1. $\dfrac{4}{3^{-2}+3^{-3}}$ 의 값은? [2점]

① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

$\dfrac{4}{3^{-3}(3+1)}=27$

2. 함수 $f(x)=(x^3-2x^2+3)(ax+1)$ 에 대하여 $f'(0)=15$ 일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

$3a=15$

$a=5$

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 4, \ \frac{(a_3)^2}{a_1 \times a_7} = 2$$

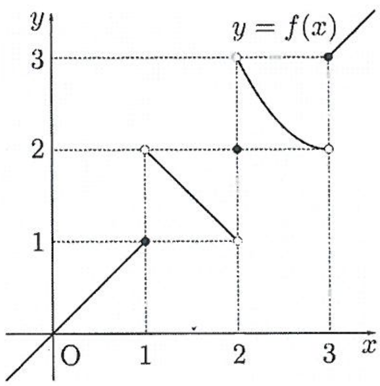
일 때, a_4의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

$\frac{a_3^2}{a_4^2} = \frac{1}{r^2} = 2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore a_4 = a_2 r^2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1+} f(x) + \lim_{x \to 3-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+2=4$

5. 이차방정식 $5x^2-x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

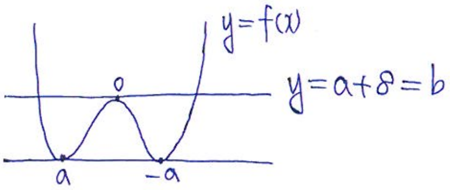
① $-\frac{12}{5}$ ② -2 ③ $-\frac{8}{5}$ ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} s+c=\frac{1}{5} \Rightarrow 1+2sc=\frac{1}{25} \Rightarrow sc=-\frac{12}{25} \\ sc=\frac{a}{5} \end{cases}$$

$\therefore a=5sc=-\frac{12}{5}$

6. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+ax^2+b$가 $x=a$에서 극소이고, 극댓값 $a+8$을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

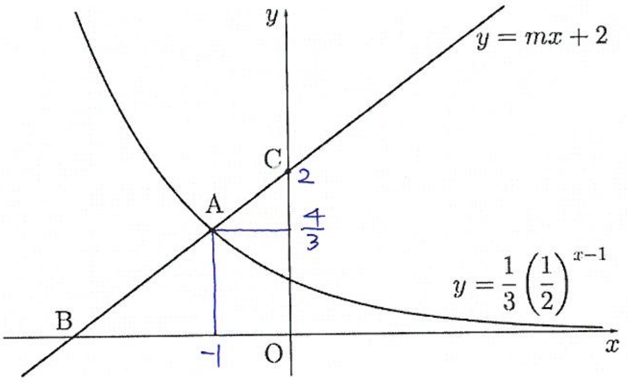
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6



$f'(x)=2x^3+2ax$ $(a<0)$

$f'(a)=2a^3+2a^2=0 \Rightarrow a=-1,\ b=7$

7. 그림과 같이 직선 $y=mx+2\,(m>0)$이 곡선 $y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$과 만나는 점을 A, 직선 $y=mx+2$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:1$일 때, 상수 m의 값은? [3점]



① $\frac{7}{12}$　② $\frac{5}{8}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{17}{24}$　⑤ $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\frac{4}{3}$

$2^{1-x}=2^2$

$x=-1$

$\therefore m=\frac{2}{3}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x<a) \\ 2x+b & (x \ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & (x<a) \\ 2 & (x>a) \end{cases}$$

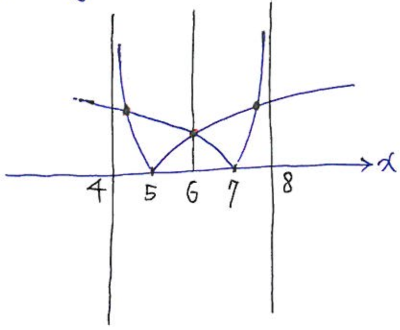
$$\begin{cases} a^2-2a=2a+b \\ 2a-2=2 \end{cases}$$

$\therefore a=2,\ b=-4$

9. 곡선 $y=|\log_2(-x)|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=|\log_2(x-k)| \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x=\frac{8+k}{2}} y=|\log_2(8-x)|$

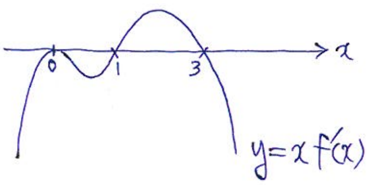


$\frac{8+k}{2}=6 \Rightarrow k=4$

10. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다. (나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$



$f'(x) = ax(x-1)(x-3)$

$f'(4) = 12a = -24 \Rightarrow a = -2$

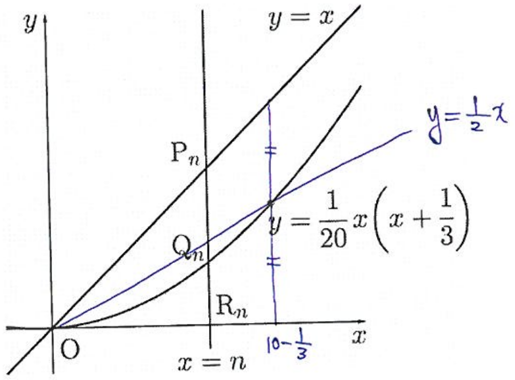
$f'(x) = -2x^3 + 8x^2 - 6x$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 2$

