

제3교시

2023학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

공 통

성명		수험번호								
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하십시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하십시오.
- 23번부터는 선택과목이니 자신이 선택한 과목(확률과 통계, 미적분, 기하)의 문제지인지 확인하십시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

관
망

1. $\frac{4}{3^{-2}+3^{-3}}$ 의 값은? [2점]

$$\frac{1}{\cancel{9}} + \frac{1}{\cancel{27}} = \frac{27}{3} \cdot 4$$

① 9

② 18

③ 27

④ 36

⑤ 45

$$(3x^3 - 4x)(ax + 1) + a(3x^3 - 2x^2 + 3)$$

2. 함수 $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(ax + 1)$ 에 대하여 $f'(0) = 15$ 일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 11

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 4, \frac{(a_3)^2}{a_1 \times a_7} = 2$$

$a_3 = \frac{1}{r} \cdot r^3$ $r = \frac{1}{2}$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

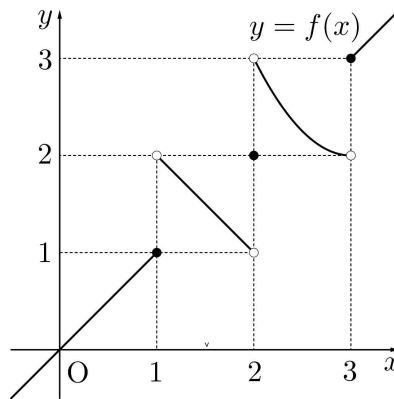
② 1

③ $\sqrt{2}$

④ 2

⑤ $2\sqrt{2}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

5. 이차방정식 $5x^2 - x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① ☒ $-\frac{12}{5}$

② -2

③ $-\frac{8}{5}$

④ $-\frac{6}{5}$

⑤ $-\frac{4}{5}$

$$s+c = \frac{1}{5}$$

$$sc = \frac{a}{5}$$

$$\frac{1}{25} = 1 + \frac{2}{5}a \rightarrow \frac{7}{5}a = -\frac{24}{25} \cdot \frac{5}{2} = \boxed{-\frac{12}{5}}$$

$$\frac{1}{2}x^2(x^2+2a)+b$$


$$b = a+8$$

6. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$ 가 $x=a$ 에서 극소이고, 극댓값 $a+8$ 을 가질 때, $a+b$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

$$\sqrt{-2a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (-2a) = a^2 + a$$

$$\boxed{a = -1}$$

① 2

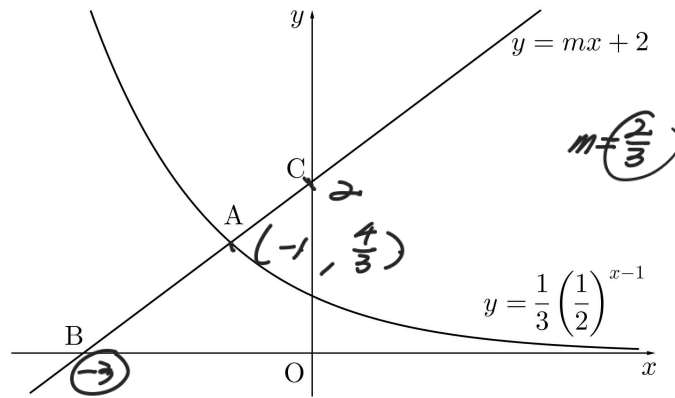
② 3

③ 4

④ 5

⑤ ☒ 6

7. 그림과 같이 직선 $y = mx + 2$ ($m > 0$)이 곡선 $y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1}$ 과 만나는 점을 A, 직선 $y = mx + 2$ 가 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{AB} : \overline{AC} = 2:1$ 일 때, 상수 m 의 값은? [3점]



① $\frac{7}{12}$

② $\frac{5}{8}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{17}{24}$

⑤ $\frac{3}{4}$

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x < a) \\ 2x + b & (x \geq a) \end{cases}$$

