지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\sin(a\pi x)+2b\,(0 \le x \le 1)$$

이 있다. 집합 $\{x \mid \log_2 f(x)$는 정수$\}$의 원소의 개수가 8이 되도록 하는 서로 다른 모든 a의 값의 합은?
〔2023학년도 경찰대 17〕

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

1. 정답 ① 〔2023학년도 경찰대 17〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 문제해석

a, b는 자연수인데 $f(x)=\sin(a\pi x)+2b\,(0 \le x \le 1)$가 있답니다. 일단 주기가 $\dfrac{2}{a}$이고 최댓값이 $2b+1$, 최솟값이 $2b-1$인 함수죠? 이런 함수는 $0 \le x \le 1$ 범위에서 짤라내면 $f(x)$가 되는 거예요.

이때 집합 $\{x \mid \log_2 f(x)$는 정수$\}$의 원소의 개수가 8이 되도록 하는 서로 다른 모든 a의 값의 합을 구하랍니다.

일단 해석부터 해볼게요. $\log_2 f(x)=k$ (k는 정수)라고 하면 $f(x)=2^k$가 되죠? 결국 $f(x)$의 함숫값이 2의 제곱수가 되는 모든 x가 집합의 원소가 되는 구조네요. 이게 8개여야 해요.

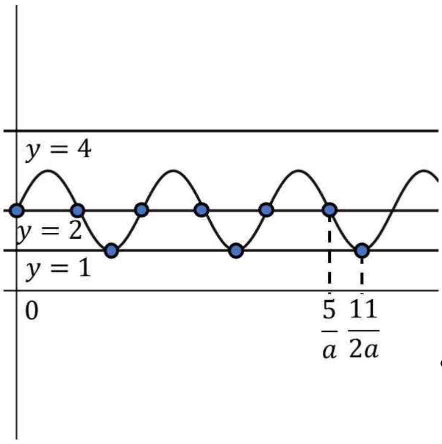
다시 말하면 $\cdots$, $y=1$, $y=2$, $y=4$, $y=8$, $\cdots$과 만나는 점의 개수가 총 8개여야 한다는 말이죠. 물론 $\cdots$, $y=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$도 있지만 어차피 최솟값인 $2b-1$에서 b가 자연수라 만날 일은 없습니다. 무시해도 되겠죠?

잘 생각해보세요. a가 커질수록 주기가 작아지는 구조에요. 위아래로 왔다리갔다리하는 횟수가 많아지니까 당연히 $y=1$, $y=2$, $y=4$, $y=8$, $\cdots$과 만나는 점이 많아지겠죠.

그리고 최댓값과 최솟값의 차이는 2에요. $y=1$, $y=2$, $y=4$ 요런 숫자가 작은 부분에서는 주기가 작더라도 만나는 횟수가 증가할 수 있지만 $y=8$을 넘어가면 위아래의 차이가 4 이상이 나기 시작하기 때문에 하나만 만날 수 있습니다. 이러면 주기를 반복하는 횟수가 늘어나서 8번을 채우는 방법으로 가야겠네요.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

그럼 천천히 숫자 넣어보면서 가봅시다. 먼저 함숫값의 구간을 결정한 다음 주기를 결정하는 게 좋겠어요. 주기는 가능한 숫자의 범위가 훨씬 넓을 테니까요. 먼저 $b=1$인 경우 $f(x)=\sin(a\pi x)+2\,(0 \le x \le 1)$인데

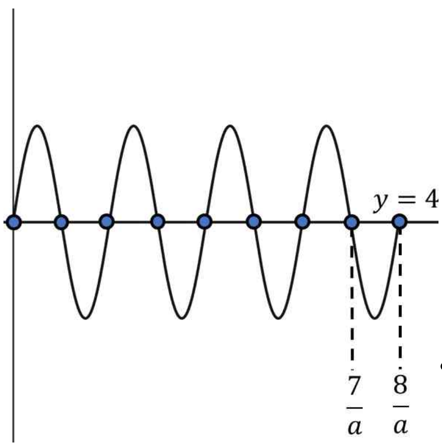


이렇게 설정할 수 있습니다. 8개를 만족시키려면 $x=1$은

$\frac{5}{a} \le 1 < \frac{11}{2a}$의 범위에 있어야 해요. $\frac{11}{2a}$에 등호가 없는 건 그렇게 되면 만나는 점의 개수가 9개가 되거든요.