$f(2) = \frac{10}{3}$

11. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 직선 $y=x$와 만나는 점을 P_n, 곡선 $y=\frac{1}{20}x\left(x+\frac{1}{3}\right)$과 만나는 점을 Q_n, x축과 만나는 점을 R_n이라 하자. 두 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 길이 중 작은 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{115}{6}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ $\frac{39}{2}$ ④ $\frac{59}{3}$ ⑤ $\frac{119}{6}$



$\frac{1}{20}x\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}x \Rightarrow x=0,\ 10-\frac{1}{3}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{9}\frac{1}{20}n\left(n+\frac{1}{3}\right)+\left\{10-\frac{1}{2}\left(10+\frac{1}{3}\right)\right\}$

$=\frac{1}{20}\times\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{1}{60}\times\frac{9\times10}{2}+\left(5-\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{57}{4}+\frac{3}{4}+5-\frac{1}{6}$

$=20-\frac{1}{6}$

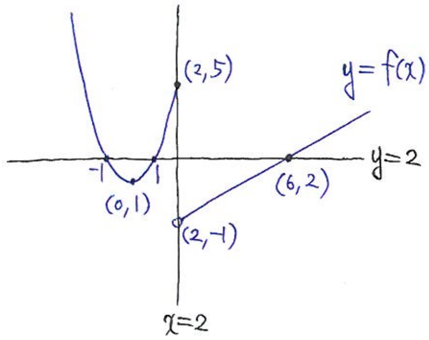
$=\frac{119}{6}$

12. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$



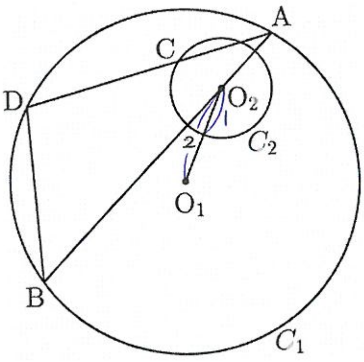
i) $\alpha \neq 2$: $f(\alpha)+f(\alpha)=4 \Rightarrow f(\alpha)=2$ $(\alpha=-1, 1, 6)$

ii) $\alpha=2$: $5+\underbrace{(2a+b)}_{-1}=4$

$y=ax+b=\frac{3}{4}(x-2)-1$

$x=1$: $a+b=-\frac{7}{4}$

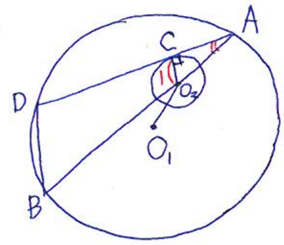
13. 그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 $r\,(r>3)$인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 다음은 $\overline{BD}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{\text{(가)}}\ 2r$$

이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.



이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}$이므로

$$\overline{BD}=\frac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{\text{(가)}}=\frac{2r}{\overline{AO_2}}\le\frac{2r}{r-2}$$

2r

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.

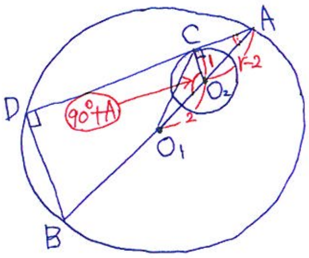
$\overline{AO_2}$의 최솟값은

$\boxed{\text{(나)}}$ $r-2$

이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때,

$\overline{O_1C}^2=\boxed{\text{(다)}}$

이다. $5+\dfrac{4}{r-2}$



위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은? [4점]

① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

$\overline{O_1C}^2=4+1-2\times2\times1\times\underbrace{\cos(90°+A)}_{-\sin A}=5+\dfrac{4}{r-2}$ (코사인법칙)

$\therefore\ 8\times3\times6=144$

14. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$y=f(x) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{y=f(1)} y=2f(1)-f(x)$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(1)=2f(1)-f(1)$ (O)

ㄴ. $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. $g(-1)=3=f(-1)$, $g(1)=1=f(1)$

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{\{f(-1+h)-f(-1)\}+\{f(-1-h)-f(-1)\}}{h}=f'(-1)-f'(-1)=0=a$

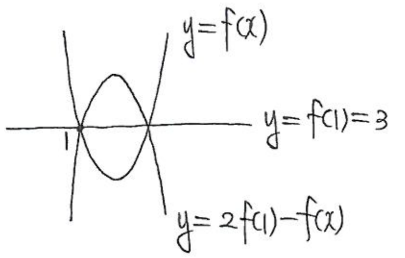
$f(x)=x^2+a'x+b' \Rightarrow \begin{cases}1-a'+b'=3\\1+a'+b'=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a'=-1\\b'=1\end{cases}$

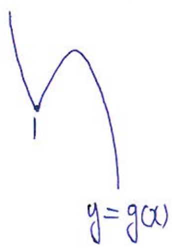
$f(x)=x^2-x+1 \Rightarrow g(0)=f(0)=1$

ㄷ. $g(b)=3$

$g(x)$는 $x=b$에서 미분불능이므로 $b=1 \Rightarrow g(1)=3=f(1)$

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{\{g(1+h)-g(1)\}+\{g(1-h)-g(1)\}}{h}=\underbrace{g'(1+)}_{2}-\underbrace{g'(1-)}_{-2}=4 \Rightarrow f'(1)=-2$





$f(x)=(x-1)^2-2(x-1)+3=(x-2)^2+2$

$\therefore g(4)=2f(1)-f(4)=6-6=0$

15. 함수

$$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다. (나) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a-1$의 교점의 개수는 4이다.