$x^2 - 2x - b = x^2 - 4x + 4$
 $a = 2$
 $b = -4$

가 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① -4 ☒ ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

9. 곡선 $y = |\log_2(-x)|$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 곡선을 $y = f(x)$ 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = |\log_2(-x+8)|$ 이 세 점에서 만나고 세 교점의 x 좌표의 합이 18일 때, k 의 값은? [4점]

$$x=8$$

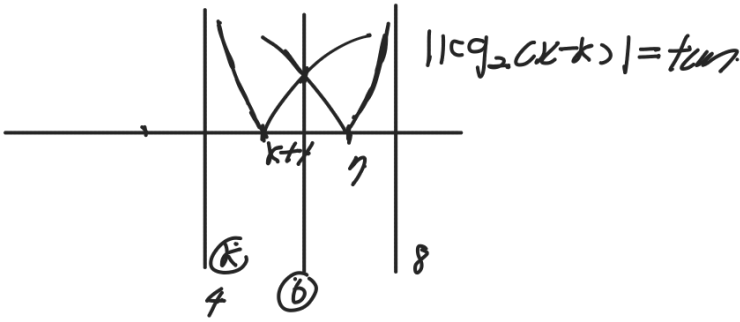
① 1

② 2

③ 3

✓ ④ 4

⑤ 5



10. 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0)=2$ 이고 $f'(4)=-24$ 이다.

(나) 부등식 $xf'(x) > 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 범위는 $1 < x < 3$ 이다.

① 3

② $\frac{10}{3}$

③ $\frac{11}{3}$

④ 4

⑤ $\frac{13}{3}$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a < 0) \quad a \cdot a \cdot a \cdot a = -24 \quad (-2)$$

$$= -2x^4 + 8x^3 - 6x^2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 2$$

$$-8 + \frac{64}{3} - 12 + 2 = \frac{10}{3}$$

11. 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 P_n , 곡선 $y=\frac{1}{20}x\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 과 만나는 점을 Q_n , x 축과 만나는 점을 R_n 이라 하자. 두 선분 P_nQ_n , Q_nR_n 의 길이 중 작은 값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