따라서 $5 \le a < \frac{11}{2}$이고 $a=5$입니다.

$b=2$일 때를 보죠. $f(x)=\sin(a\pi x)+4\,(0 \le x \le 1)$입니다. 4에서 위아래로 1씩 최대와 최소가 되니까 여기부터는 위와 같이 $y=1$과 $y=2$에 동시에 만나는 것이 불가능합니다. $y=4$ 하나에서만 만나야 해요.



이러면 $\frac{7}{a} \le 1 < \frac{8}{a}$이어야 합니다. $7 \le a < 8$이고 $a=7$이네요.

이제 여러분 생각해보세요. 앞으로는 계속 $y=4$ 하나에서만, $y=8$ 하나에서만, $y=16$ 하나에서만.... 만나야 해요. 그러면 모든 경우가 위의 경우와 동일한 거잖아요. 단지 y값만 달라질 뿐이죠. $b=1$을 제외한 모든 경우에서 $a=7$만 가능합니다. 따라서 모든 a의 값의 합은 $5+7=12$입니다. 답은 ①번이네요.

2. 함수

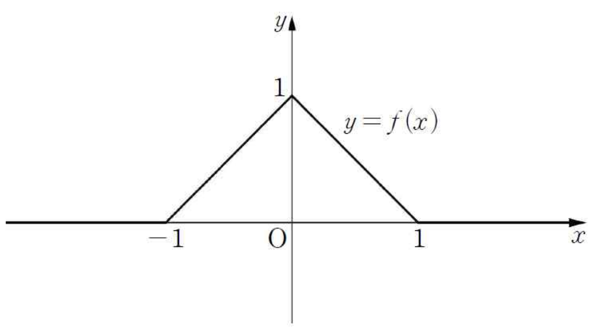
$$f(x)=\begin{cases} 1+x & (-1 \le x < 0) \\ 1-x & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\{2x-f(t)\}dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값은? 〔2023학년도 경찰대 18〕

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{5}{12}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{7}{12}$



2. 정답 ② 〔2023학년도 사관학교 12〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=\begin{cases} 1+x & (-1\le x<0) \\ 1-x & (0\le x\le 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 가 있는데 $g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\{2x-f(t)\}dt$의 최솟값을 구하랍니다.

먼저 $g(-1)=0$입니다. 그리고 우리가 적분하는 변수는 t에요. 그러면 안에 있는 $2x$는 상수니까 밖으로

빼야겠죠? 따라서 $g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\{2x-f(t)\}dt=2x\int_{-1}^{x} f(t)dt-\int_{-1}^{x} f(t)^2 dt$입니다.

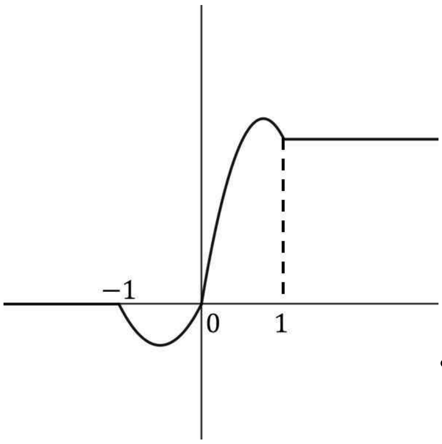
그리고 미분해볼까요? $g'(x)=2xf(x)+2\int_{-1}^{x} f(t)dt-f(x)^2$입니다.

이때 $f(x)=\begin{cases} 1+x & (-1\le x<0) \\ 1-x & (0\le x\le 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 이니까 $2xf(x)=\begin{cases} 2x+2x^2 & (-1\le x<0) \\ 2x-2x^2 & (0\le x\le 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 이죠?