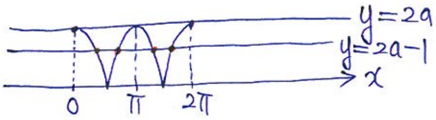
① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

$(a-2)(b-2)=0$: $(주기)=\dfrac{\pi}{\frac{b}{2}}=\pi \Rightarrow b=2$

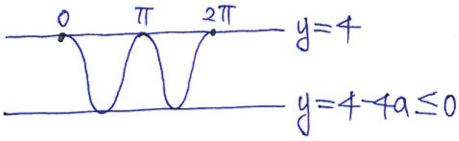
$(a-2)(b-2)\neq 0$: $(주기)=\dfrac{2\pi}{\frac{b}{2}}=\pi \Rightarrow b=4$

i) $b=2$: $f(x)=|2a\cos x|$

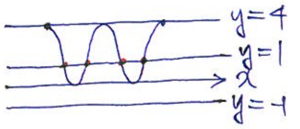
$\therefore a=1, 2, 3, \cdots, 10$ (10개)



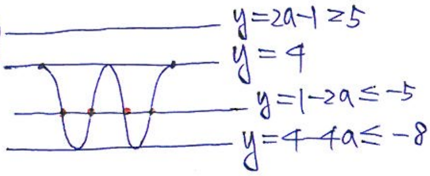
ii) $b=4$ $(a\neq 2)$: $f(x)=|2a\cos 2x-2a+4|$



a=1(○)



a≥3(○)



따라서 $10+9=19$개

16. $\underbrace{\log_3 a}_{A} \times \underbrace{\log_3 b}_{B} = 2$ 이고 $\log_a 3 + \log_b 3 = 4$ 일 때, $\underbrace{\log_3 ab}_{A+B}$ 의 값을 구하시오. [3점] 8

$$\begin{cases} AB = 2 \\ \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 4 \Rightarrow \frac{A+B}{AB} = 4 \end{cases}$$

$\therefore A+B = 8$

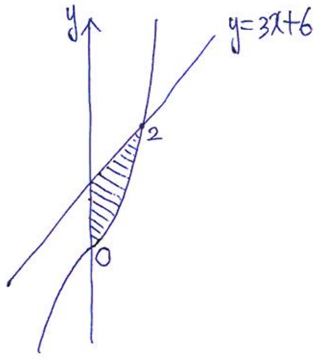
17. 함수 $f(x)=3x^3-x+a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 원점을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점] 6

$(1, a+2), (0, 0)$

$f'(x)=9x^2-1 \Rightarrow f'(1)=8=a+2$

$\therefore a=6$

18. 곡선 $y = x^3 + 2x$ 와 y축 및 직선 $y = 3x + 6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점] 10



$x^3 + 2x = 3x + 6$

$x^3 - x - 6 = 0$

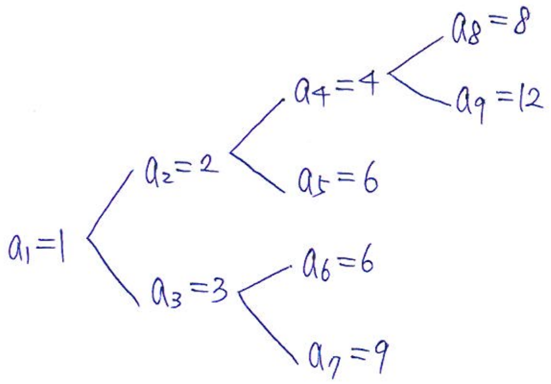
$(x-2)(x^2+2x+3) = 0$

$\therefore S = \int_0^2 (-x^3 + x + 6)\,dx = 10$

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} = 2a_n, \ a_{2n+1} = 3a_n$$

을 만족시킨다. $a_7 + a_k = 73$인 자연수 k의 값을 구하시오. [3점] 64



$a_k = 64 \Rightarrow k = 64$

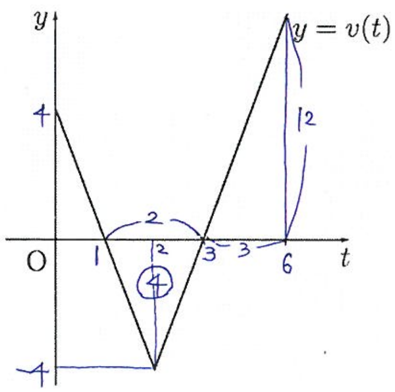
20. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도는

$$v(t) = |at - b| - 4 \quad (a > 0,\ b > 4)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이다.
(나) $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$이다.

