2023학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 22 박민수)

[출제의도] 지수의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, $9^{\frac{3}{2}} = 27$ 이다.

따라서 $\frac{\sqrt{3}}{3} \times 27 = 9\sqrt{3}$ 이다.

2) [정답] ④ (출제자 : 21 이유경)

[출제의도] 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 5$ 에서

$f'(x) = 6x^2 + 8x + 1$ 이므로

$f'(1) = 6 + 8 + 1 = 15$ 이다.

3) [정답] ② (출제자 : 22 박민수)

[출제의도] 등비수열의 일반항을 계산할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r\,(r \neq 0)$ 라 하자.

$a_1 = \frac{a_2}{r}$ 이고, $a_4 = a_2 \times r^2$ 이다.

$a_1 \times a_4 = 72$ 이므로 $(a_2)^2 \times r = 72$ 이다.

이때 $a_2 = 6$ 이므로 $r = 2$ 이다.

따라서 $\frac{a_4}{a_2} = r^2 = 4$ 이다.

4) [정답] ③ (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ 이고 $\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$ 이므로

$\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 0 + 2 = 2$ 이다.

5) [정답] ② (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 삼각함수의 관계를 이용하여 구하고자 하는 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\sin\theta\cos\theta < 0$ 이므로 각 θ 는 제2 사분면의 각 또는 제4 사분면의 각이다.

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta) + \cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$
$$= \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = 3$$ 에서 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ 이다.

$\sin\theta\cos\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

6) [정답] ② (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 함수의 연속의 성질을 이용하여 주어진 함수가 특정 지점에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ 이다.

그러므로 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+a}-1}{x-2} = b$ 이다.

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+a}-1}{x-2}$ 에서

$x \to 2$ 일 때 (분모) $\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$ 이다.

$\lim_{x \to 2}\left(\sqrt{x^2+a}-1\right) = 0$ 이므로 $\sqrt{4+a}-1 = 0$, $a = -3$ 이다.

그러므로 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+a}-1}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}$$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}$

$= 2$ 이고

$b = 2$ 이다.

따라서 $a+b = -3+2 = -1$ 이다.

7) [정답] ① (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 시그마로 표현된 수열의 합을 계산할 수 있는가?

[해설]

$a_7 = \sum_{k=1}^{4} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{3} a_{2k-1}$

$= (16a+12)-(9a+9)$

$= 7a+3$

$= 31$ 에서 $a=4$ 이다.

$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{2} a_{2k}$

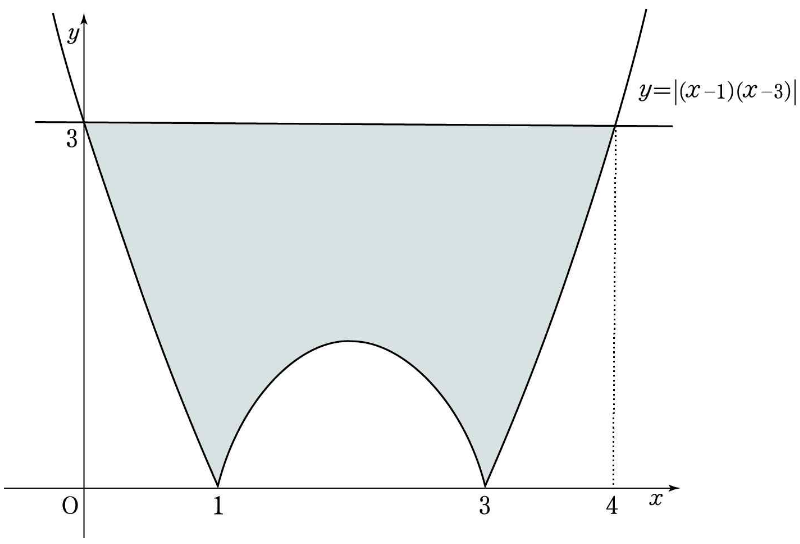
$= 4 \times 3^2 + 3 \times 3 + \dfrac{1}{4} \times (-2)^2$

$= 36+9+1 = 46$ 이다.