그리고 $2\int_{-1}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ x^2+2x+1 & (-1\le x<0) \\ -x^2+2x+1 & (0\le x\le 1) \\ 2 & (x>1) \end{cases}$입니다.

$-f(x)^2=\begin{cases} -x^2-2x-1 & (-1\le x<0) \\ -x^2+2x-1 & (0\le x\le 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 이구요. 모두 더하면

$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ 2x^2+2x & (-1\le x<0) \\ -4x^2+6x & (0\le x\le 1) \\ 2 & (x>1) \end{cases}$입니다. 그래프를 그려보면



이렇게 되네요. 이걸 적분해서 $g(x)$의 최솟값을 그려야 합니다.

이거 대충 생각해보세요. 쭉 0이다가 -1에서 0까지만 감소하다가 그 이후로는 계속 증가하는 그래프에요. 당연히 $x=0$에서 최소가 되죠. 우리는 $x=0$에서의 함수만 알면 됩니다.

$g(-1)=0$이니까 고려해서 $g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ 2x^2+2x & (-1 \le x < 0) \\ -4x^2+6x & (0 \le x \le 1) \\ 2 & (x>1) \end{cases}$를 적분하면 -1에서 0까지

$\frac{2}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$입니다. 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이네요. 답은 ②번입니다.

3. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{(x-3)g(x)} = k$ (k는 0이 아닌 상수)
(다) $\lim_{x \to -3+} \frac{1}{g'(x)} = \infty$

$f(x)$의 차수의 최솟값이 m이다. $f(x)$의 차수가 최소일 때, $m+k$의 값은? 〔2023학년도 경찰대 19〕

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{43}{12}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ $\frac{49}{12}$ ⑤ $\frac{13}{3}$

3. 정답 ④ 〔2023학년도 경찰대 19〕

1) 조건해석, 함수극한은 논리다

$f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 다항함수인데 $y=f(x)$를 y축 대칭한 함수가 $g(x)$랍니다. 그러면 $g(x)=f(-x)$이죠?

(가)조건에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$의 값이 존재한답니다. 분모가 0으로 가는데 값이 존재하니까 분자도 0으로 가야겠죠? $f(1)=0$입니다. $g(x)=f(-x)$이니까 $g(-1)=0$이죠?

(나)조건에서 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k\ (k\neq0)$이랍니다. 먼저 분모가 0으로 가는데 값이 존재하니까 분자도 0으로 가야 합니다. 따라서 $f(3)=0$입니다. $g(x)=f(-x)$이니까 $g(-3)=0$이구요.

그리고 이제 생각을 해봅시다. 만약 $g(3)\neq0$이라면? 그러면 그냥

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(3)}{g(3)}=\frac{f'(3)}{f(-3)}=k$입니다.

만약 $g(3)=0$이라면? 이건 다시 생각해봐야죠. $f(x)$가 $(x-3)$이라는 인수를 적어도 두 개 가져야 할 수도 있거든요.

(다)조건에서 $\lim_{x\to-3+}\frac{1}{g'(x)}=\infty$이라고 합니다. 극한값이 무한대가 나오려면 분모가 0으로 가야하잖아요? 따라서 $g'(-3)=0$입니다. (더 구체적으로는 $\lim_{x\to-3+}g'(x)=0+$여야 합니다. $0-$가 나오면 음의 무한대가 나오거든요.) $g(x)=f(-x)$이니까 이걸 미분하면 $g'(x)=-f'(-x)$이죠? 따라서 $f'(3)=0$입니다.

어라? 아까 $\frac{f'(3)}{g(3)}=\frac{f'(3)}{f(-3)}=k$이었는데 $f'(3)=0$이면 $k=0$이잖아요? 그런데 $k\neq0$이어야 하는데요? 그럼 위아래의 같은 인수가 지워지게끔 해줘야겠네요.

2) 함수 구하기 - 인수정리

정보를 정리하면 $f(1)=g(-1)=0$이고 $f(3)=g(-3)=0$, $f'(3)=g'(-3)=0$입니다. 여기서 $f(3)=f'(3)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $(x-3)$이라는 인수를 적어도 두 개는 가져야 하잖아요?