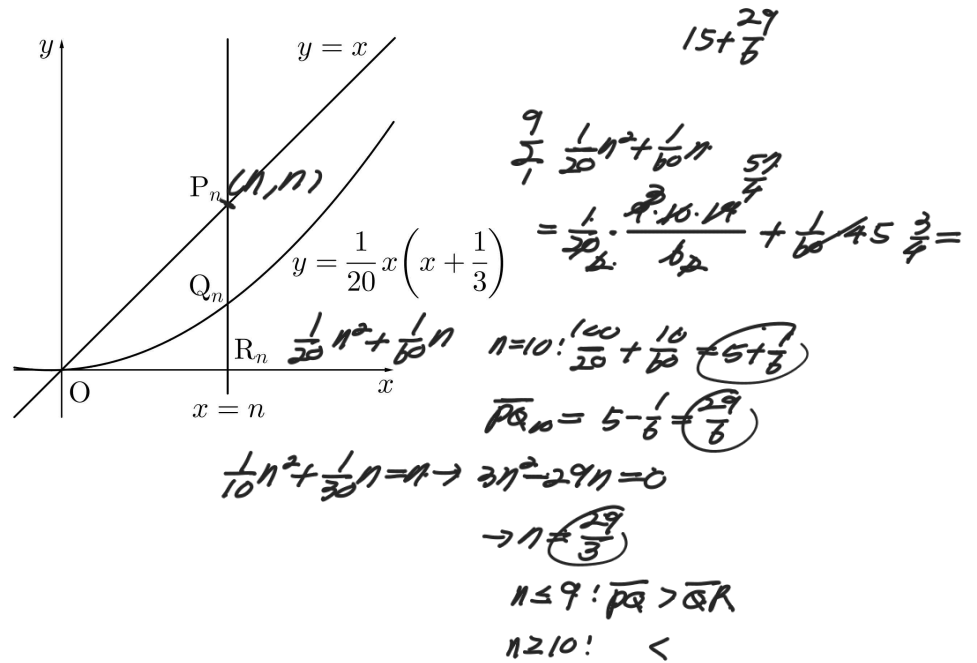
① $\frac{115}{6}$

② $\frac{58}{3}$

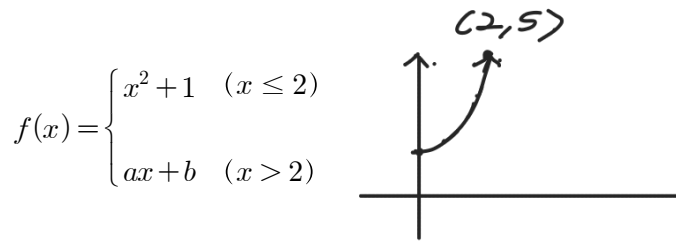
③ $\frac{39}{2}$

④ $\frac{59}{3}$

⑤ $\frac{119}{6}$



12. 함수



에 대하여 $f(\alpha) + \lim_{x \rightarrow \alpha+} f(x) = 4$ 를 만족시키는 실수 α 의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 89이다.

$a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{7}{4}$

② $-\frac{5}{4}$

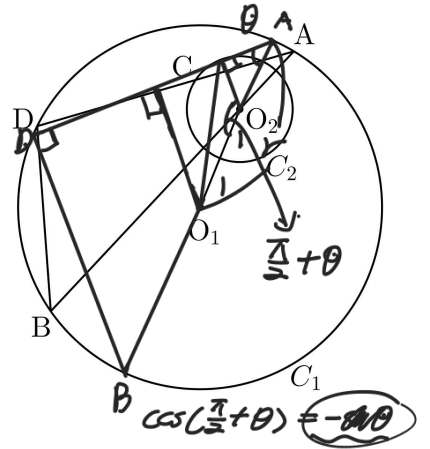
③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{4}$

①) $x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$
 ②) $x = 2: 5 + 2a + b = 4 \Rightarrow 2a + b = -1$
 ③) $2a + b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}$

13. 그림과 같이 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 r ($r > 3$)인 원 C_1 과 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2 에 대하여 $\overline{O_1O_2} = 2$ 이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1 과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 다음은 $\overline{BD}$ 가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$ 을 r 에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = \boxed{2r}$$

이므로 $\overline{BD}$ 가 최대하려면 직선 AD가 원 C_2 와 점 C에서 접해야 한다.

이때 직각삼각형 ACO_2 에서 $\sin A = \frac{1}{AO_2}$ 이므로

$$\overline{BD} = \frac{1}{AO_2} \times \boxed{2r} = \frac{2r}{r-2}$$

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2 와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$ 가 최소일 때 $\overline{BD}$ 는 최대이다.

$\overline{AO_2}$ 의 최솟값은

$$\boxed{r-2}$$

이므로 $\overline{BD}$ 가 최대일 때,

$$\overline{O_1C}^2 = \boxed{\quad} \text{ (다)}$$

이다.

$$\sin \theta = \frac{1}{r-2}$$

$$\frac{5}{4+1} + 4 \cdot \frac{1}{r-2}$$

$$5 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$ 라 할 때, $f(4) \times g(5) \times h(6)$ 의 값은?

[4점]

① 216

② 192

③ 168

④ 144

⑤ 120

15. 함수

$$f(x) = \left| 2a \cos \frac{b}{2}x - (a-2)(b-2) \right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

(가) 함수 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.

(나) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2a-1$ 의 교점의 개수는 4이다.

