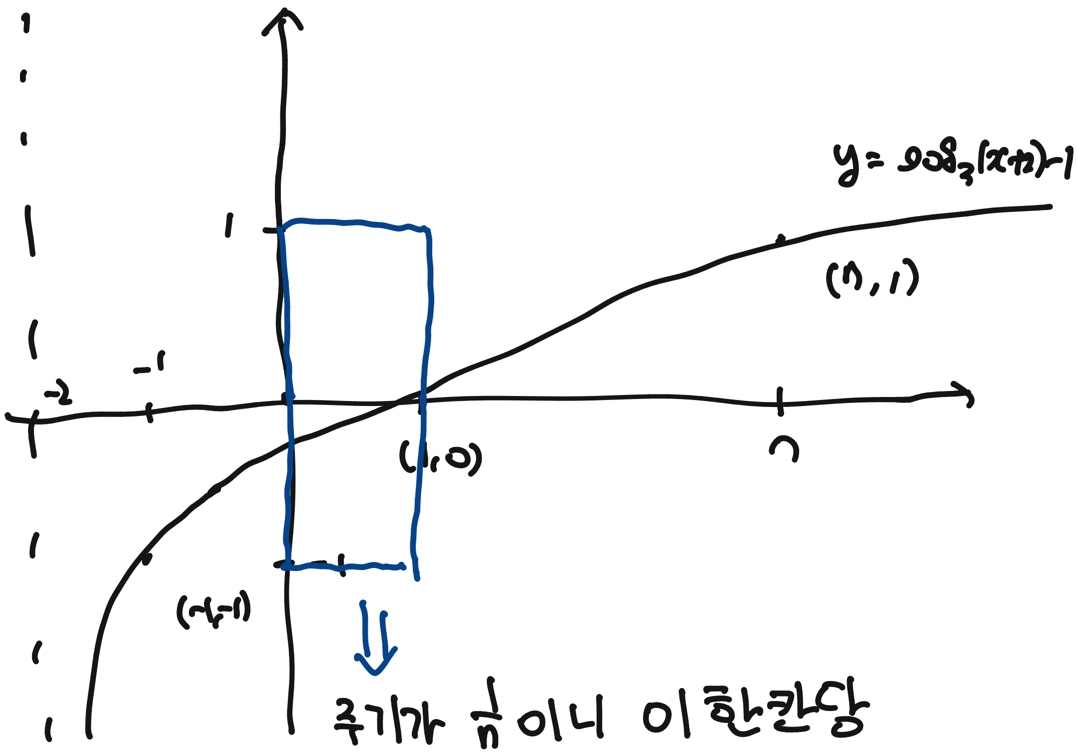
$=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

14. 2이상의 자연수 n에 대하여
두 함수 $y=\sin 2n\pi x$와 $y=\log_3(x+2)-1$ 의 교점의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{7} f(n)$의 값은? [4점]

③

① 418　② 422　③ 426　④ 430　⑤ 434

주기은 $\frac{2\pi}{2n\pi}=\frac{1}{n}$



⇓
주기가 $\frac{1}{n}$이니 이 한칸당
삼각함수가 n번 반복됨
⇒ 2n번 만남.

∴

$f(n)=8\cdot 2n-\boxed{1}$

⇓
(1, 0) 중복

$=16n-1$

$\sum_{n=2}^{7} f(n)=\sum_{n=1}^{7} f(n)-f(1)$

$=16\cdot\frac{7\cdot 8}{2}-7-(15)$

$=448-22$

$=426$

15. $-3 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y = 2^{2x} - 2^{x+1} - 8$에 대하여 $\sqrt[n]{2^{2x} - 2^{x+1} - 8}$이 실수가 되도록 하는 정수 x의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(3)+f(4)+f(5)$의 값은? [4점]

2

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

$\frac{1}{8} \le 2^x = t \le 16$

$\therefore y = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$

$\sqrt[n]{(t-4)(t+2)}$

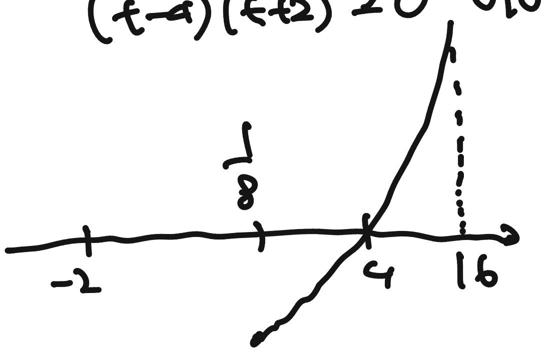
if) n이 홀수

$(t-4)(t+2)$의 부호와 상관 없이 실수 1개 존재.

$\therefore$ $f(3)$, $f(5) = 8$ (-3부터 4까지 모두!)

if_2) n이 짝수

$(t-4)(t+2) \ge 0$ 이어야 실수 존재.



$4 \le t \le 16$ 이어야함.

$\Rightarrow 4 \le 2^x \le 16$

$2 \le x \le 4$

$\Rightarrow$ x는 2, 3, 4 $\boxed{3개}$.

$\therefore f(4) = 3$

$8 + 3 + 8 = 19$

16. 이차함수 $f(x) = ax^2 - a(a+1)x + a^2$가 1보다 작은 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to a+} \frac{|f(x)|}{x-a} = \alpha$, $\lim_{x \to a-} \frac{|f(x)|}{x-a} = \beta$

(나) $3\alpha + 2\beta = 2$

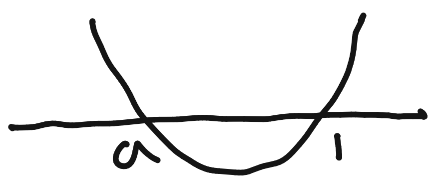
$f(\alpha - \beta)$의 값은? (단, α, β는 0이 아닌 상수이다.) [4점] 4

① -24 ② -21 ③ -18 ④ -15 ⑤ -12

$f(x) = a(x^2 - (a+1)x + a)$

$= a(x-1)(x-a)$

if) $0 < a < 1$ 일때



$\lim_{x \to a+} \frac{|f(x)|}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{-a(x-1)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = -a(a-1)$

$= -a^2 + a = \alpha$

마찬가지로 하면

$\beta = a^2 - a$

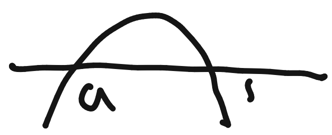
$3\alpha + 2\beta = -3a^2 + 3a + 2a^2 - 2a = -a^2 + a = 2$

$a^2 - a + 2 = 0$

$D = 1 - 8 = -7 < 0$

$\Rightarrow \times$

$\therefore a < 0$



$\Rightarrow \alpha = a^2 - a$, $\beta = -a^2 + a$

$3\alpha + 2\beta = a^2 - a = 2$

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$

$\boxed{a = -1}$

$\Rightarrow \alpha = 2$, $\beta = -2$

$\therefore f(\alpha - \beta)$

$= f(4)$

$= a(4-1)(4-a)$

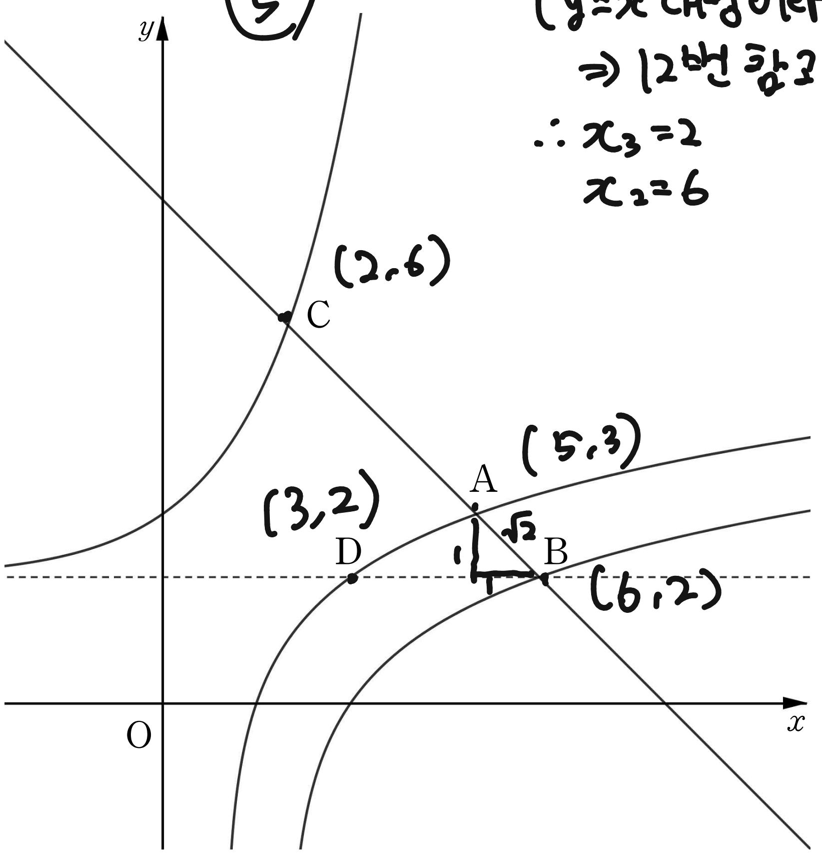
$= -1 \cdot 3 \cdot 5$

$= \boxed{-15}$

17. 그림과 같이 직선 $l : y = -x + 8$이 곡선 $f(x) = \log_a(x-1)+1$와 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$에서 만나고 곡선 $g(x) = \log_a(x-2)$와 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에서 만난다. $g(x)$의 역함수가 직선 l과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_3, y_3)$, 점 B에서 x축과 평행하게 그은 직선이 함수 $f(x)$와 만나는 점을 점 $\mathrm{D}(x_4, y_4)$라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이고 $x_2 - x_3 = 4$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은? (단, a는 1보다 큰 양수이고 $x_3 < x_1 < x_2$이다.) [4점]

$x_2 + x_3 = 8$
($y=x$ 대칭이라.
⇒ 12번 참고.)
∴ $x_3 = 2$
$x_2 = 6$

5



〈보기〉

ㄱ. $a = 2$
ㄴ. $2x_4y_3 = 9x_3y_4$ ⇒ 대입 아 기울기
ㄷ. 삼각형 BDC의 넓이는 6이다.