시각 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점] 14



$\therefore -4 + 18 = 14$

21. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_6 + a_7 = -\dfrac{1}{2}$
>
> (나) $a_l + a_m = 1$이 되도록 하는 두 자연수 l, m $(l < m)$의 모든 순서쌍 (l, m)의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S라 할 때, $2S$의 값을 구하시오. [4점] 35

$$\begin{cases} a_{\frac{13}{2}} = -\frac{1}{4} \\ a_{\frac{l+m}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_7 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$l+m = 14$

1	13
2	12
3	11
4	10
5	9
6	8

$a_n = \frac{3}{2}(n-7) + \frac{1}{2} = \frac{3n-20}{2}$

$\therefore S = S_{14} = \frac{14(a_1 + a_{14})}{2} = 7\left(-\frac{17}{2} + \frac{22}{2}\right) = \frac{35}{2}$

※ $S_{14} = 14\, a_{\frac{15}{2}} = 14 \times \frac{5}{4} = \frac{35}{2}$

※ $l+m=13$ 이면 $a_{\frac{13}{2}} = \frac{1}{2}$ (모순)

22. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1| = \begin{cases} 2f(x)-1 & (f(x)\geq 1) \\ 1 & (f(x)<1) \end{cases} \qquad g(x)-1 = \begin{cases} 2f(x)-2 & (f(x)\geq 1) \\ 0 & (f(x)<1) \end{cases}$$

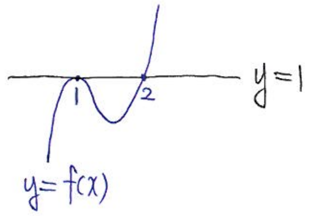
이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점] 11

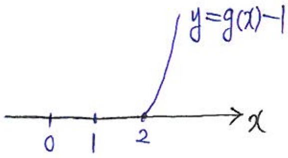
> (가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이다.

(가) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)=1 \Rightarrow x=1, 2$ (중근)

(나) $0<\int_0^n \{g(x)-1\}\,dx<16$

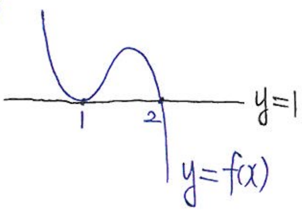
i)

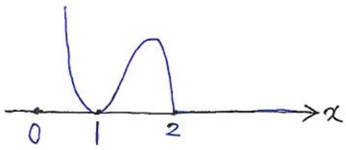




(X)

ii)





$f(x)=a(x-1)^2(x-2)+1 \Rightarrow g(x)-1=\begin{cases} 2a(x-1)^2(x-2) & (x\leq 2) \\ 0 & (x>2) \end{cases}$

$\int_0^2 2a(x-1)^2(x-2)\,dx = \int_{-1}^1 2a\underbrace{x^2(x-1)}_{x^3-x^2}\,dx = -4a\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{4}{3}a$

$0<-\frac{4}{3}a<16 \Rightarrow -12<a<0 \Rightarrow a=-1,-2,\cdots,-11$ (11개)

※ 확인 사항
- ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역 (확률과 통계)

23. $(x+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 58 ② 60 ③ 62 ④ 64 ⑤ 66

$_6C_4 \times 2^2 = 60$

24. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	1

$\mathrm{E}(11X+2)$의 값은? [3점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

$a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=1 \Rightarrow a=\frac{6}{11}$

$E(X)=a+a+a=\frac{18}{11} \Rightarrow 20$

25. 어느 회사에서 근무하는 직원들의 일주일 근무 시간은 평균이 42시간, 표준편차가 4시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 근무하는 직원 중에서 임의추출한 4명의 일주일 근무 시간의 표본평균이 43시간 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

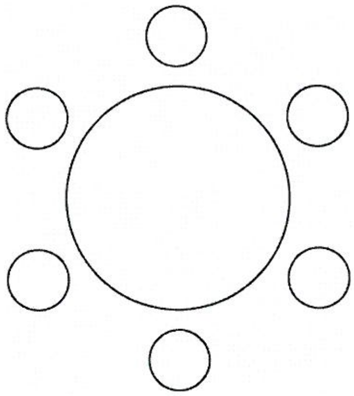
① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.3413

$Z=\frac{\overline{X}-42}{\frac{4}{\sqrt{4}}}=\frac{\overline{X}-42}{2}$

$P(\overline{X}\ge 43)=P(Z\ge \frac{1}{2})=0.3085$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, A와 C는 이웃하지 않고, B와 C도 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 24 ② 30 ③ 36 ④ 42 ⑤ 48



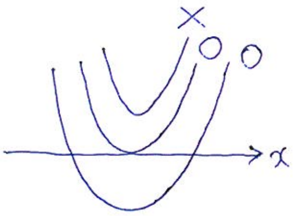
$n(A \cap B) = n(S) - n(A^c \cup B^c)$

$= 5! - 2 \times (4! \times 2!) + 3! \times 2$

$= 36$

27. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차부등식 $ax^2+2bx+a-3 \le 0$의 해가 존재할 확률은? [3점]

① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{29}{36}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{31}{36}$ ⑤ $\frac{8}{9}$