8) [정답] ⑤ (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 함수의 정적분을 이용하여 주어진 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]



함수 $y=(x-1)(x-3)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하고, 함수 $y=-(x-1)(x-3)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T 라 하면, 함수 $y=|(x-1)(x-3)|$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S-2T$ 와 같다.

$S = \int_0^4 \{3-(x-1)(x-3)\}\,dx$

$= \left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$

$= -\dfrac{64}{3}+32-(-0+0)$

$= \dfrac{32}{3}$ 이고

$T = \int_1^3 -(x-1)(x-3)\,dx$

$= \left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$

$= -9+18-9-\left(-\dfrac{1}{3}+2-3\right)$

$= \dfrac{4}{3}$ 이다.

따라서 $S-2T = \dfrac{32}{3} - 2 \times \dfrac{4}{3} = 8$ 이다.

9) [정답] ② (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)+f(-2)}{x^2-4} = 1$ 에서

$x \to 2$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

그러므로 $\lim_{x \to 2}\{f(x)+f(-2)\} = f(2)+f(-2) = 0$ 에서

$f(2) = -f(-2)$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$

$= \dfrac{f'(2)}{4} = 1$ 에서

$f'(2) = 4$ 이다.

$\lim_{x \to -2} \dfrac{\{f(x)\}^2+f(2)}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \dfrac{\{f(x)\}^2-f(-2)}{x^2-4} = k$ 에서

$x \to -2$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 k 로 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이다.

이때 함수 $\{f(x)\}^2$ 는 연속함수이므로

$\{f(-2)\}^2 - f(-2) = 0$ 에서

$f(-2)=0$ 또는 $f(-2)=1$ 이다.

i) $f(-2)=0$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$\lim_{x \to -2} \dfrac{\{f(x)\}^2-f(-2)}{x^2-4}$

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x+2} \times \lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x-2}$

$= f'(-2) \times \dfrac{f(-2)}{-4} = 0$ 이다.

따라서 $k=0$ 이다.

ii) $f(-2)=1$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$\lim_{x \to -2} \dfrac{\{f(x)\}^2-f(-2)}{x^2-4}$

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)-1}{x+2} \times \lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)+1}{x-2}$

$= f'(-2) \times \dfrac{f(-2)+1}{-4}$ 이다.

$f'(-2) \times \dfrac{f(-2)+1}{-4} = -\dfrac{f'(-2)}{2}$ 이고,

조건 (가)에 의해

$-\dfrac{f'(-2)}{2} = -\dfrac{f'(2)}{2} = -2$ 이다.
따라서 $k = -2$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{\{f(x)\}^2 + f(2)}{x^2 - 4} = k$ 를 만족시키는 모든 상수 k 의 값의 합은 -2 이다.

10) [정답] ① (출제자 : 22 문희성)
[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = 3$ 이다.
주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{BD}} = 1$ 이고 각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CD}}$ 이므로, $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CD}} = 3 : 1$ 이다.

$\overline{\mathrm{CD}} = k\ (k > 0)$ 라 하면, $\overline{\mathrm{AC}} = 3k$ 이다.
삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \cos C = \overline{\mathrm{AB}}^2$ 이므로
$(3k)^2 + (k+1)^2 - 2 \times 3k \times (k+1) \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 9$ 이다.
위 식을 정리하면 $(7k-8)(k+1) = 0$ 에서 $k = \dfrac{8}{7}$ 이다. ($\because k > 0$)

따라서 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CA}} = 3 + \left(1 + \dfrac{8}{7}\right) + \dfrac{24}{7} = \dfrac{60}{7}$ 이다.

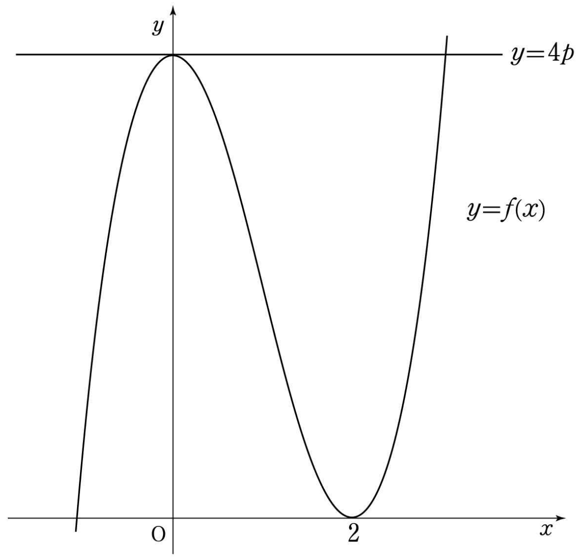
11) [정답] ④ (출제자 : 22 김건우)
[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 삼차함수를 추론할 수 있는가?