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$
↓ 높이
↳ 밑변

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\log_a(4) + 1 = 3$
$\log_a 4 = 2 \Rightarrow a = 2$

$\log_2(x_4 - 1) + 1 = 2$
1
$x_4 - 1 = 2$
$x_4 = 3$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> ↱ 없어진 조건입니다.
> (가) $a_{2n-1} = 2n - 5$, [redacted]
>
> (나) $a_{2n} = 2\cos\frac{(a_{2n-1} + a_{2n+1})}{3}\pi$, $b_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n-1}$

↱ $a_{44} + \cdots + a_{65}$

$\sum_{k=1}^{22}(b_{2k-1} + a_{66-k})$의 값은? [4점] 1

① 165 ② 167 ③ 169 ④ 171 ⑤ 173

a_n, b_{2n-1} 나열해보면

a_1	-3
a_2	-1
a_3	-1
a_4	2
a_5	1
a_6	-1
a_7	3
a_8	-1
a_9	5
a_{10}	2
a_{11}	7
a_{12}	-1
⋮	

짝수항은 주기
홀수항은 등차

b_1	2
b_3	3
b_5	-2
b_7	-4
b_9	-3
b_{11}	-8
b_{13}	-10
b_{15}	-9
b_{17}	-14
⋮	

셋다
공차 : -6

⇓
$(b_1 + b_3 + b_5)$
$(b_7 + b_9 + b_{11})$
$(b_{13} + b_{15} + b_{17})$
⋮
초항 : 3
공차 : -18
$(-6 \cdot 3)$

⇓
짝/홀 나눠 더하기.

짝: $a_2 + a_4 + a_6 / a_8 + a_{10} + a_{12} /$
$\quad 0 \quad\quad\quad\quad 0$

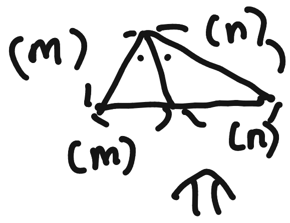
∴ $a_{44} + a_{46} + a_{48} +$
$\cdots + a_{62} + a_{64}$
$= 0 + a_{62} + a_{64} = 1$

홀: ⇒ 등차수열로 구하기
$a_{45} = 41$, $a_{65} = 61$

$\frac{11 \cdot (41 + 61)}{2} = 561$

∴ $\sum_{k=1}^{22}(b_{2k-1})$
$= b_1 + b_3 + \cdots + b_{43}$
$= (b_1 + b_3 + b_5) + \cdots$
$\quad + (b_{37} + b_{39} + b_{41}) + b_{43}$
$= \frac{7(3 - 105)}{2} + b_{43}$
$= -357 + \boxed{b_{43}} = -40$
$= -397$

∴ $561 + 1 - 397 = 165$



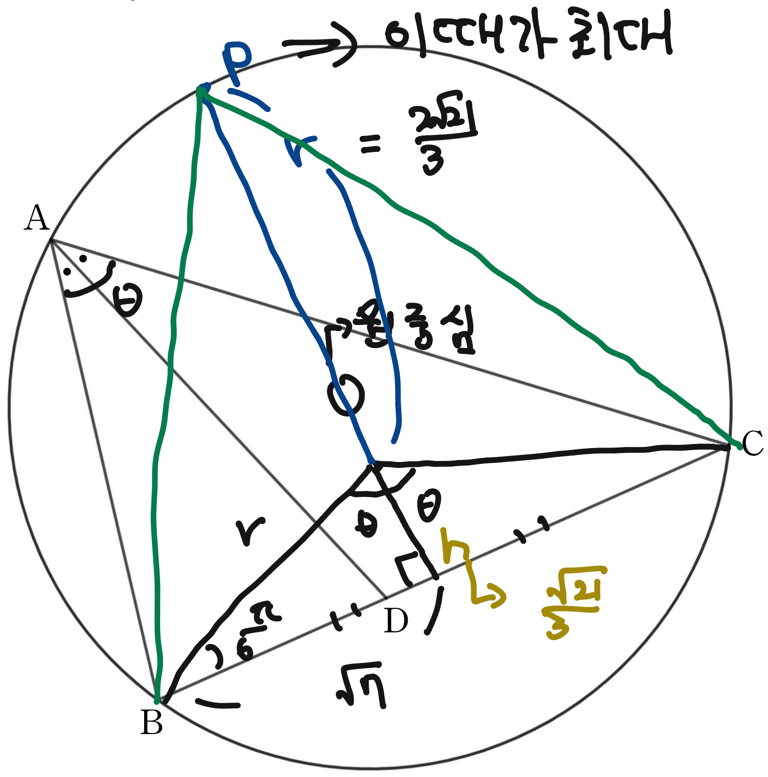
⇒각의 이등분선 성질.

 ⇒ $\overline{CD}=\frac{4\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{6}{4}=\frac{6}{5}\sqrt{7}$

19. 그림과 같이 원에 내접하고 있는 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC에 대하여 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{BD}=\frac{4\sqrt{7}}{5}$일 때, 원 위의 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 BPC의 넓이의 최댓값은? [4점]

③

⇒ $\overline{BC}=2\sqrt{7}$



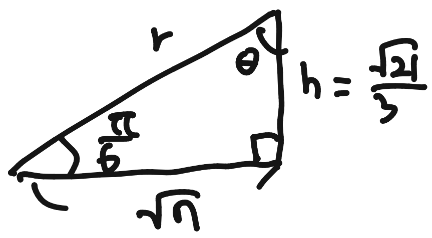
① $6\sqrt{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ③ $7\sqrt{3}$ ④ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

$\overline{BC}^2 = 28 = 16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\cos\theta$

$2\cdot4\cdot6\cos\theta=24$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$



⇒ $1:\sqrt{3}:2$ 비율

$\sqrt{7}:h=\sqrt{3}:1$

$h=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

$h:r=1:2$

$r=2h=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

높이

∴ $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot2\sqrt{7}=7\sqrt{3}$

20. $0<x\le5$에서 정의된 두 함수 $f(x)=|\log_2 x|$, $g(x)=|2\sin\pi x-1|$가 있다. 방정식

$$\{f(x)\}^{g(x)}=\{f(x)\}^{\frac{1}{n}}$$

의 모든 실근의 합을 $h(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{4}h(n)$의 값은? [4점]

⑤

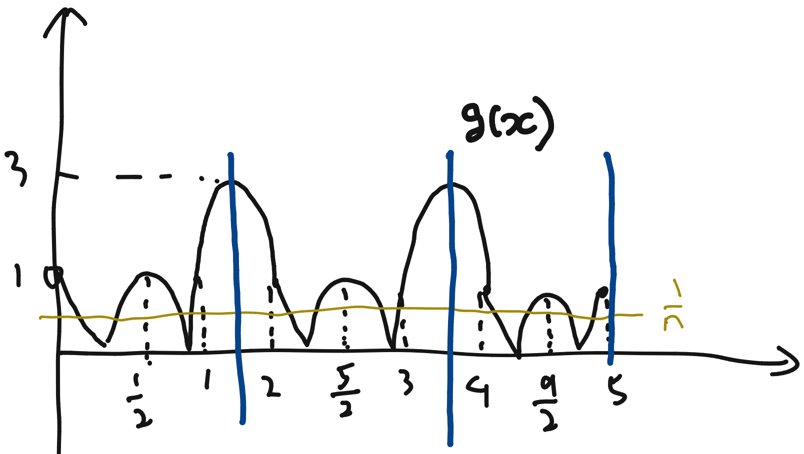
① 111 ② 114 ③ 117 ④ 120 ⑤ 123

⇒ $f(x)=1$ or $g(x)=\frac{1}{n}$

{ $f(x)=0$은 하면서 별도로 확인

① $f(x)=1$ ⇒ $x=2, \frac{1}{2}$

② $g(x)=\frac{1}{n}$



1) $n=2,3,4$일 때 $\frac{1}{n}$으로 나눈 칸 쓱 보면 가운데 $\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2}$를 기준으로 대칭

∴ $h(n)=4\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\right)+\boxed{2+\frac{1}{2}}+\boxed{1}$

$f(x)=1$ $f(x)=0$

⇓

$g(x), \frac{1}{n}>0$ 이라 가능.

$=\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{15}{\cancel{2}}+3+\frac{1}{2}$

$=33+\frac{1}{2}$

$h(2)+h(3)+h(4)=3\left(33+\frac{1}{2}\right)=99+\frac{3}{2}$

2) $n=1$일 $x=\frac{1}{2},1,2,\frac{5}{2},3,4,\frac{9}{2},5$에서 만남.

∴ $h(1)=15+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{9}{2}$

$=20+\frac{5}{2}$

∴ $\sum_{n=1}^{4}h(n)=99+20+\cancel{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}^{\,4}$

$=103+20=123$

21. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 자연수 n, p에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_n = \begin{cases} (-1)^{2n} \times 2^{13-n} & (n \neq 3p) \\ (-1)^{\cancel{n}\,2n-1} \times 2^{13-n} & (n = 3p) \end{cases}$
>
> (나) $f(x) = a_n \sin 2\pi x \quad (n-1 \leq x < n)$

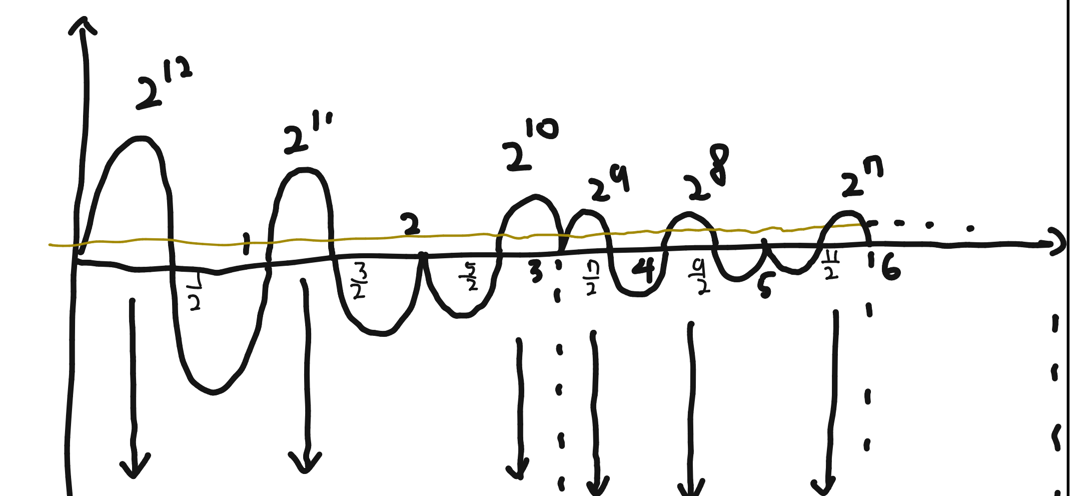
함수 $y = f(x)$와 $y = \frac{1}{k}$이 만나는 모든 점의 x좌표의 합을 $g(k)$라고 하자. $300 \leq g(k) \leq 330$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① 94 ② 95 ③ 96 ④ 97 ⑤ 98

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 ....