$\frac{D}{4}=b^2-a^2+3a \ge 0$

$b^2 \ge a(a-3)$

a	b
1	1~6
2	1~6
3	1~6
4	2~6
5	4,5,6
6	5,6

$\therefore \frac{28}{36}=\frac{7}{9}$

28. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8$$

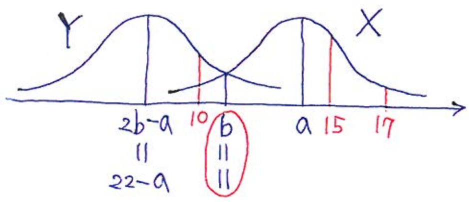
을 만족시키는 함수 f의 개수는? [4점]

① 137 ② 141 ③ 145 ④ 149 ⑤ 153

$${}_4H_8-\left(\underbrace{4}_{8000}+\underbrace{\frac{4!}{2!}}_{7100}\right)=165-16=149$$

29. 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(2b-a,\ \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점] 25

(가) $\mathrm{P}(X \le 11) = \mathrm{P}(Y \ge 11)$
(나) $f(17) < g(10) < f(15)$



$17-a > a-12 > |a-15|$

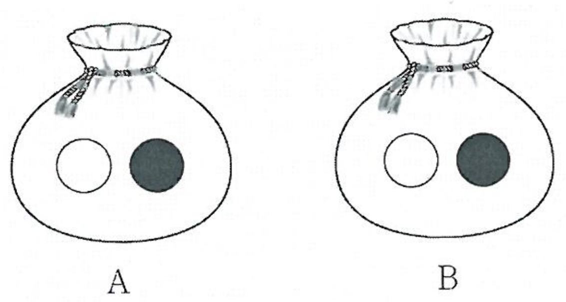
$11 < a < 14.5$

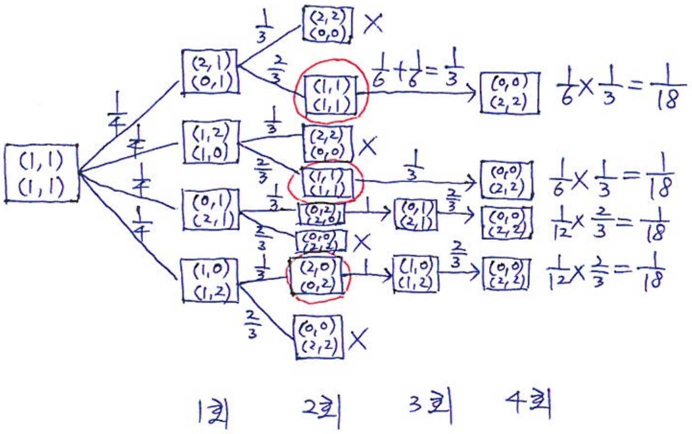
$a = \cancel{12}, \cancel{13}, 14$

30. 그림과 같이 두 주머니 A와 B에 흰 공 1개, 검은 공 1개가 각각 들어 있다. 주머니 A에 들어 있는 공의 개수 또는 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 0이 될 때까지 다음의 시행을 반복한다.

두 주머니 A, B에서 각각 임의로 하나씩 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 A에 넣고, 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 B에 넣는다.

4번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 0일 때, 2번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1 이상일 확률은 p이다. $36p$의 값을 구하시오. [4점] 27





$$\therefore \frac{\frac{3}{18}}{\frac{4}{18}}=\frac{3}{4}=p \Rightarrow 36p=27$$

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역 미적분

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{n^2-1}}=4$ 일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$a=1$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+bn}-\sqrt{n^2-1}} \doteqdot \dfrac{2n}{bn+1} \Rightarrow \dfrac{2}{b}=4 \Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$

24. 함수 $f(x)=x^3+3x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $h(x)=e^x$ 에 대하여 $(h \circ g)'(5)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{e}{8}$ ② $\frac{e}{7}$ ③ $\frac{e}{6}$ ④ $\frac{e}{5}$ ⑤ $\frac{e}{4}$

$f(1)=5$, $f'(x)=3x^2+3$, $h'(x)=e^x$

$\therefore h'(g(5))g'(5)=h'(1)\times\frac{1}{f'(1)}=\frac{e}{6}$

25. 함수 $f(x)=x^2e^{x^2-1}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$ 의 값은? [3점]

① e^3-1 ② $e^3-\frac{1}{e}$ ③ e^4-1 ④ $e^4-\frac{1}{e}$ ⑤ e^5-1

$\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{k}{n}}f(1+\frac{k}{n}) \Rightarrow 2\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2 2xe^{x^2-1}dx=\left[e^{x^2-1}\right]_1^2=e^3-1$

26. 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{\ln t}{t^2}$이다. $f(1)=0$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $\frac{e-2}{3e}$ ② $\frac{e-2}{2e}$ ③ $\frac{e-1}{3e}$

④ $\frac{e-2}{e}$ ⑤ $\frac{e-1}{e}$

$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{x^2} & \ln x \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{x} \end{array}\right)$$

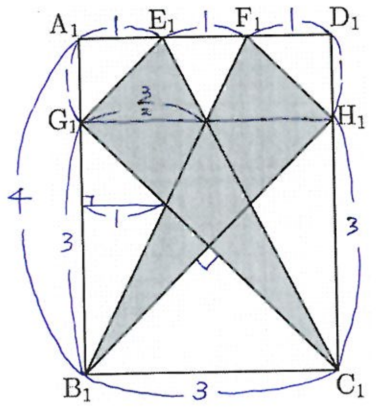
$f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$

