著 : 雀
sukita1729@gmail.com

무게가 100N인 얇은 막대의 양 끝을 두 사람 A, B가 동일한 힘으로 떠받들고 있다. 다음 물음에 답하시오.

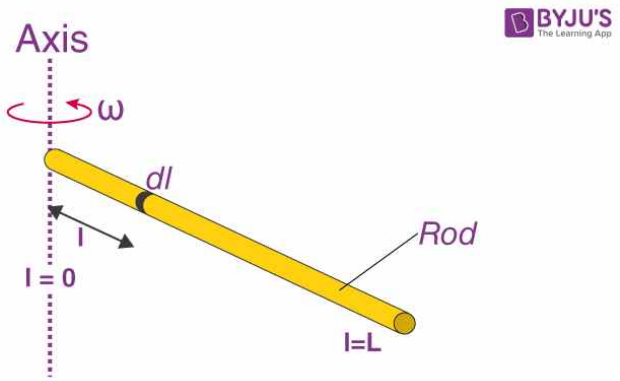
(1) B가 막대에서 손을 뗀 순간 A의 손에 작용하는 힘의 크기는 B가 손을 떼기 전과 비교하여 더 큰가, 작은가? 정확한 값을 구해보아라.

(2) 그 순간 B가 잡고 있던 막대 끝부분의 가속도의 크기는 얼마인가?

우선 길이가 l이고 질량이 균질한 막대의 회전관성을 구해보자. 다음 그림과 같이 막대의 끝을 회전축으로 하는 경우, 미소길이 dl의 질량 dm은 선밀도 $\lambda = \frac{m}{l}$에 대하여 λdl이므로 회전관성은

$$I_{end} = \int r^2 dm = \int_0^l r^2(\lambda dl) = \lambda\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^l = \frac{1}{3}ml^2$$

이다.



막대의 질량중심을 회전축으로 하는 경우 평행축 정리를 이용하거나 다음의 과정을 통해 회전관성을 구할 수 있다.

$$I_{center} = \int r^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} r^2(\lambda dl) = \lambda\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}ml^2$$

sol 1) B가 손을 놓는 순간 막대는 A의 손을 기준으로 회전하게 된다. 이때 막대는 질량이 균질하므로 토크 τ, 회전관성 I, 각가속도 α에 대하여 $\tau = I\alpha$가 성립함을 이용하면

$$\frac{l}{2}mg = \frac{1}{3}ml^2\alpha, \quad \alpha = \frac{3g}{2l}$$

를 얻는다. 따라서 질량 중심의 가속도는

$$a_{cm} = \frac{l}{2}\alpha = \frac{3}{4}g$$

이므로, A가 떠받드는 힘 F_A는

$$ma_{cm} = mg - F_A$$

에서

$$F_A = \frac{1}{4}mg = 25\,\mathrm{N}$$

이다. 이는 B가 막대를 받치고 있었을 때의 50 N보다도 작은 값이다. 또한 막대 끝부분의 가속도는

$$a_{end} = 2a_{cm} = \frac{3}{2}g$$

이다. ■

sol 2) B가 손을 놓는 순간 막대의 질량 중심은 가속도 a_{cm}으로 낙하하고, 그와 동시에 막대의 각 부분은 질량 중심을 중심으로 각가속도 α로 회전한다. 즉, 문제에서 구해야 하는 A가 순간적으로 떠받드는 힘을 F_A라 하면 마찬가지로 $\tau = I\alpha$에 의해

$$ma_{cm} = mg - F_A \quad \cdots \quad [1]$$
$$\frac{1}{12}ml^2\alpha = \frac{l}{2}F_A \quad \cdots \quad [2]$$

이다. 또한 A가 받치고 있는 부분은 정지 상태를 유지하므로 질량 중심이 낙하하는 효과와 막대가 회전하는 효과가 상쇄되어야 한다. 즉 질량 중심의 낙하는 A가 받치고 있는 지점을 가속도 a_{cm}으로 연직 아래 방향으로 가속시키고, 막대의 회전은 동일 지점을 가속도 $\frac{l}{2}\alpha$로 연직 윗 방향으로 가속시키므로 최종적으로

$$a_{cm} = \frac{l}{2}\alpha \quad \cdots \quad [3]$$

를 얻는다. [1] 식에 $\frac{l}{2}$를 곱한 후 [2] 식을 더하여 F_A를 소거하면

$$\frac{l}{2}ma_{cm}+\frac{1}{12}ml^2\alpha=\frac{l}{2}mg$$

이고, 식 [3]을 대입하면

$$\frac{l}{2}ma_{cm}+\frac{1}{12}ml^2\left(\frac{2a_{cm}}{l}\right)=\frac{l}{2}mg$$

$$\frac{2l}{3}ma_{cm}=\frac{l}{2}mg$$

에서

$$a_{cm}=\frac{3}{4}g$$

를 얻고, 이를 다시 대입하면

$$F_A=m(g-a_{cm})=\frac{1}{4}mg=25\,\mathrm{N}$$

을 얻는다. 마지막으로 막대 끝부분의 가속도는

$$a_{end}=2a_{cm}=\frac{3}{2}g$$

이다. ■