[해설]
$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(3)}{|x|}$ 에서
$x \to 0$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이다.
이때 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(0) - f(3) = 0$ 에서 $f(0) = f(3)$ 이다.

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이고
$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{-x}$ 이므로
$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ 이다.
그러므로 조건 (가)에서 $f(2) = 0$ 이다.
또한 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ 이므로 $f'(0) = 0$ 이다.

$f(0) = f(3)$ 이고 $f'(0) = 0$ 이므로
$f(x) = px^2(x-3) + f(0)\ (p > 0)$ 이다.

$f(2) = 0$ 이므로 $f(0) = 4p$ 이고
$f(x) = p(x^3 - 3x^2 + 4)$ 이다.
$f'(x) = 3px(x-2)$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x) - 8 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로
곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 8$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

그러므로 $4p = 8$ 에서
$p = 2$ 이다.

따라서 $f(x) = 2(x^3 - 3x^2 + 4)$ 이므로
$f(4) = 40$ 이다.

12) [정답] ④ (출제자 : 22 문희성)
[출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$d = 0$ 이면 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 0 보다 클 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않고 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 0 이하 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \le 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키는 자연수 n 은 무수히 많다.

$d < 0$ 이면 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 부호에 상관없이 조건 (가)를 만족시키는 자연수 n 은 무수히 많다.

따라서 $d > 0$ 이고, 조건 (가)를 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같이 2 가지의 경우가 있다.

i) $a_2 < a_3 = 0 < a_4$ 일 때
이 경우 $n = 1, 2, 3$ 일 때 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3 = 0$ 이므로, $a_n = dn - 3d$ 이다.
$|a_m| = |a_{m+3}|$ 에서 $|(m-3)d| = |md|$ 이다.
이때 $|m-3| = |m|$ 을 만족시키는 자연수 m 이 존재하지 않으므로
조건 (나)에 모순이다.

ii) $a_4 < 0 < a_5$ 일 때
이 경우 $n = 1, 2, 4$ 일 때 조건 (가)를 만족시킨다,

$|a_m| = |a_{m+3}|$ 에서 $d > 0$ 이므로 $a_m \ne a_{m+3}$ 이다.
따라서 $-a_m = a_{m+3}$

$= a_m + 3d$ 이므로

$a_m = -\frac{3}{2}d$ 이다.

$a_m = -\frac{3}{2}d$, $a_{m+1} = -\frac{1}{2}d$, $a_{m+2} = \frac{1}{2}d$, $a_{m+3} = \frac{3}{2}d$ 이고

$d > 0$ 이므로, $m = 3$ 일 때, 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

즉, $a_n = dn - \frac{9}{2}d$ 이므로 $\sum_{k=1}^{9} a_k = \frac{9}{2}d$ 이다.

또한, 주어진 조건에 의해 등차수열의 모든 항이 정수이므로 공차는 2 의 배수이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{9} a_k$ 의 값이 최소가 되도록 하는 공차 d 의 값은 2 이고,

$\sum_{k=1}^{9} a_k$ 의 최솟값은 9 이다.

13) [정답] ③ (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 활용할 수 있는가?

[해설]

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{7}{2}$ 의 역함수는 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{7}{2}\right) + 1$ 이므로

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{9}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{7}{2}$ 의 역함수의 그래프를 x 축 방향으로 1 만큼 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프이다.

그러므로 점 B 는 점 A 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축 방향으로 1 만큼, y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점이다.

직선 AB 의 기울기가 -1 이므로, 선분 AB 의 길이는 직선 $y = x + k$ 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 2 배에 $\sqrt{2}$ 를 더한 값이다.

삼각형 ABC 의 넓이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}^2 = 9$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{2}$ 이다.