2^{12} 2^{11} -2^{10} 2^{9} 2^{8} -2^{7}

f(x) 그래프 그려보면 (크기는 신경쓰지 말아주세요..)



합 (대칭이용)

$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{11}{2}$ → $\frac{17}{2}$

$\frac{13}{2} = \frac{1}{2}+6$, $\frac{17}{2} = \frac{5}{2}+6$, $\frac{23}{2} = \frac{11}{2}+6$ → $\frac{17}{2} + \underbrace{6 \cdot 3}_{18}$

$\frac{17}{2} + 18 \cdot 2$, $\frac{17}{2} + 18 \cdot 3$

이한칸당 x좌표의합을 b_n이라하자.

$b_n = 18n - \frac{19}{2}$

$\Rightarrow S_n = 18 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{19}{2}n = 9n^2 - \frac{1}{2}n$ → 모든 x좌표 합.

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 < 300$

$S_6 = 321 \Rightarrow$ 범위에 포함. $\Rightarrow$ 이때 상황 지켜보기.

뒷장에서 풀이계속.

단답형

22. $\log_2 3 \times \log_3 4$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{2}$

$\frac{\ln 3}{\ln 2} \times \frac{2\ln 2}{\ln 3} = 2$

23. $-5 \leq x \leq 1$에서 정의된 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$의 최댓값을 구하시오. [3점]

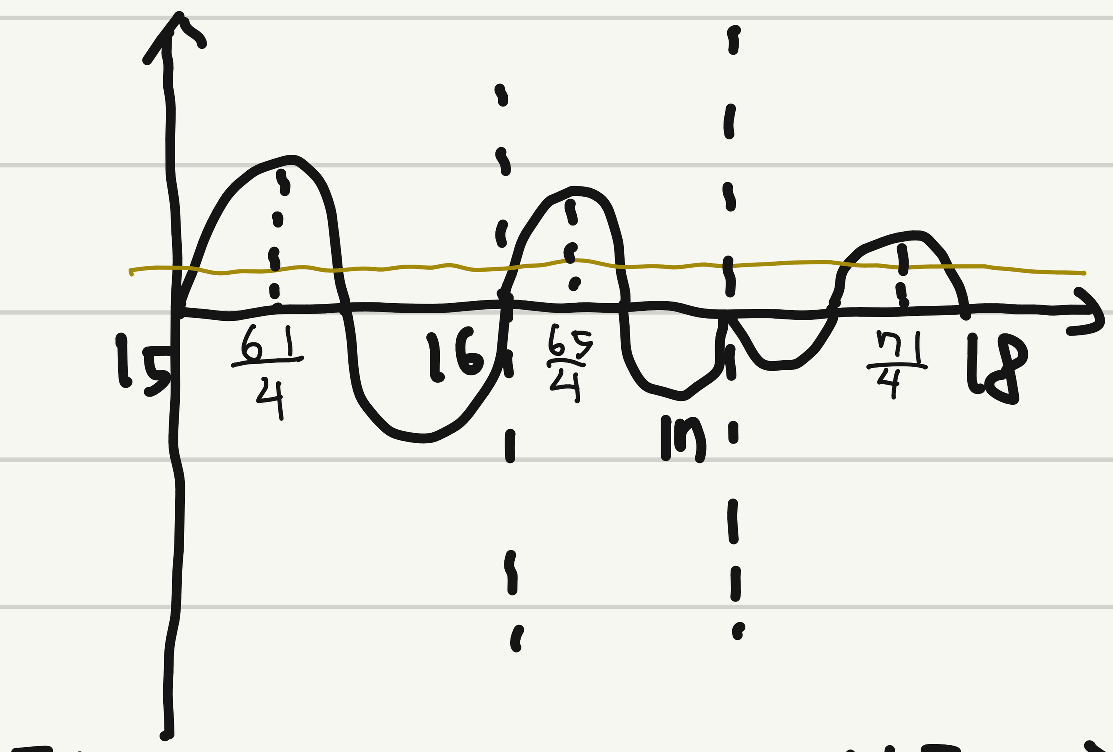
$\boxed{33}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + 1 = 32 + 1 = 33$

$\boxed{21}$ b_n에 $n=6$ 대입

$b_6 = 18\cdot 6 - \frac{19}{2} = \frac{197}{2}$ ⇒ 여섯 번째 칸에서 조화묘합.

여섯번째 칸:



합: α $\quad$ $\alpha+2$ $\quad$ $\alpha+5$ ⇒ 주기성 이용

(라고 두자

$3\alpha + 7 = \frac{197}{2}$

$3\alpha = \frac{183}{2}$ $\quad$ $\alpha = \frac{61}{2}$

if₁) k이 여섯번째 칸의 첫 봉우리와 접할 시

$g(k) = 321 - \frac{197}{2} + \frac{61}{4} < 300$

$\quad 98.\cdots \quad 15.\cdots$

if₂) k이 〃 〃 두번째 〃 〃

$g(k) = 321 - (2\alpha+7) + \frac{65}{4} < 300$

if₃) k이 〃 〃 세번째 〃 〃

$g(k) = 321 - \frac{71}{2} + \frac{71}{4} = \frac{1213}{4} = 303\frac{1}{4}$ ⇒ 범위 o

if₄) k이 〃 〃 〃 봉우리보다 조금만 더 위에 있으면

$g(k) = 303\frac{1}{4} - \frac{71}{4} < 300$ 임!

∴ 시작은 세번째 봉우리와 접할 때!

if₅) k이 그 다음 봉우리와 접할 시

$g(k) = 321 + \frac{73}{4} > 330$

∴ $300 \le g(k) \le 330$ 이 만족되려면

세번째 봉우리(접) ~ 그 다음 봉우리(접) 전까지임.

봉우리 3개를 한 묶음으로 볼 때 (b_n처럼!)

세 번째 봉우리의 진폭이 $\frac{1}{2^3}$배 됨.

∴ $n=6$일 때 세 번째 봉우리의 진폭은 $2^{10}\cdot\left\{\frac{1}{(2^3)^5}\right\} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

그 다음 〃 〃 $= \frac{1}{64}$

∴ $32 \le k < 64$

k 최대: 63 $\quad$ ∴ $63+32 = \boxed{95}$

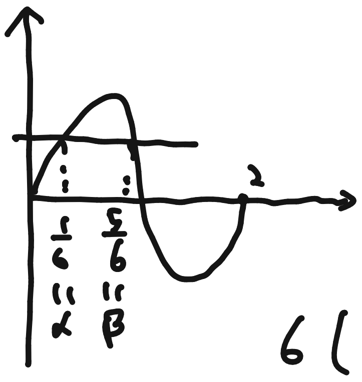
k 최소: 32

24. $0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $y = \sin \pi x$가 부등식

$$\sin \pi x \ge \frac{1}{2}$$

을 만족시키는 해의 범위를 $\alpha \le x \le \beta$라고 할 때, $6(\beta - \alpha)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$



$6\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)$

$= 4$

25. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합인 S_n에 대하여

$S_{10} = 10$, $S_{20} = 60$

$\boxed{150}$

일 때, S_{30}의 값을 구하시오. [3점]

$S_{20} = S_{10} + (a_{11} + \cdots + a_{20})$

$\parallel$

$(a_1 + \cdots + a_{10}) + 100d$

↳ 10d 가 10개

$= 10 + 10 + 100d = 60$

$100d = 40$

$d = \frac{2}{5}$

$S_{30} = S_{20} + (a_{21} + \cdots + a_{30})$

$\parallel$

$(a_1 + \cdots + a_{10}) + 200d$

$= 60 + 10 + 80$

$= 150$

26. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} \frac{xf(x) - 12}{(x-1)(x+10)} = 2$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\Rightarrow f(1) = 12$

$\boxed{24}$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$

$f(1) = a + b + 2 = 12$

$b = 10 - a$

$f(x) = 2x^2 + ax + (10 - a)$

$xf(x) - 12 = 2x^3 + ax^2 + (10-a)x - 12$

$= 2\left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{(10-a)}{2}x - 6\right)$

$= 2(x-1)\left(x^2 + \left(\frac{a}{2} + 1\right)x + 6\right)$

$\lim_{x \to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}\left(x^2 + \left(\frac{a}{2}+1\right)x + 6\right)}{\cancel{(x-1)}(x+10)} = \frac{2\left(8 + \frac{a}{2}\right)}{11} = 2$

$8 + \frac{a}{2} = 11$

$\frac{a}{2} = 3$

$a = 6$

$b = 4$

$\therefore f(x) = 2x^2 + 6x + 4$

$f(2) = 8 + 12 + 4$

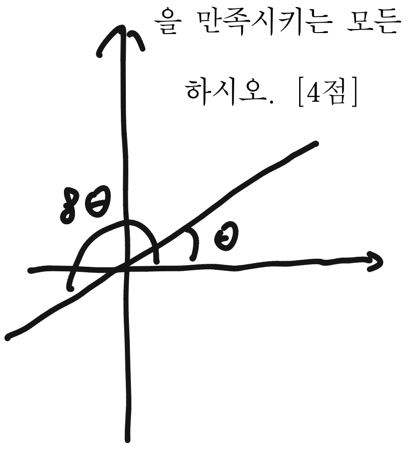
$= 24$

27. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 각 θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 한 직선 위에 있고 방향이 반대일 때,

$$\cos(\theta+\alpha)=\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 모든 $\alpha\ (0<\alpha\le 4\pi)$의 합은 $\frac{q}{p}\pi$다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{131}$