① 11

② 13

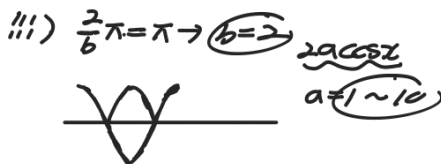
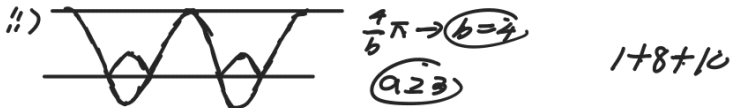
③ 15

④ 17

⑤ 19

i) $f(0) = 0: \frac{4}{b}\pi = \pi \rightarrow b=4$

$$2a \cos 2x - 2(a-2) \begin{cases} a=1: 2 \cos 2x + 2 \\ a=2: 2 \cos 2x \\ a \geq 3: 2 \cos 2x - 2 \end{cases}$$



16. $\log_3 a \times \log_3 b = 2$ 이고 $\log_a 3 + \log_b 3 = 4$ 일 때, $\log_3 ab$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\alpha\beta=2, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=4=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta 2} \rightarrow \textcircled{8}$$

17. 함수 $f(x) = 3x^3 - x + a$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선이 원점을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

⑥

$$9x^2 - 1$$

$$y = 8(1-1) + a + 2$$

$$-8 + a + 2$$

18. 곡선 $y = x^3 + 2x$ 와 y 축 및 직선 $y = 3x + 6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

$$\begin{aligned}
 x^3 - x - 6 &= (x^3/8) - (x-2) = (x-2)(x^2+2x+3) \\
 &\quad (x-2)(x^2+2x+4) \\
 \int_0^2 &= \frac{1}{4}16 - \frac{1}{2}4 - 12 = -10
 \end{aligned}$$

10

19. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = 2a_n, \quad a_{2n+1} = 3a_n$$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$$

$$a_3 = 3$$

$$a_7 = 9$$

을 만족시킨다. $a_k + a_k = 73$ 인 자연수 k 의 값을 구하시오. [3점]

$$64$$

$$64$$

20. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도는

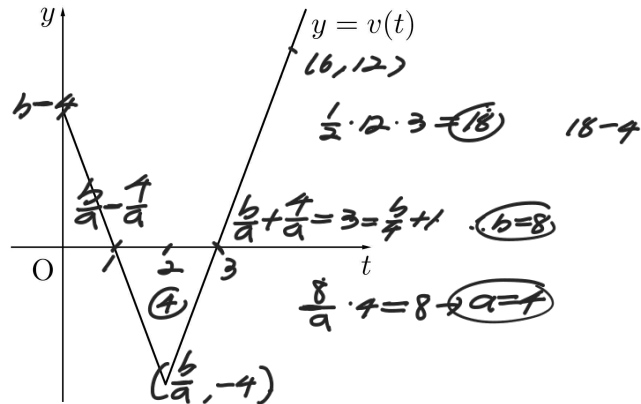
$$v(t) = |at - b| - 4 \quad (a > 0, b > 4)$$

이다. 시간 $t=0$ 에서 $t=k$ 까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시간 $t=0$ 에서 $t=k$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$ 라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$ 이면 $s(k) - x(k) < 8$ 이다.

(나) $k \geq 3$ 이면 $s(k) - x(k) = 8$ 이다.

시간 $t=1$ 에서 $t=6$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a , b 는 상수이다.) [4점]



21. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_6 + a_7 = -\frac{1}{2}$ $a_{1.5} = -\frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{1}{2}$ $d = \frac{3}{2}$ (3)

(나) $a_l + a_m = 1$ 이 되도록 하는 두 자연수 l, m ($l < m$)의 모든 순서쌍 (l, m) 의 개수는 6이다.

$a \frac{l+m}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{6}{6} \frac{7}{8}$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 14 항까지의 합을 S 라 할 때, $2S$ 의 값을 구하시오. [4점]

14? $a_{1.5} (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}) \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$ (35)

22. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=1, f'(1)=0$ 이다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + |f(x) - 1| \quad \begin{cases} f \geq 1: 2f(x) - 1 \\ f < 1: 1 \end{cases}$$


이라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$ 의 계수를 구하시오. [4점]

$$f(x) = \alpha(x-1)^2(x-2) + 1 \quad (\alpha < 0) \quad (11)$$

(가) 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 모든 교점의 x 좌표의 합은 3이다.