그러므로 $\frac{|0-k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \times 2 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 에서

$k = 2$ 이다.

점 A 의 좌표가 $(a, a+2)$ 이므로 점 B 의 좌표는 $(a+3, a-1)$,

점 C 의 좌표는 $(a+3, a+5)$ 이다.

$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{41}{16}$ 이므로 점 D 의 좌표는 $\left(a+3, a+\frac{25}{16}\right)$ 이다.

점 A 와 점 D 는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{7}{2}$ 위의 점이므로

$a + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} + \frac{7}{2}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} = a - \frac{3}{2}$ 이고,

$a + \frac{25}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a+2} + \frac{7}{2}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+2} = a - \frac{31}{16}$ 이다.

$a - \frac{3}{2} = 8a - \frac{31}{2}$ 에서 $a = 2$ 이다.

따라서 $a^2 + k^2 = 4 + 4 = 8$ 이다.

[별해]

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{7}{2}$ 의 역함수는 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{7}{2}\right) + 1$ 이므로

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{9}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{7}{2}$ 의 역함수의 그래프를 x 축 방향으로 1 만큼 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프이다.

그러므로 두 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \frac{7}{2}$ 와 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{9}{2}\right)$ 는

직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이고

점 A 와 점 B 는 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이다.

직선 AB 의 기울기가 -1 이므로, 선분 AB 의 길이는 직선 $y = x + k$ 와 직선 $y = x - 1$ 사이의 거리의 2 배이다.

삼각형 ABC 의 넓이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}^2 = 9$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{2}$ 이다.

그러므로 $\frac{|-k-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \times 2 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 에서

$k = 2$ 이다.

(이하 동일)

14) [정답] ③ (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 해석하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$$|f(x)| - f(x) = \begin{cases} -2f(x) & (f(x) \leq 0) \\ 0 & (f(x) > 0) \end{cases}$$

이므로

방정식 $f(x) = 0$ 의 실근을 기준으로 $|f(x)| - f(x)$ 의 값이 달라진다.

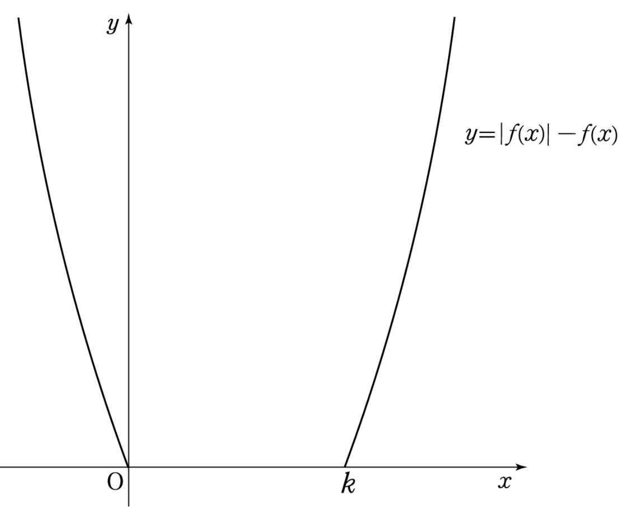
방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 $x = 0$ 과 $x = k$ 이므로 k 의 범위에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 볼 수 있다.

ⅰ) $k \geq 1$ 일 때

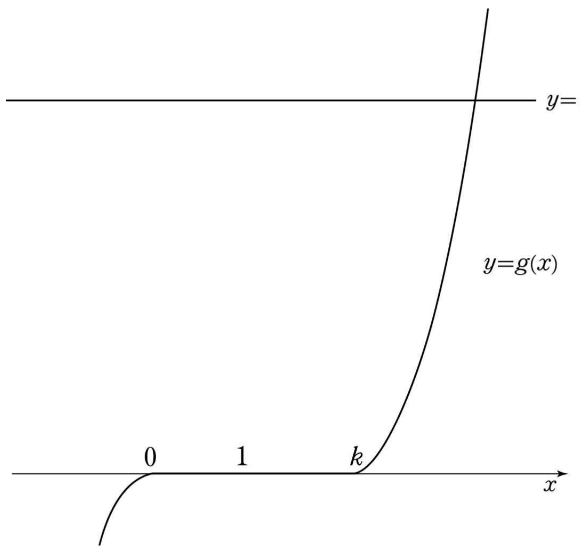
함수 $|f(x)| - f(x)$ 는 다음과 같다.