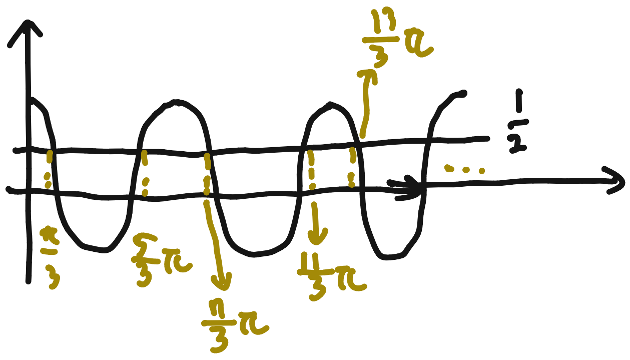


$7\theta=(2n-1)\pi$

$\theta=\frac{(2n-1)}{7}\pi$

$=\frac{\pi}{7},\ \frac{3\pi}{7}$

① $\theta=\frac{\pi}{7}$



$\alpha=\frac{\pi}{3}-\theta,\ \frac{5}{3}\pi-\theta,\ \frac{7}{3}\pi-\theta,\ \frac{11}{3}\pi-\theta$

$=\frac{4\pi}{21},\ \frac{32\pi}{21},\ \frac{46\pi}{21},\ \frac{74\pi}{21}$

마찬가지로 $\theta=\frac{3}{7}\pi$ 해보면

$\alpha=\frac{26}{21}\pi,\ \frac{40}{21}\pi,\ \frac{68}{21}\pi,\ \frac{82}{21}\pi$

전체 합 : $\frac{372}{21}\pi=\frac{124}{7}\pi$

$124+7=131$

28. 20보다 작은 자연수 m과 공차가 각각 $d_1,\ d_2\ (d_1<d_2)$이고 모든 항이 정수인 두 등차수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $d_1d_2=-6$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{10}|a_k|=89,\ \sum_{k=1}^{m}a_k=65$

$d_1=-1,\ d_2=6$ or $d_1=-3,\ d_2=2$ or $d_1=-2\ \ d_2=3$ or $d_1=-6\ \ d_2=1$

$\boxed{16}$

$a_1+b_1=1$일 때, $|a_{12}|+|b_{12}|$의 값을 구하시오. [4점]

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m(2a_1+(m-1)d_1)}{2}=65=5\cdot13$

$\underbrace{m}_{정수}(\underbrace{2a_1+(m-1)d}_{정수})=2\cdot5\cdot13$

$\therefore m=2,5,10,13$ 중 하나.

① $m=2$

$2a_1+d_1=65$

$\Rightarrow d_1$이 뭐든 $\sum_{k=1}^{10}|a_k|\ne89$

② $m=5$

$\Rightarrow 2a_1+4d=26$

$a_1+2d=a_3=13$

1) $d_1=-1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}|a_k|\ne89$

2) $d_1=-2$

$\Rightarrow$ 〃 $=82\ne89$

3) $d_1=-3$

$\Rightarrow$ 〃 $=85\ne89$

4) $d_1=-6$

$\Rightarrow$ 〃 $=150\ne89$

③ $m=10$

$(2a_1+9d)=13$

① $d_1=-1$

$2a_1=22\ \ a_1=11$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}|a_k|\ne89$

② $d_1=-2$

$\Rightarrow$ 〃 $\ne89$

③ $d_1=-3\Rightarrow a_1=20$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}|a_k|=89$

$\therefore a_1=20,\ b_1=-19$

$d_1=-3\ \ d_2=2$

$|a_{12}|=13$

$|b_{12}|=3$

$13+3=\boxed{16}$

④ $m=13\Rightarrow$ 마찬가지로 모순

→ 뒷강에서풀이.

29. 두 자연수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

$$1 \le a \le 5 \quad , \quad 2 \le b \le 5$$

$\boxed{11}$

세 직선 $x=a$, $x=a+50$, $y=\log_b a$와 곡선 $y=\log_b x$으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 120이하인 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

① $b=2$

$y=\log_2 x$ 위 y좌표가 정수인 점

(1, 0)
(2, 1)
(4, 2)
(8, 3)
(16, 4)
(32, 5)

$a=1$, (1, 0) ⋯ (51, 0)
(2, 1) ⋯ (51, 2)
⋮
(32, 5) ⋯ (51, 5)

⇒ 51+50+48+44+36+20
=249

$a=2$, (2, 1) ⋯ (51, 1)
⋮
(32, 5) ⋯ (51, 5)
⇒ 51+49+45+37+21
= 249−51+5=203

$a=3$, (3, 2) ⋯ (51, 2)
⋮
(32, 5) ⋯ (51, 2)
⇒ 51+46+38+22
= 203−49+3=157

마찬가지로
$a=4$ ⇒ 160
$a=5$ ⇒ 115
⇒ (5, 2) 1개

② $b=3$

$y=\log_3 x$ 위 y좌표가 정수인 점

(1, 0)
(3, 1)
(9, 2)
(27, 3)

$b=2$일때와 마찬가지로 구하자!

$a=1$ 51+49+43+25=168
$a=2$ 51+44+26=168−49+2=121
$a=3$ 51+45+27=121+2=123
$a=4$ 51+28=123−45+1=79
$a=5$ 51+29=79+1=80

(4, 3)
(5, 3) 2개

30. 함수 $f(x)=a(x+5)(x-b)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-5 < x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}f(x) & (x \le -5,\ x > 0) \end{cases}$$

$$g(x)\begin{cases} -\frac{1}{2}f(x) & (x \le -5) \\ f(x) & (-5 < x \le 0) \\ -\frac{1}{2}f(-x) & (x > 0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(x) \ge -9$
>
> (가) 모든 실수 x에 대하여 [redacted]이다.
>
> (나) $|g(x)|=c$를 만족시키는 실근[redacted]
> [redacted]. 의 개수를 $A(c)$라 할 때,
> $\lim_{c\to 10-} A(c) \neq \lim_{c\to 10+} A(c)$이다.

실수 t에 대하여 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to\alpha-} h(t) \neq \lim_{t\to\alpha+} h(t)$$

인 모든 실수 α을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)이라 할 때, $8(\alpha_2+\alpha_5)$를 구하시오.

(단, a, b는 0이 아닌 정수이다.) [4점]

③ $b=4$

앞과 마찬가지로 구하자.

$a=1$ 51+48+36=135
$a=2$ 51+37=135−48+1=88
↕
$a=5$

모두 120이하.

⇒ (2, 4) (3, 4) (4, 4) (5, 4) 4개.

