03

2010학년도 수능(나형) 25번

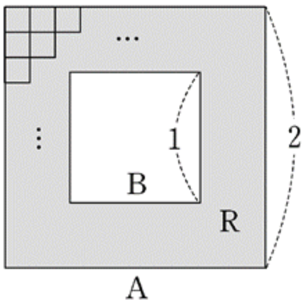
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

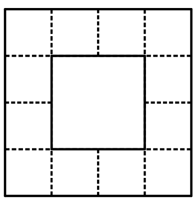
이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$이다.

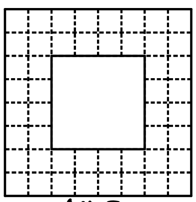
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. [4점] 50



n이 짝수·홀수일때로 나누어 a_n을 구한다.

i) n : 짝수일 때


n=2일 때


n=4일 때

$a_2 = a_{2\times1}$ = 전체 - 내부 $= (4\cdot1)^2 - (2\cdot1)^2 = 12$

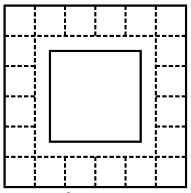
$a_4 = a_{2\times2} = (4\cdot2)^2 - (2\cdot2)^2 = 48$

⋮

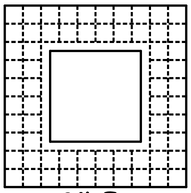
$a_{2n} = (4n)^2 - (2n)^2 = 12n^2$

03

ii) n : 홀수일 때



$n=3$일 때



$n=5$일 때

$a_3 = a_{2\times1+1} = \{2(2\times1+1)\}^2 - (2\times1+2)^2 = 20$

$a_5 = a_{2\times2+1} = \{2(2\times2+1)\}^2 - (2\times2+2)^2 = 64$

$\vdots$

$a_{2n+1} = \{2(2n+1)\}^2 - (2n+2)^2 = 12n^2 + 8n$

$\therefore a_{2n-1} = 12n^2 - 16n + 4$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{16n-4} = \frac{1}{2} = c$$

$\therefore 100c = 50$