$f(e)=-\frac{2}{e}+1=\frac{e-2}{e}$

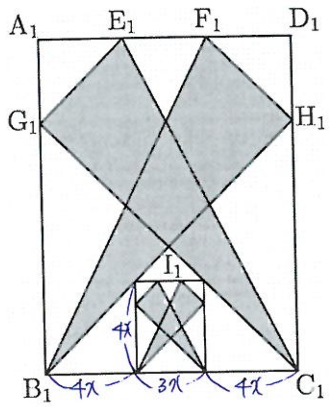
27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 1:2, 2:1로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1B_1, D_1C_1을 1:3으로 내분하는 점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 삼각형 $C_1E_1G_1$, $B_1H_1F_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 선분 B_1H_1, C_1G_1이 만나는 점을 I_1이라 하자. 선분 B_1I_1 위의 점 A_2, 선분 C_1I_1 위의 점 D_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 되도록 잡는다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1



R_2

…

① $\frac{347}{64}$ ② $\frac{351}{64}$ ③ $\frac{355}{64}$ ④ $\frac{359}{64}$ ⑤ $\frac{363}{64}$

$S_1 = 12 - \left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+3\right) = \frac{21}{4}$

$11x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{11}$

$\therefore \dfrac{\frac{21}{4}}{1-\frac{9}{121}} = \frac{363}{64}$

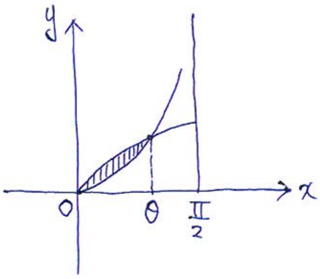
28. $0<a<1$ 인 실수 a에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수

$y=\sin x,\ y=a\tan x$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

$\sin x = a\tan x \Rightarrow \cos x = a$ 또는 $x=0$



$\cos\theta = a$

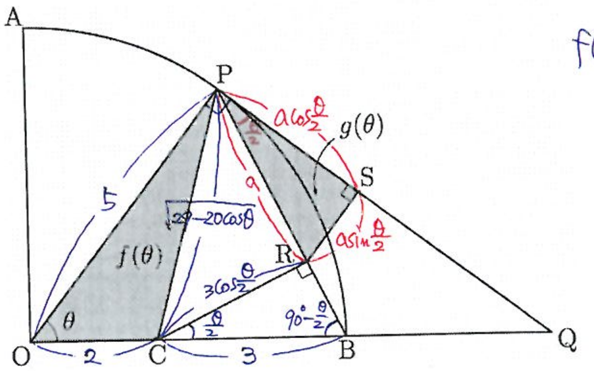
$f(a)=\int_0^\theta (\sin x - a\tan x)\,dx = \left[-\cos x + a\ln|\cos x|\right]_0^\theta$

$=1-\cos\theta + a\ln|\cos\theta| = 1-a+a\ln a$

$f'(a) = -1+\ln a + 1 = \ln a$

$f'(e^{-2}) = -2$

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OB를 2:3으로 내분하는 점을 C라 하자. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OB의 교점을 Q라 하고, 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 R, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle POB = \theta$일 때, 삼각형 OCP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $80 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점] 49



$f(\theta) = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times \sin\theta \fallingdotseq 5\theta$

$\overline{PC} = \sqrt{25+4-20\cos\theta} = \sqrt{29-20\cos\theta} \Rightarrow a^2 = 29 - 20\cos\theta - 9\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= 20(1-\cos\theta) + 9(1-\cos^2\frac{\theta}{2})$

$\fallingdotseq 20 \times \frac{1}{2}\theta^2 + 9 \times \frac{1}{4}\theta^2$

$= \frac{49}{4}\theta^2$

$g(\theta) = \frac{1}{2}a^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \fallingdotseq \frac{\theta}{4} \times \frac{49}{4}\theta^2$

$\therefore 80 \times \frac{\frac{49}{16}\theta^3}{\theta^2 \times 5\theta} \Rightarrow 49$

※ $\overline{BP} = 10\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{BR} = 3\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow a = \overline{PR} = 7\sin\frac{\theta}{2} \fallingdotseq \frac{7}{2}\theta$

$g(\theta) = \frac{1}{2}a^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \fallingdotseq \frac{\theta}{4} \times \frac{49}{4}\theta^2$

30. 최고차항의 계수가 -2인 이차함수 $f(x)$와 두 실수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+1)}{x} & (x<0)\\[2ex] f(x)e^{x-a}+b & (x\ge 0)\end{cases} \xrightarrow{\ '\ } e^{x-a}\{f(x)+f'(x)\}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

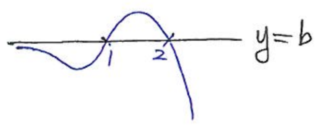
> (가) $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=2$이고 $g'(a)=-2$이다.
>
> (나) $s<0\le t$이면 $\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}\le -2$이다.