④ $b=5$

$a=1$ 51+47+27=125
$a=2$ 51+28=125−47+1=79
↕
$a=5$

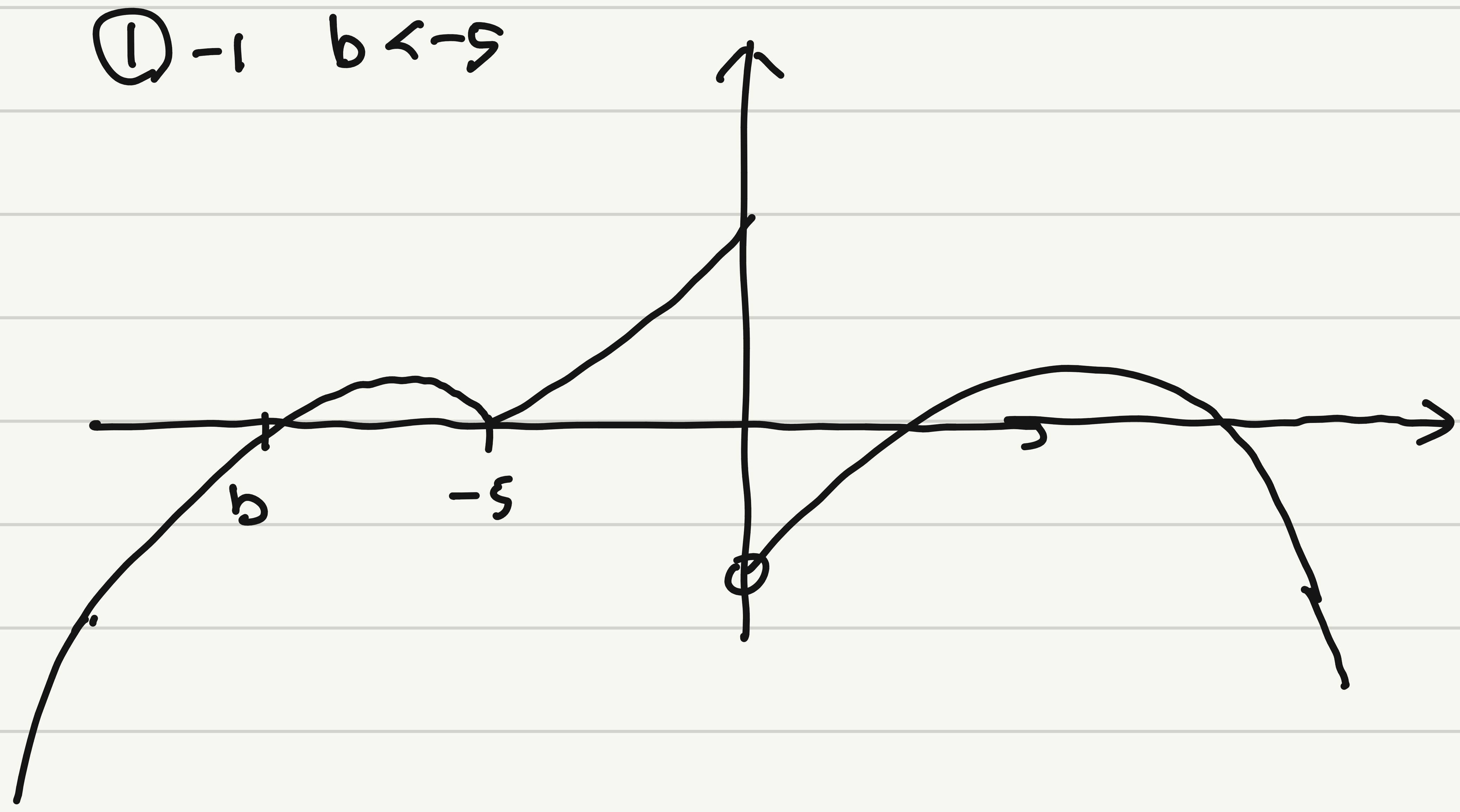
⇒ (2, 5) (3, 5) (4, 5) (5, 5) 4개

∴ 1+2+4+4=$\boxed{11}$

$\boxed{30}$

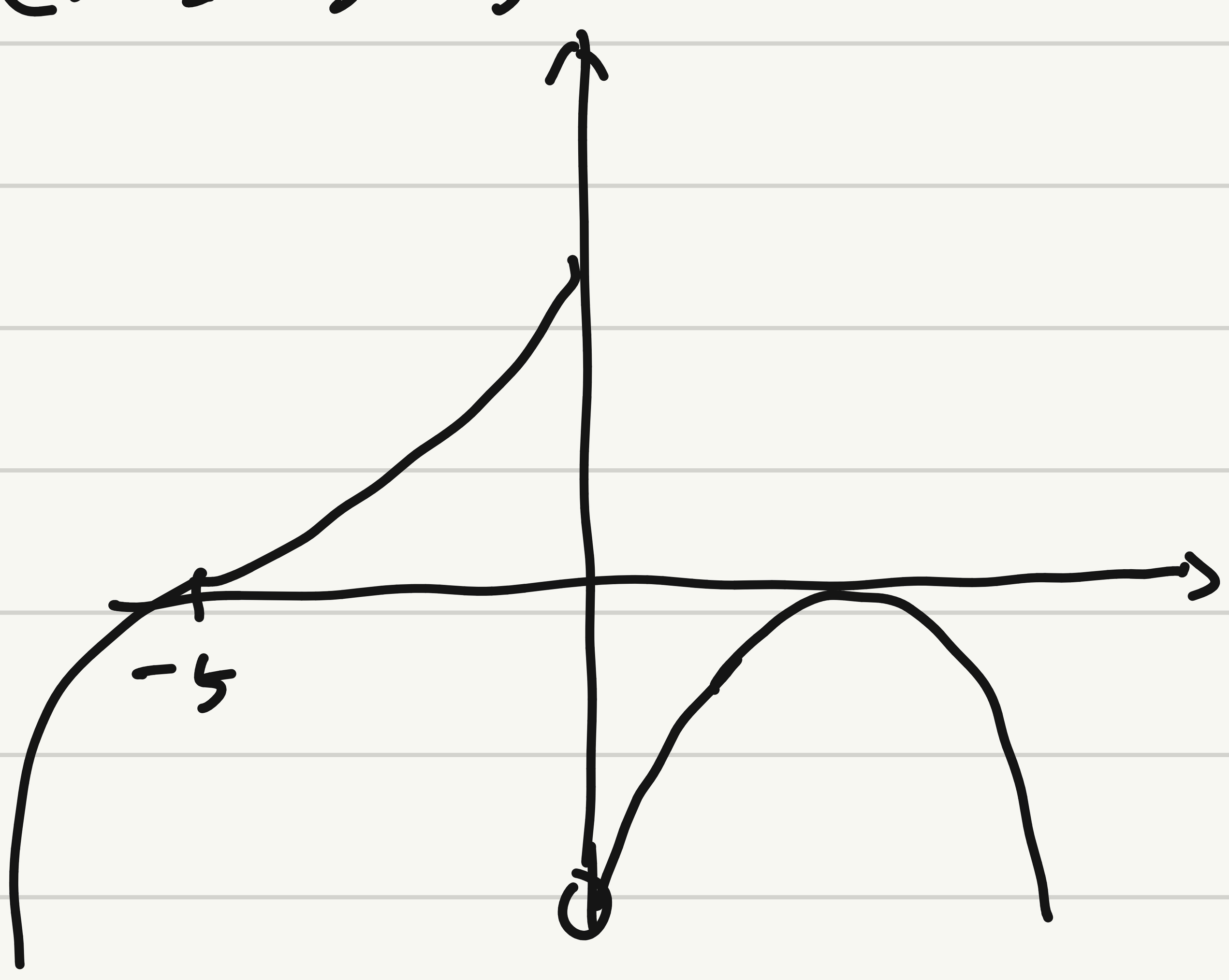
① $a>0$ 일때 $g(x)$ 그래프

①-1 $b<-5$



$\Rightarrow$ (가) 조건 위배.