$$|f(x)| - f(x) = \begin{cases} 3x(x-k) & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x < k) \\ 3x(x-k) & (x \geq k) \end{cases}$$

따라서 함수 $|f(x)| - f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)=\int_1^x \{|f(t)|-f(t)\}\,dt$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



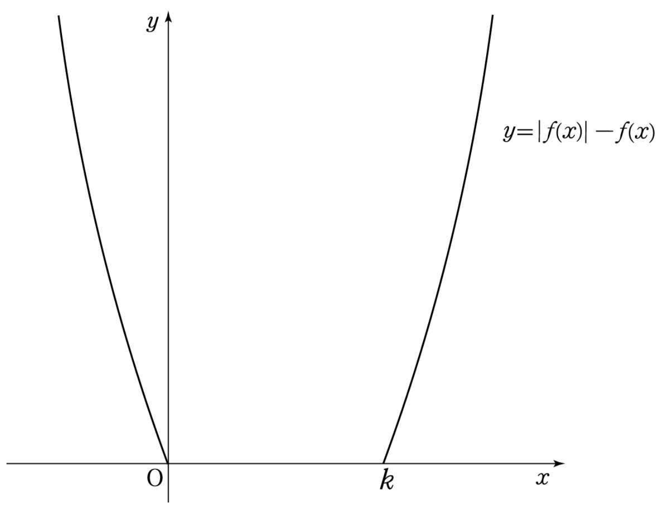
집합 $\{x \mid g(x)=2k\}$ 의 원소의 개수가 1 이므로 주어진 조건에 모순이다.

ii) $0<k<1$ 일 때

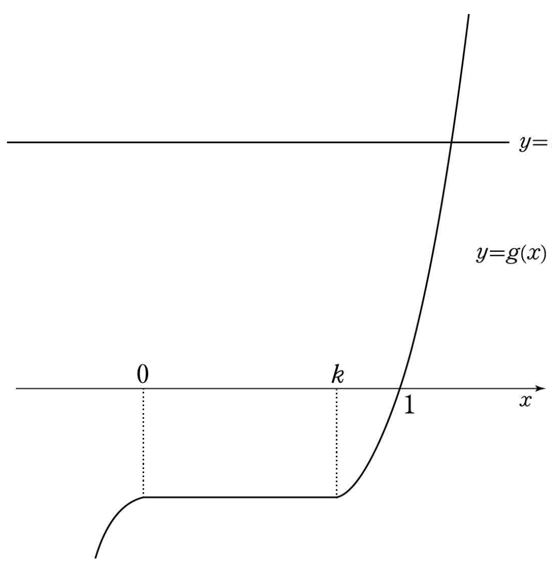
함수 $|f(x)|-f(x)$ 는 다음과 같다.

$$|f(x)|-f(x)=\begin{cases} 3x(x-k) & (x<0) \\ 0 & (0 \le x < k) \\ 3x(x-k) & (x \ge k) \end{cases}$$

따라서 함수 $|f(x)|-f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)=\int_1^x \{|f(t)|-f(t)\}\,dt$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



집합 $\{x \mid g(x)=2k\}$ 의 원소의 개수가 1 이므로 주어진 조건에 모순이다.

iii) $k=0$ 일 때

$k=0$ 이면 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2$ 이고, $|f(x)|-f(x)=3x^2$ 이다.