그런데 그렇게 되면 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$에서 분자에는 $(x-3)$ 인수 적어도 두 개, 분모에는 $(x-3)$ 인수 하나가 있으니까 위아래 같은 인수를 제거하면 분자에만 $(x-3)$ 인수가 남아서 극한값을 계산하면 $k=0$이 됩니다. 이러면 안 되죠?

따라서 분모에 인수가 더 추가되어야 합니다. 다시 말하면 $g(3)=f(-3)=0$이어야 한다는 말이죠.

이제 우리가 모은 정보를 조합해서 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$를 계산해보죠. $f(3)=f'(3)=0$이고, $f(1)=f(3)=f(-3)=0$이므로 $f(x)$는 최소 4개의 인수를 가져야 합니다. $f(x)$가 사차함수라 가정해볼게요. $f(x)=a(x-1)(x-3)^2(x+3)$입니다.

$g(x)=f(-x)$이므로 $g(x)=a(x+1)(x+3)^2(x-3)$이네요.

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-1)(x-3)^2(x+3)}{a(x+1)(x+3)^2(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{12}=k$입니다. 그럼 결국 차수가 4일 때 차수가 최소가 되겠네요. $m=4$입니다. $m+k=\frac{49}{12}$이네요. 답은 ④번입니다.

4. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(a\sin^2 x - 4)\cos x + 4 \geq 0$$

을 만족시키는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.
〔2023학년도 경찰대 24〕

4. 정답 14 〔2023학년도 경찰대 24〕

1) 변수 치환

모든 실수 x에 대하여 $(a\sin^2 x-4)\cos x+4 \geq 0$를 만족시키도록 하는 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하랍니다.

일단 먼저 변수를 통일해주는 게 좋겠죠? $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 사용해서 $\cos x$로 통일해줍시다.
$(a-a\cos^2 x-4)\cos x+4 \geq 0$

그런데 이대로 다루기엔 불편함이 있어요. 다항함수로 다루는 게 훨씬 편하거든요. 그러면 치환을 해봅시다.
$\cos x=t$라고 하는 거예요. 여기서 $-1 \leq \cos x \leq 1$이죠? 따라서 $-1 \leq t \leq 1$에서
$(a-at^2-4)t+4 \geq 0$이고 정리하면 $-at^3+(a-4)t+4 \geq 0$입니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 케이스 분류

편의를 위해서 $f(t)=-at^3+(a-4)t+4$이라고 할게요. 그러면 $-1 \leq t \leq 1$의 범위에서 $f(t) \geq 0$가 되도록 해야 합니다. 일단 관찰을 해보죠.

먼저 a로 묶어볼게요. $f(t)=-at(t-1)(t+1)-4t+4$이므로 $(-1,\ 8)$, $(0,\ 4)$, $(1,\ 0)$을 확정적으로 지나는 함수입니다.

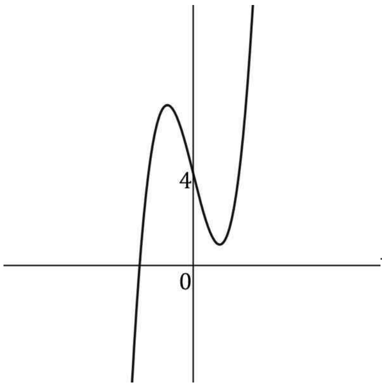
2-1) $a=0$인 경우

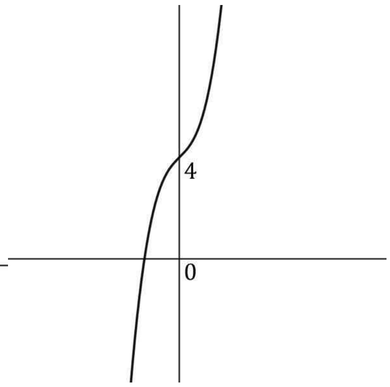
$f(t)$는 차수가 몇일까요? 만약 $a=0$이라면? $f(t)=-4t+4$가 됩니다. $t=1$에서 함숫값이 0이 되고 $-1 \leq t \leq 1$에서는 계속 $f(t) \geq 0$이 되죠. 이 경우는 가능하네요.