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $n < \int_0^n g(x)dx < n+16$ 이다.

$$1 < \int_0^1 = 2 \int_0^1 - 1 < 17 \rightarrow 1 < \int_0^1 f(x)dx < 9$$

$$2 < \int_0^2 = 2 \int_0^2 - 2 < 18 \rightarrow 2 < \int_0^2 f(x)dx < 10$$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{3}\alpha + 1 \quad 1 < 1 - \frac{7}{12}\alpha < 9$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{96}{7} < \alpha < 0$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = -\frac{2}{3}\alpha + 2 \quad 2 < 2 - \frac{2}{3}\alpha < 18$$

$$\downarrow$$

$$-12 < \alpha < 0$$

$$\rightarrow \alpha = -1 \sim -11$$

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

미적분

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{an^2 + bn} - \sqrt{n^2 - 1}} = 4$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2점]

(1.5)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{4}$

④ 1

⑤ $\frac{5}{4}$

$$\frac{(\sqrt{a} + 1)n}{an^2 + bn - n^2 + 1} \rightarrow \frac{2}{b} = 4$$

~~2473~~

24. 함수 $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $h(x) = e^x$ 에 대하여 $(h \circ g)'(5)$ 의 값은? [3점]
- ~~(1, 5)~~ ~~$g'(5)h'(g(5))$~~

① $\frac{e}{8}$

② $\frac{e}{7}$

③ $\frac{e}{6}$

④ $\frac{e}{5}$

⑤ $\frac{e}{4}$

25. 함수 $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n+k} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ 의 값은? [3점]
- $\uparrow \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{1+\frac{k}{n}}$
 $\nwarrow$
 $\nwarrow$
 $\nwarrow$
 x_k

① $e^3 - 1$

② $e^3 - \frac{1}{e}$

③ $e^4 - 1$

④ $e^4 - \frac{1}{e}$

⑤ $e^5 - 1$

$$\int_1^2 2 \cdot x e^{x^2-1} dx = \textcircled{e^3 - 1}$$

26. 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 모든 양수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{\ln t}{t^2}$ 이다. $f(1)=0$ 일 때, $f(e)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{e-2}{3e}$

② $\frac{e-2}{2e}$

③ $\frac{e-1}{3e}$

④ $\frac{e-2}{e}$

⑤ $\frac{e-1}{e}$

$$f'(t) = \frac{\ln t}{t^2}$$

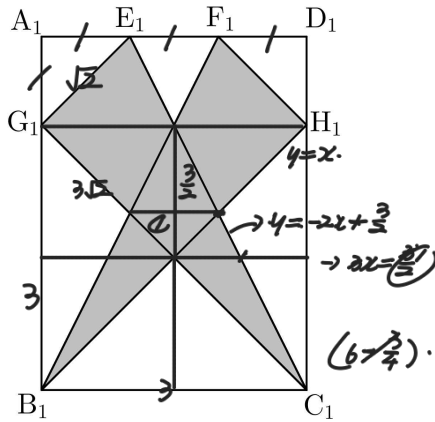
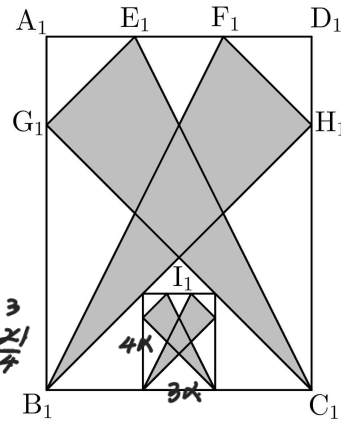
$$f(t) = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1$$

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=3$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 선분 A_1D_1 을 1:2, 2:1로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1 이라 하고, 두 선분 A_1B_1, D_1C_1 을 1:3로 내분하는 점을 각각 G_1, H_1 이라 하자. 두 삼각형 $C_1E_1G_1, B_1H_1F_1$ 로 만들어진 $\bowtie$ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 선분 B_1H_1, C_1G_1 이 만나는 점을 I_1 이라 하자. 선분 B_1I_1 위의 점 A_2 , 선분 C_1I_1 위의 점 D_2 , 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:3$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 가 되도록 잡는다. 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 $\bowtie$ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]

 R_1  R_2

...