①-2 $b=-5$

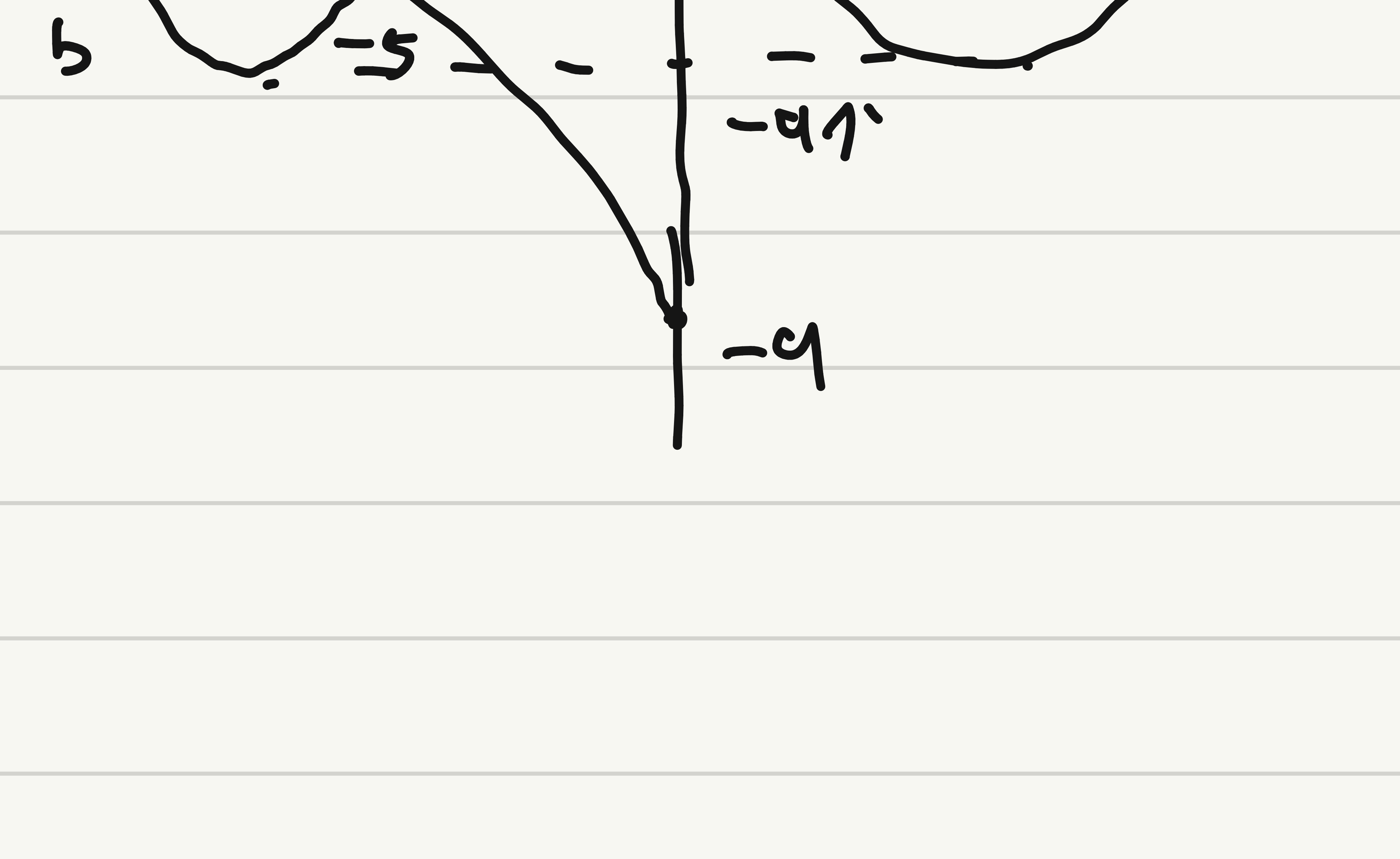


$\Rightarrow$ (가) 조건 위배

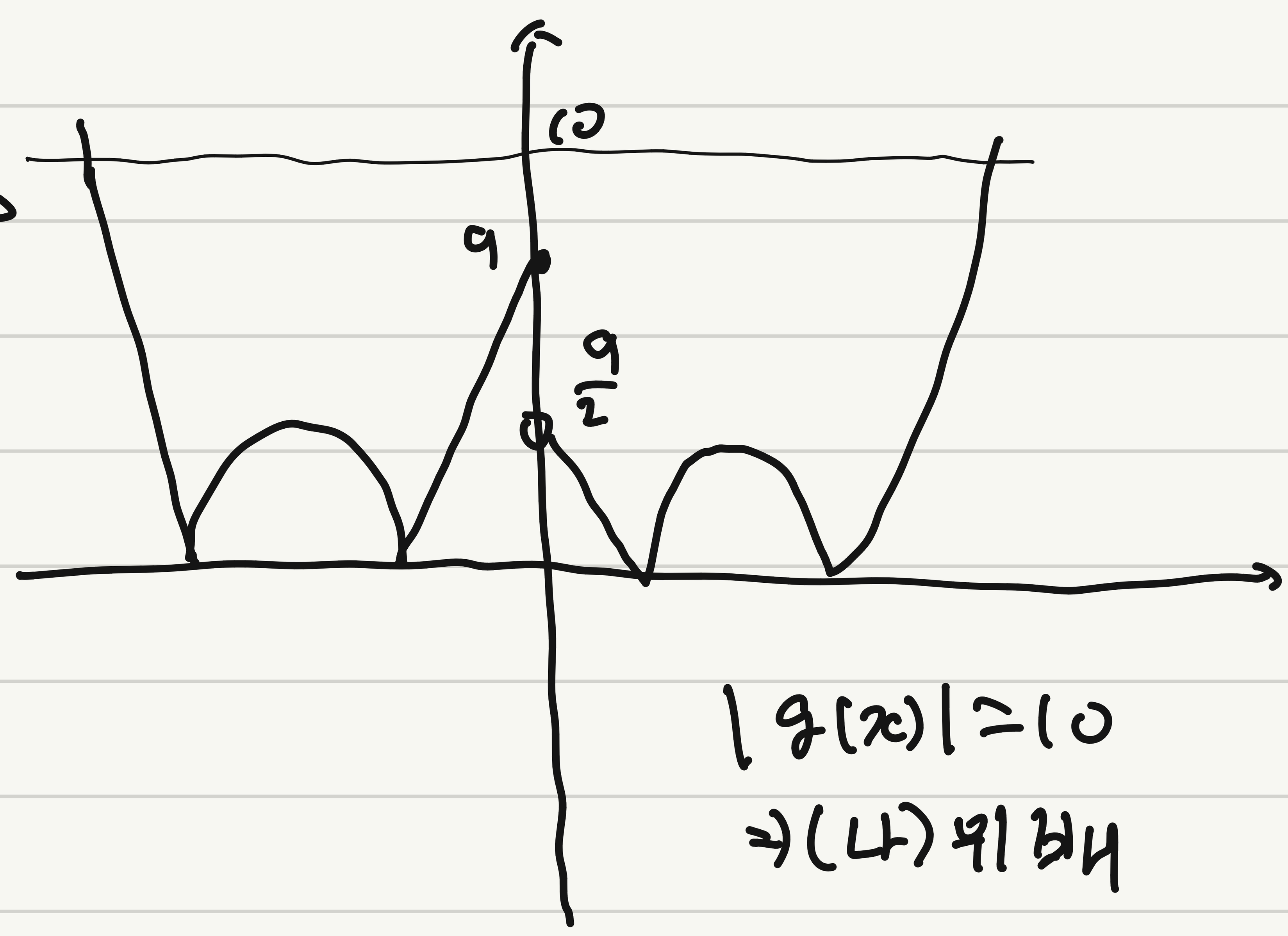
b가 $-5<b<0$, $b>0$ 이어도 마찬가지. $\therefore a<0$ 이다.

② $a<0$ 일때

②-1 $b<-5$



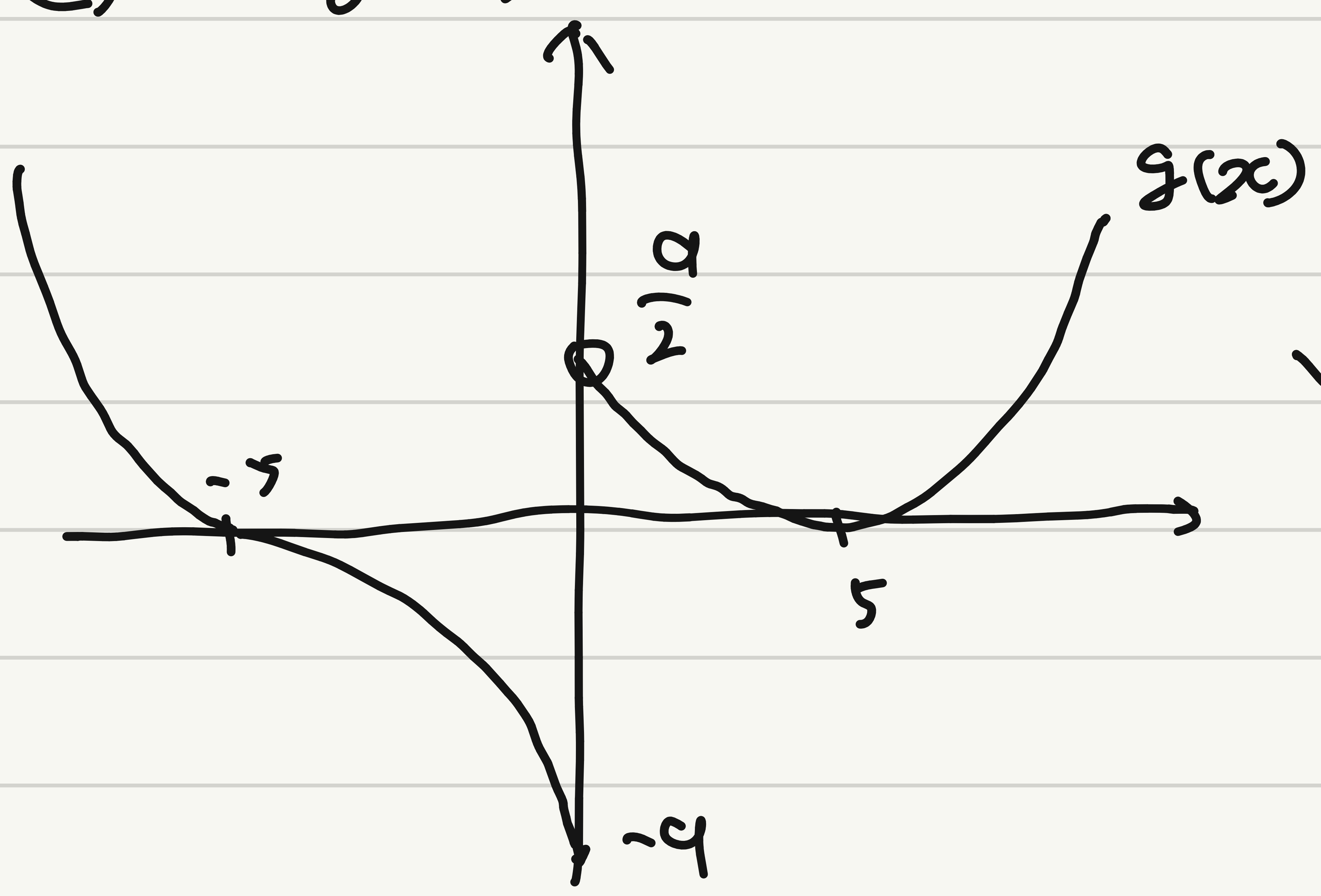
이 그래프 여야만 함.