이때 $g(x)=\int_1^x 3t^2\,dt$

$=x^3-1$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

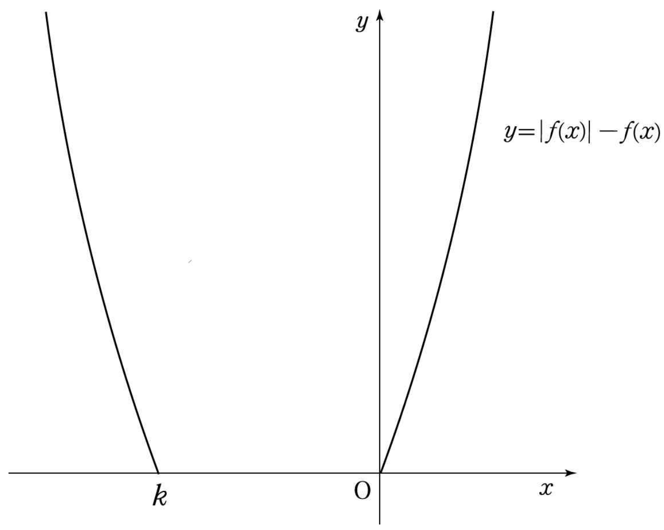
집합 $\{x \mid g(x)=2k=0\}$ 의 원소의 개수가 1 이므로 주어진 조건에 모순이다.

iv) $k<0$ 일 때

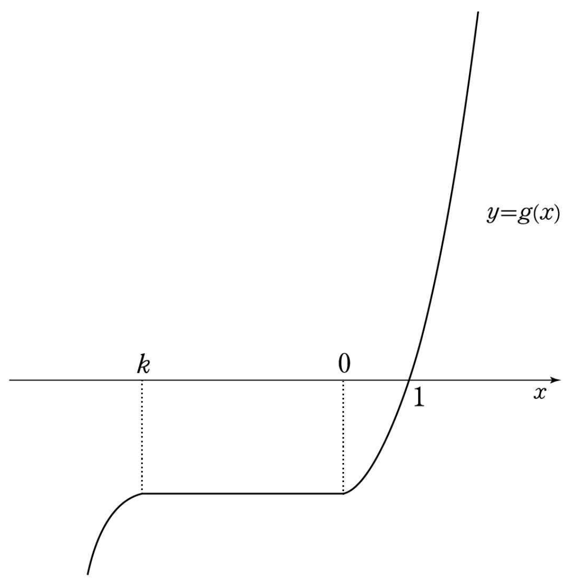
함수 $|f(x)|-f(x)$ 는 다음과 같다.

$$|f(x)|-f(x)=\begin{cases} 3x(x-k) & (x<k) \\ 0 & (k \le x < 0) \\ 3x(x-k) & (x \ge 0) \end{cases}$$

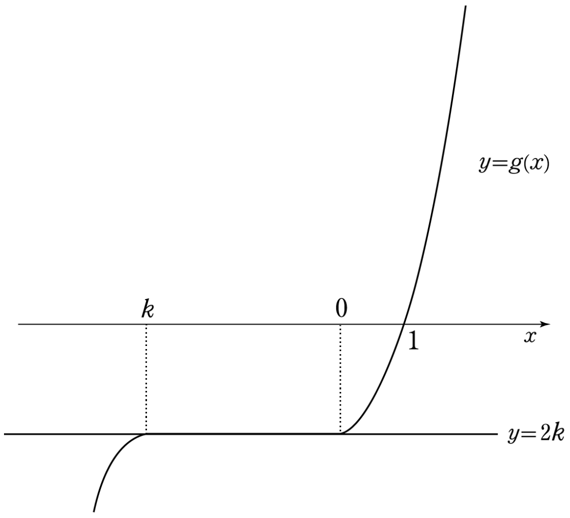
따라서 함수 $|f(x)|-f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)=\int_1^x \{|f(t)|-f(t)\}\,dt$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 조건에 의해 집합 $\{x \mid g(x)=2k\}$ 의 원소의 개수는 무수히 많아야 하므로, $g(k)=g(0)=2k$ 이다.