만약 $a \neq 0$인 경우 $f(t)$는 삼차함수의 형태입니다. 거기에 이차항이 없으니까 사실상 기함수인데 위쪽으로 $+4$만큼 움직인 형태를 띄고 있죠.

2-2) $a<0$인 경우

$a<0$인 경우 $f(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수입니다. 여기에 $(0,\ 4)$를 지나는 개형은

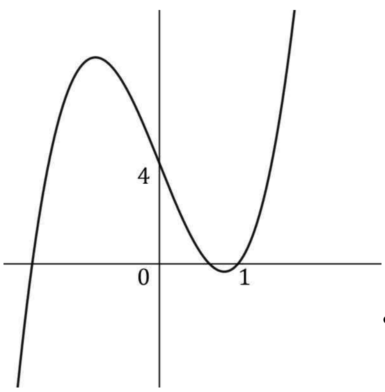




이렇게 두 개가 가능합니다. 다만 오른쪽의 계속 증가하는 개형은 불가능해요. 왜냐하면 $(-1,\ 8)$, $(0,\ 4)$, $(1,\ 0)$을 지나야 하는데 계속 증가하니까 $(1,\ 0)$은 지날 수가 없잖아요.

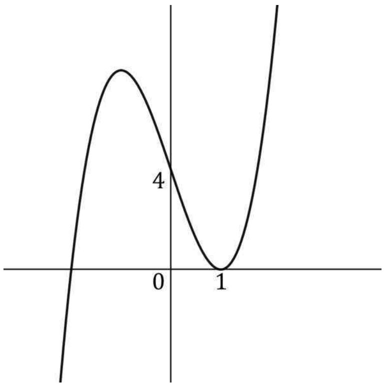
그럼 결국 지렁이같이 위아래로 왔다기갔다리하는 개형만 가능합니다. 다만 위와 같이 $t > 0$에서 t축과 만나지 않는 개형은 불가능해요.

이제 $x = 1$에서 x축과 만나야 하는데 극소가 되는 t좌표가 1보다 작다면? 1보다 작은 부분에서 t축과 만나게 되겠죠? 그러면 그 사이에서 t축 아래로 내려가는 일이 생깁니다.



이렇게 말이죠. 이러면 $-1 \leq t \leq 1$에서 $f(t) \geq 0$가 성립하지 않는 경우가 발생하죠? 따라서 극소가 되는 t좌표는 1보다 커야 합니다.

그럼 극소가 되는 t좌표가 $t = 1$이라서 $t = 1$에서 t축에 접하는 건요?



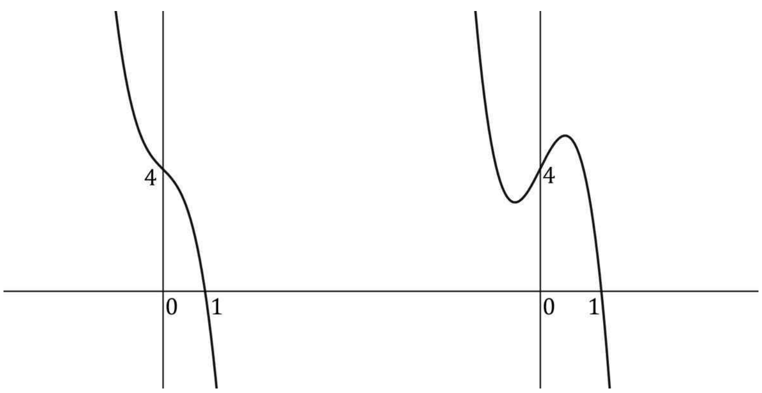
가능하네요. 결국 극소가 되는 t좌표가 1보다 크거나 같아야 합니다. 이건 다시 말하면 $t=1$에서의 미분계수는 0보다 작거나 같다는 말이죠. $t=1$에서 감소하거나 $t=1$에서 t축에 접해야 하니까요.