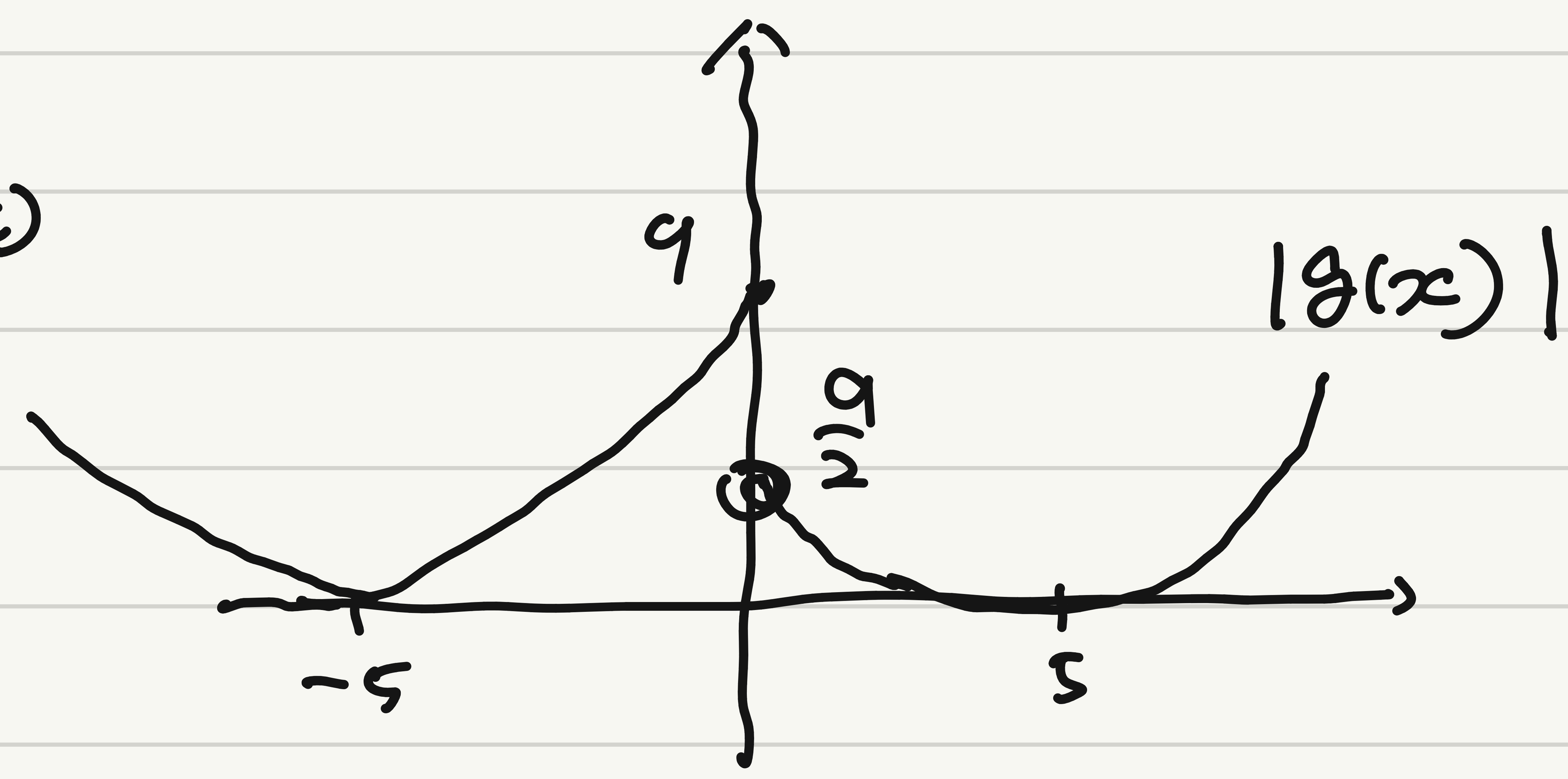


$|g(x)|=10$

$\Rightarrow$ (나) 위배

② -2 $b=-5$

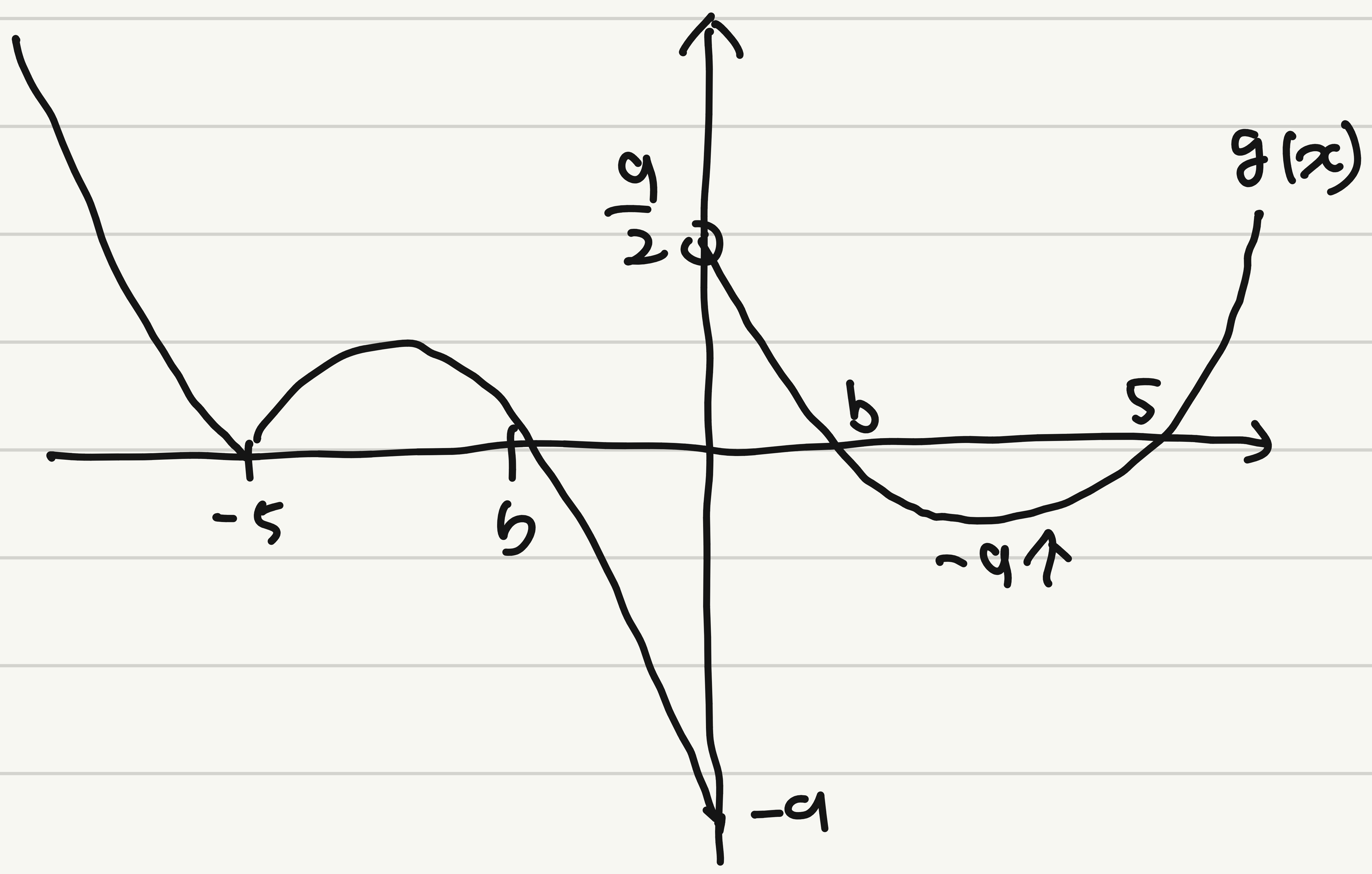




=) 이 그래프 여야만함

=) ②-1 과 마찬가지로 (나) 조건 위배

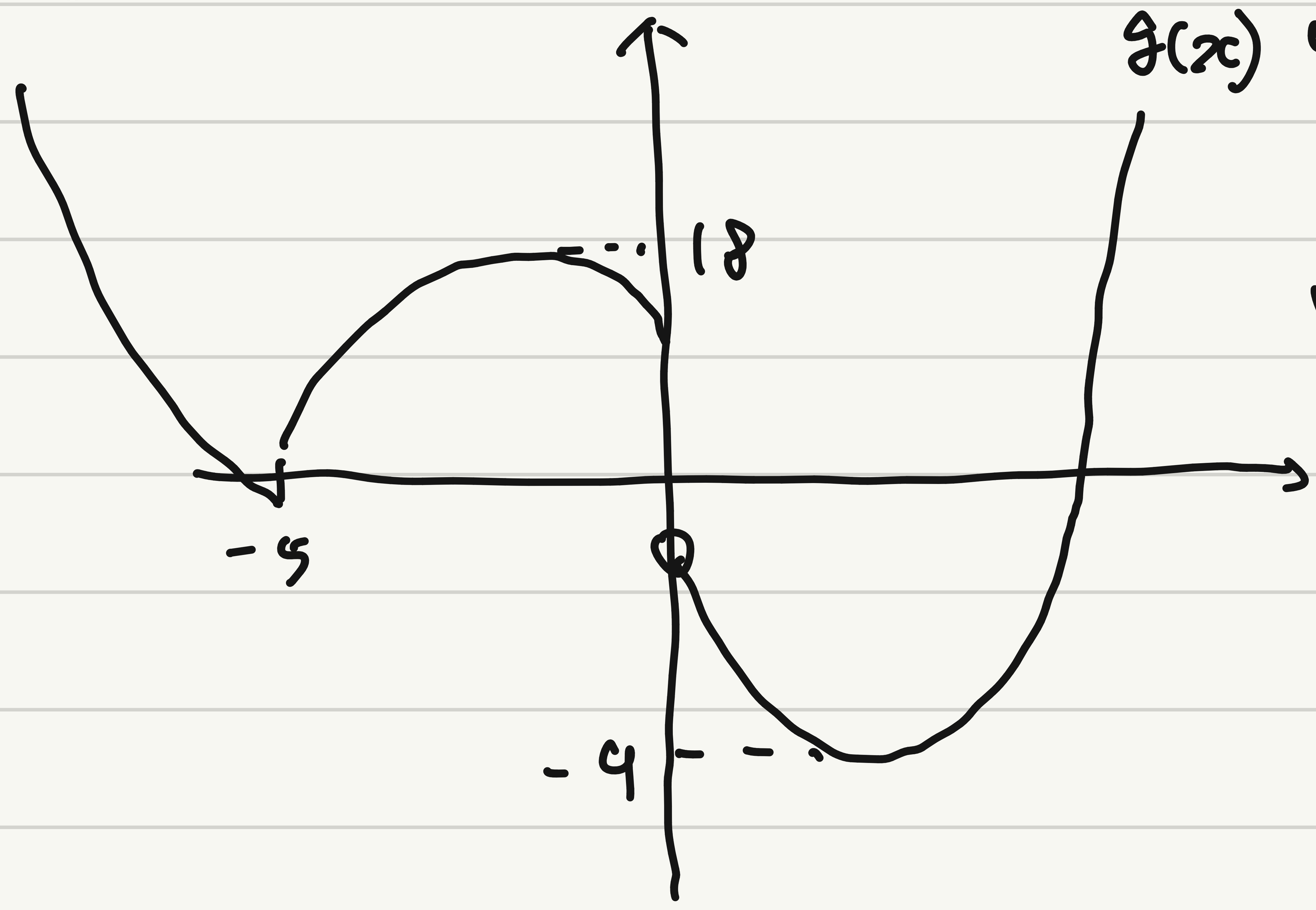
② -3 $-5<b<0$



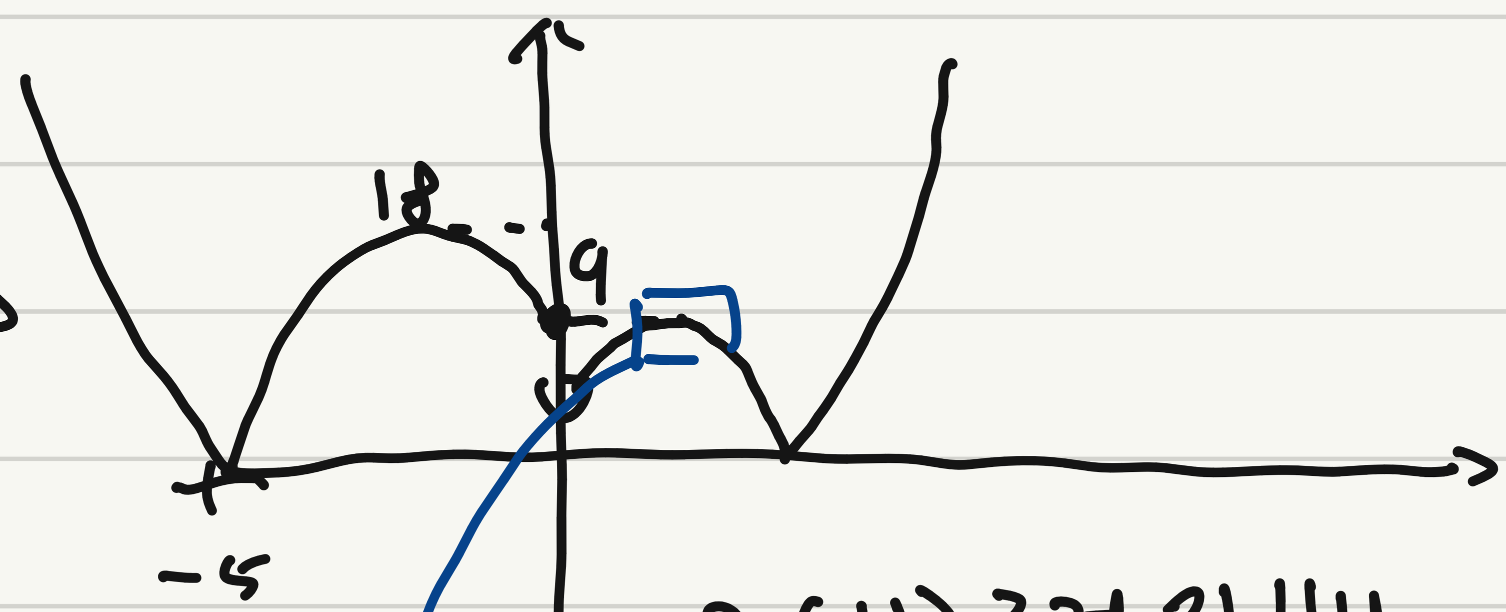
=) 이 그래프 여야만함.
but, (나) 조건 위배

∴ $a<0$, $b>0$ 만 가능!