...

① $\frac{347}{64}$

② $\frac{351}{64}$

③ $\frac{355}{64}$

④ $\frac{359}{64}$

⑤ $\frac{363}{64}$

28. $0 < a < 1$ 인 실수 a 에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 두 함수

$$y = \sin x, \quad y = a \tan x$$



의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$ 라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$

② -2

③ $-\frac{3}{2}$

④ -1

⑤ $-\frac{1}{2}$

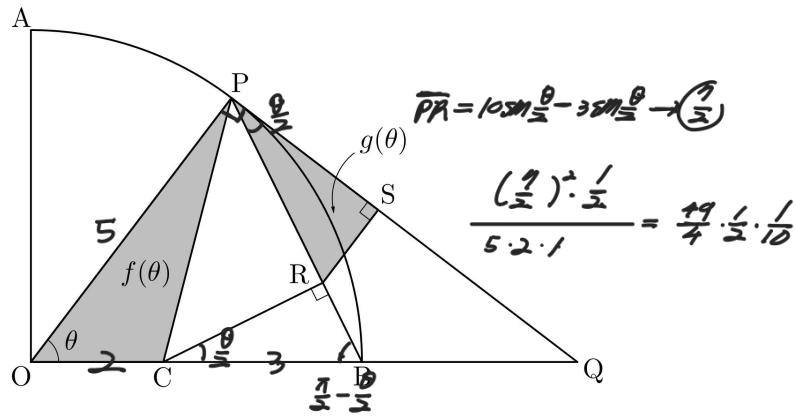
$$\sin k = a \tan k \quad \text{②} \quad \cos k = a$$

$$f(a) = \int_0^k \sin x \, dx - a \int_0^k \tan x \, dx$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \cancel{\sin k} \cdot \frac{dk}{da} - \int_0^k \tan x \, dx - a \cdot \cancel{\tan k} \cdot \frac{dk}{da} \\ &= \ln \cos x \Big|_0^k = \ln a \end{aligned}$$

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OB를 2:3으로 내분하는 점을 C라 하자. 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OB의 교점을 Q라 하고, 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 R, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle POB = \theta$ 일 때, 삼각형 OCP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$80 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점] 49



30. 최고차항의 계수가 -2 인 이차함수 $f(x)$ 와 두 실수 $a(a > 0)$, b 에 대하여 함수

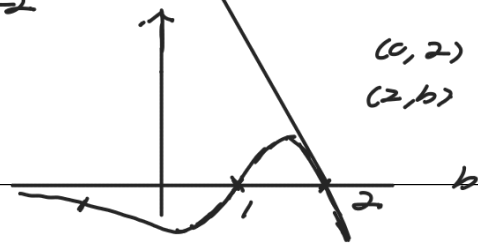
$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x+1)}{x} & (x < 0) \\ f(x)e^{x-a} + b & (x \geq 0) \end{cases}$$

$f(x+1) = -2x(x-1)$
 $f(x) = -2(x-1)(x-2)$
 $-2(x^2 - 3x + 2)e^{x-a} + b$
 $\rightarrow -2(x-1)(x-2)e^{x-2} + b$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2$ 이고 $g'(a) = -2$ 이다.

(나) $s < 0 \leq t$ 이면 $\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \leq -2$ 이다.



$a - b$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

④

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

관
망

관
망

관
망

관
망

관
망

관
망