$a-b$의 최솟값을 구하시오. [4점] 4

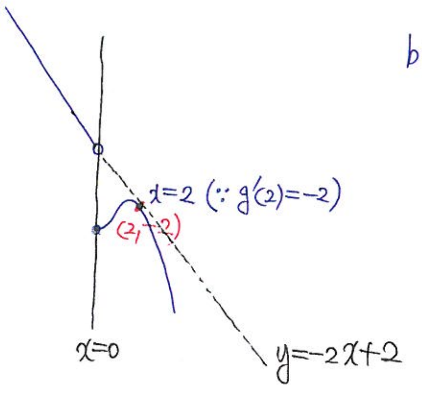
(가) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x+1)}{x}=2 \Rightarrow f(x+1)=-2x^2+2x \Rightarrow f(x)=-2(x-1)^2+2(x-1)=-2(x-1)(x-2)$

$g'(a)=f(a)+f'(a)=-2(a-1)(a-2)-2(2a-3)=-2(a^2-a-1)=-2 \Rightarrow a=2$

$$g(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<0)\\ -2(x-1)(x-2)e^{x-2}+b & (x\ge 0)\end{cases} \xrightarrow{\ '\ } -2(x^2-x-1)e^{x-2}$$



$b=g(2)=-2 \Rightarrow a-b=4$



b가 최대일 때

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

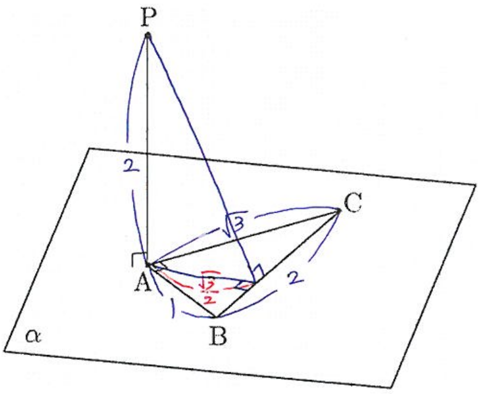
수 학 영 역 (기 하)

23. 좌표공간에서 점 P(2, 1, 3)을 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $2\sqrt{10}$　② $2\sqrt{11}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{14}$

$Q(2,-1,-3) \Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{10}$

24. 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{AB}=1$, $\overline{AC}=\sqrt{3}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 평면 α에 수직인 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=2$일 때, 점 P와 직선 BC 사이의 거리는? [3점]

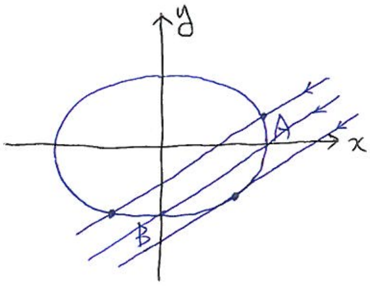


$\sqrt{4+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{70}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{74}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{19}}{2}$

25. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$과 두 점 A$(4,0)$, B$(0,-3)$이 있다. 이 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 k가 되도록 하는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $3\sqrt{2}-3$ ② $6\sqrt{2}-7$ ③ $3\sqrt{2}-2$ ④ $6\sqrt{2}-6$ ⑤ $6\sqrt{2}-5$

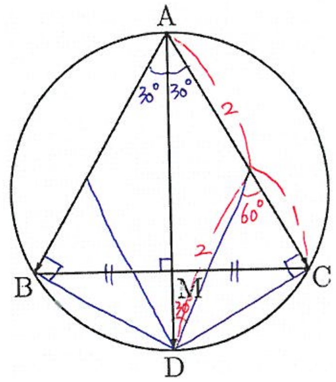


접선 : $y=\frac{3}{4}x-\sqrt{\frac{9}{16}\times16+9}=\frac{3}{4}x-3\sqrt{2}$

$\begin{cases} 3x-4y-12\sqrt{2}=0 \\ 3x-4y-12=0 \end{cases}$

$\therefore k=\frac{1}{2}\times5\times\frac{12(\sqrt{2}-1)}{5}=6(\sqrt{2}-1)$

26. 그림과 같이 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 직선 AM이 정삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.) [3점]



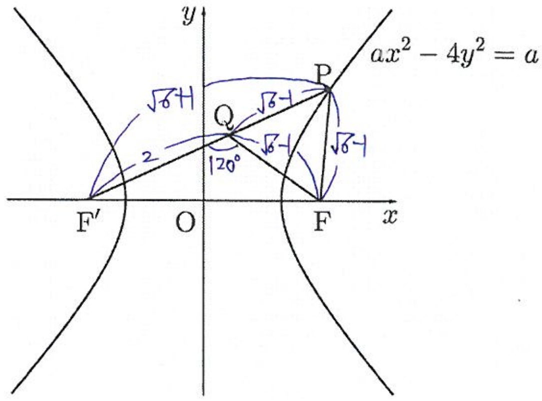
① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$m=n \Rightarrow \overrightarrow{AD}=m(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\therefore m=n=\frac{2}{3}$

※ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

27. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $ax^2-4y^2=a$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 선분 PF′ 위의 점 Q에 대하여 삼각형 PQF는 한 변의 길이가 $\sqrt{6}-1$인 정삼각형이다. 상수 a의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [3점]