$t=-1$쪽은 어차피 $t=0$ 이전에 계속 위쪽으로 올라가는 데다가 $(-1,\ 8)$을 지나야 해서 계속 양수가 유지됩니다. $f(t)$는 변곡점(대칭점)이 $(0,\ 4)$라 $-1 \le t \le 0$에서 함숫값이 0 이하가 된다는 건 $0 \le t \le 1$에서 함숫값이 8을 넘어간다는 말과 같거든요. 그런데 극소가 되는 t좌표가 1보다 크거나 같아야 해서 $t=1$까지는 계속 감소하는 게 확정입니다.

$f(t)=-at^3+(a-4)t+4$이므로 미분하면 $f'(t)=-3at^2+a-4$인데 $t=1$을 넣으면 $-2a-4 \le 0$입니다. $a \ge -2$이네요. 사실상 최솟값은 $a=-2$이죠?

2-3) $a>0$인 경우

$a>0$인 경우에는 $f(t)=-at^3+(a-4)t+4$는 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수가 됩니다. 이러면 개형은



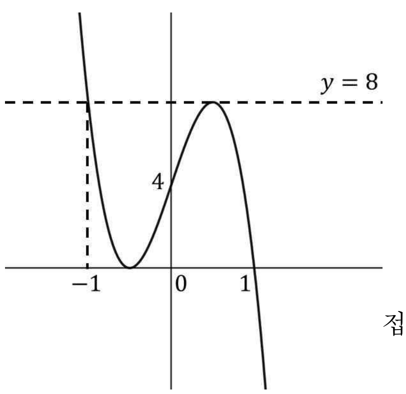
이렇게 두 가지네요. 먼저 왼쪽의 개형의 경우 $-1 \le t \le 1$에서 무조건 $f(t) \ge 0$입니다. 감소하는데 $(1,\ 0)$을 지나야 해서 그 이전까지는 쭉 0보다 커야 하잖아요. $f(t)=-at^3+(a-4)t+4$에서 항상 $f'(t)=-3at^2+a-4$이 0보다 작거나 같아야 이 개형이 나오죠? 극점이 존재하지 않는 개형이니까요. 따라서 $a-4 \le 0$이고 $a \le 4$입니다.

오른쪽의 개형의 경우 일단 $a>4$이죠? $a \le 4$이면 왼쪽 개형이 되니까요.

$0 \le t \le 1$에서는 무조건 $f(t) \ge 0$입니다. $(1,\ 0)$을 반드시 지나야 하는데 극점이 존재하므로 극대점은 $0<t<1$에서 형성됩니다. 그럼 0부터 극대점까지는 계속 증가하다가 극대점부터 $t=1$까지는 계속 감소해서 최종적으로는 0을 가지니까 $0 \le t < 1$에서는 계속 0보다 크게 되죠. 마지막 $t=1$에서 0이 되구요.

결국 $-1 \le t \le 0$만 확인하면 됩니다. 이 경우 극솟값이 0보다 크거나 같아야 $f(t) \ge 0$을 만족시키겠네요.

여기서 생각을 해보죠. a가 커질수록 극댓값과 극솟값은 점점 차이가 벌어질 거예요. 언제가 최대일까요?
우리는 최댓값만 구하면 되잖아요? 바로 t축에 접할 때입니다.



접점의 t좌표를 k라 하면 인수정리에 의하여 $f(t)$는 $(t-k)$라는 인수 두 개와 $(t-1)$이라는 인수 한 개를 가져야 하므로

$f(t)=-a(t-k)^2(t-1) \equiv -a(t^2-2kt+k^2)(t-1)=-at^3+(2k+1)t^2-ak(tk+2)t+ak^2$입니다. 그런데 이건 $f(t)=-at^3+(a-4)t+4$과 같죠? 따라서 이차항의 계수끼리 비교하면 $2k+1=0$이고, $k=-\dfrac{1}{2}$입니다.

상수항끼리 비교하면 $ak^2=\dfrac{a}{4}=4$이고 $a=16$이네요. $a=16$일 때가 최대입니다. 따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $-2+16=14$입니다.