② -4 $b>0$



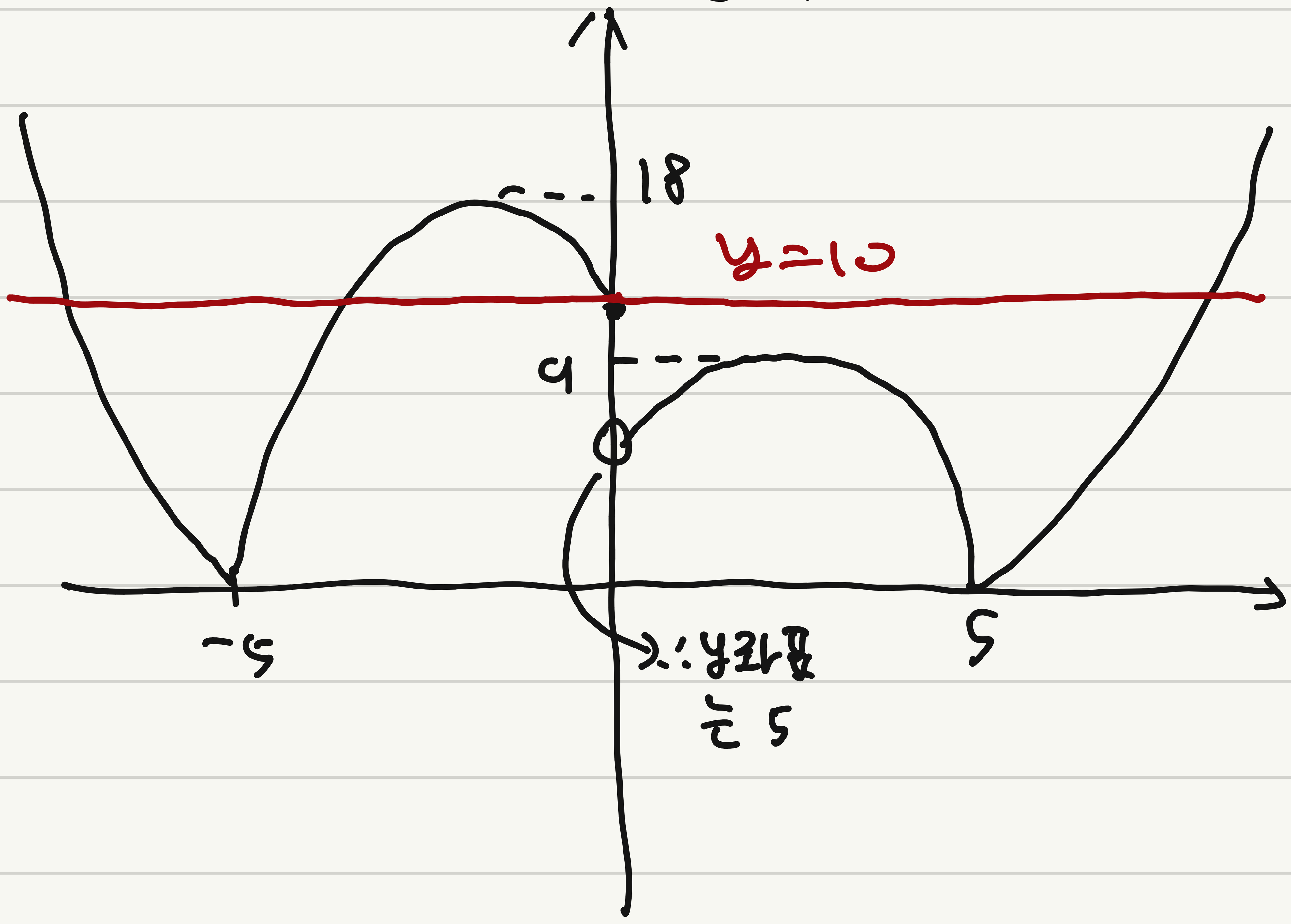
g(x) 일시 |g(x)| 의 그래프 경우의 수 생각



=) (나) 조건 위배.

이 봉우리가 위로 더 올라가도
(나) 조건 위배
=> 밑으로 내려가.

$|g(x)|$ 그래프는 이렇게 나온다. $y=c$ 를 그어 봤을때



$\Rightarrow$ 이 상황이어야만 (나)조건 성립.

$\therefore f(0)=10$이다.

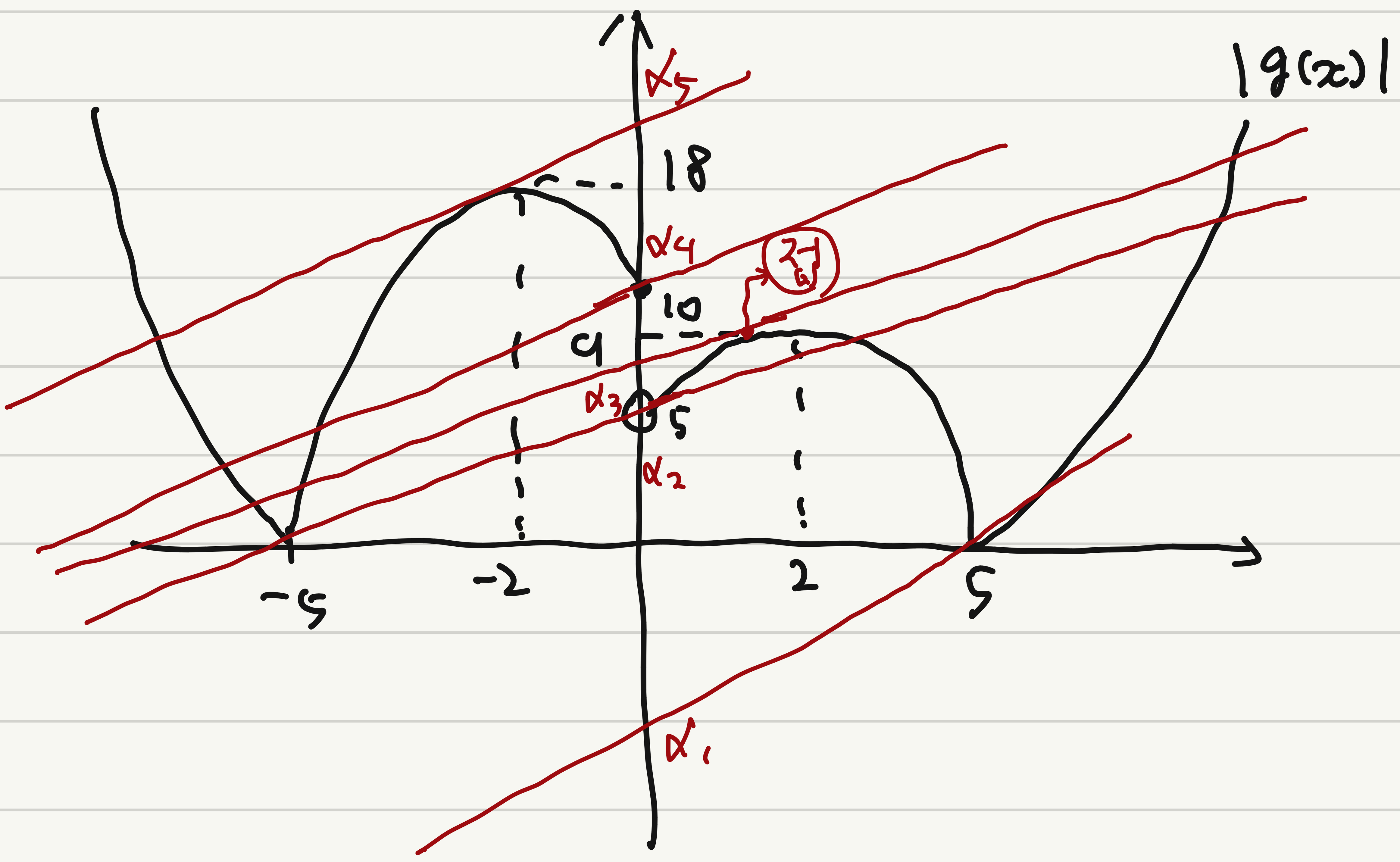
$f(0)=5a(-b)$
$=-5ab=10$
$ab=-2$
$a=-2,\ b=1$
or
$a=-1,\ b=2$

i f) $a=-1,\ b=2$ 일시
$f(x)=-(x+5)(x-2)$
$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{49}{4}\neq 18$ $\therefore a=-2,\ b=1$

+) $a=-2,\ b=1$ 이면 $f(-2)=18$ 이나옴.

$\therefore f(x)=-2(x+5)(x-1)=-2(x^2+4x-5)=-2x^2-8x+10$

이제 $|g(x)|$와 $y=x+t$의 그래프를 그려보자. (뒷장)



⇒ 이렇게 α_m이 특정된다. $\therefore \alpha_2 = 5$

α_5는 $f(x)$와 $y=x+t$의 접점이니

$$-2x^2-8x+10=x+t$$

$$2x^2+9x+t-10=0$$

$$D=81-8(t-10)=161-8t=0$$

$$8t=161$$

$$t=\frac{161}{8}=\alpha_5$$

$$\therefore 8(\alpha_2+\alpha_5)=8\cdot5+8\cdot\frac{161}{8}=40+161=201$$