$\Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{a}{4}}=1$

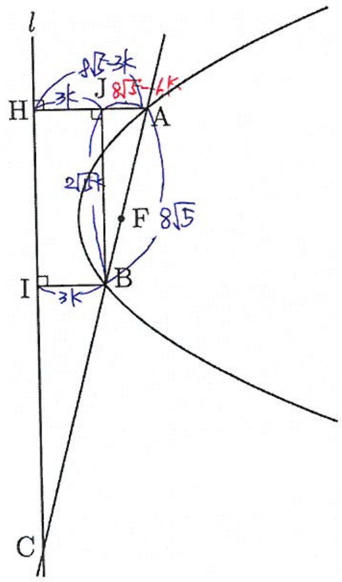
① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

$\overline{FF'}^2=4+(7-2\sqrt{6})+2(\sqrt{6}-1)=9=4\left(1+\frac{a}{4}\right) \Rightarrow a=5$

28. 점 F를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선이 있다. 포물선 위의 두 점 A, B와 점 F를 지나는 직선이 직선 l과 만나는 점을 C라 하자. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고 점 B에서 직선 AH에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\dfrac{\overline{\mathrm{BJ}}}{\overline{\mathrm{BI}}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{5}$ 일 때, 선분 HC의 길이는? [4점]

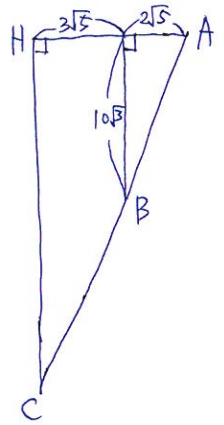
① $21\sqrt{3}$ ② $22\sqrt{3}$ ③ $23\sqrt{3}$ ④ $24\sqrt{3}$ ⑤ $25\sqrt{3}$



$(8\sqrt{5})^2-(8\sqrt{5}-6k)^2=60k^2$

$6k(16\sqrt{5}-6k)=60k^2$

$k=\sqrt{5}$



$\therefore\ \overline{HC}=5\sqrt{5}\times\dfrac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=25\sqrt{3}$

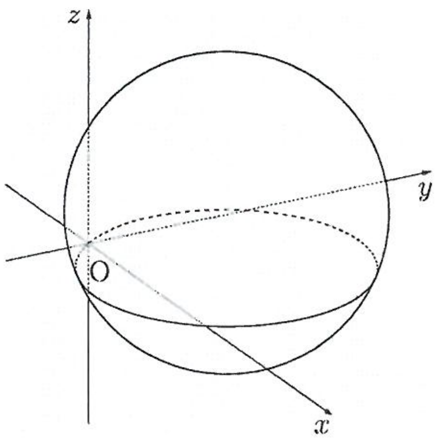
29. 좌표공간에 점 (4, 3, 2)를 중심으로 하고 원점을 지나는 구

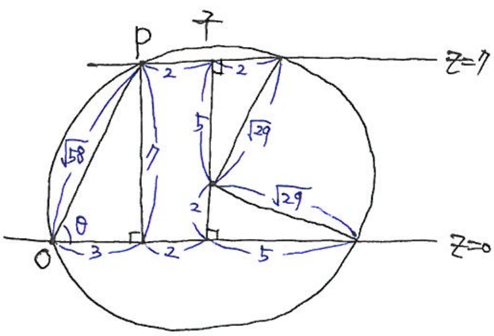
$$S : (x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=29$$

가 있다. 구 S 위의 점 $\mathrm{P}(a, b, 7)$에 대하여 직선 OP를 포함하는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하자. 평면 α와 원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OP와 xy평면이 이루는 각의 크기와 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기는 같다.
(나) 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$a^2+b^2<25$일 때, 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$이다. $8k^2$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.) [4점] 261





$$k\pi=\left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2\pi\times\frac{3}{\sqrt{58}}=\frac{3\sqrt{58}}{4}\pi$$

$$\therefore 8k^2=8\times\frac{9\times58}{16}=261$$

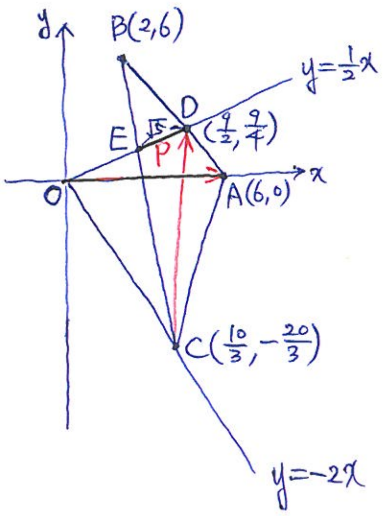
30. 좌표평면 위의 세 점 A(6, 0), B(2, 6), C(k, $-2k$) ($k>0$)과 삼각형 ABC의 내부 또는 변 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $5\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
(나) 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

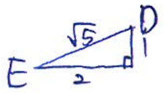
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 7

$5(4,-6)\cdot(x,y)-(2,6)\cdot(x-6,y)=12$

$20x-30y-2x+12-6y=12 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x$



직선 AB : $y=-\frac{3}{2}(x-6)=\frac{1}{2}x \Rightarrow x=\frac{9}{2}$



$\Rightarrow E\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$

직선 BE : $y=-\frac{19}{2}(x-2)+6=-2x \Rightarrow x=\frac{10}{3}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=(6,0)\cdot\left(\frac{7}{6},?\right)=7$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.