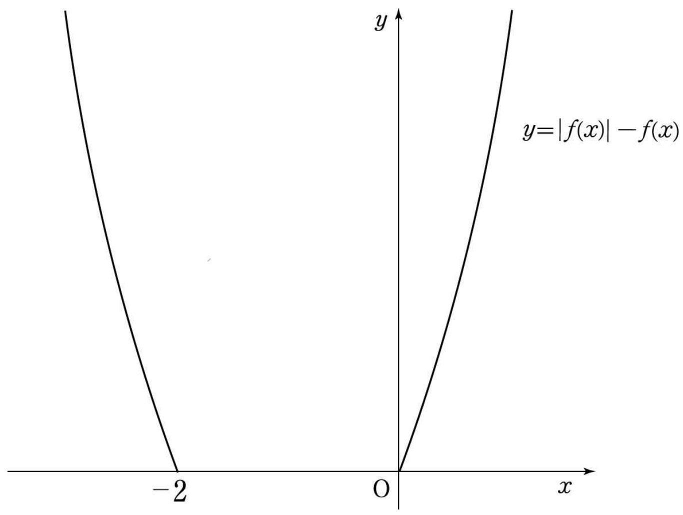


이때 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) < 0$ 이므로

$$g(0) = \int_1^0 \{|f(x)| - f(x)\}\,dx$$
$$= \int_1^0 -2f(x)\,dx$$
$$= \int_1^0 3x(x-k)\,dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{3}{2}kx^2\right]_1^0$$
$$= -1 + \frac{3}{2}k \text{ 이고,}$$

$g(0) = 2k$ 이므로 $-1 + \frac{3}{2}k = 2k$ 에서 $k = -2$ 이다.

이때 함수 $|f(x)| - f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $g(-3) = \int_1^{-3} \{|f(x)| - f(x)\}\,dx$
$$= \int_1^0 \{|f(x)| - f(x)\}\,dx + \int_{-2}^{-3} \{|f(x)| - f(x)\}\,dx$$

함수 $|f(x)| - f(x)$ 가 $x = -1$ 에 대하여 대칭이므로

$\int_1^0 \{|f(x)| - f(x)\}\,dx = \int_{-2}^{-3} \{|f(x)| - f(x)\}\,dx$ 이므로

$\int_1^0 \{|f(x)| - f(x)\}\,dx + \int_{-2}^{-3} \{|f(x)| - f(x)\}\,dx$
$= g(0) + g(0)$
$= 2k + 2k$
$= -8$ 이다.

15) [정답] ⑤ (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 삼각함수 그래프의 대칭성을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

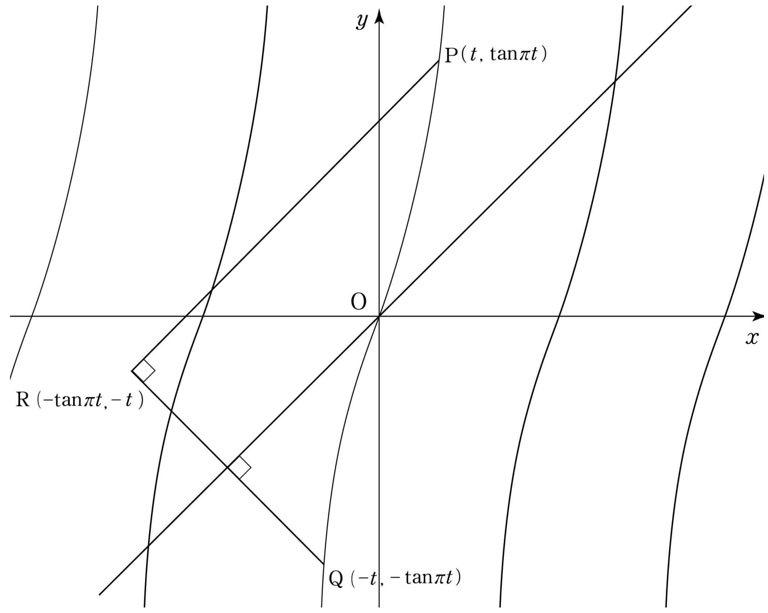
ㄱ.

점 P 의 좌표는 $(t, \tan \pi t)$ 이고, 점 Q 는 점 P 를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q 의 좌표는 $(-t, -\tan \pi t)$ 이다.

또한, 점 R 는 점 Q 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 R 의 좌표는 $(-\tan \pi t, -t)$ 이다.

이때 직선 PR 의 기울기는 $\frac{\tan \pi t - (-t)}{t - (-\tan \pi t)} = 1$ 이고, 직선 QR 의 기울기는 $\frac{-\tan \pi t - (-t)}{-t - (-\tan \pi t)} = -1$ 이다.

즉, 직선 PR 의 기울기와 직선 QR 의 기울기의 곱은 -1 이므로 그림과 같이 두 직선은 서로 수직이다.



따라서 $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$ 이다. (참)

ㄴ.

삼각형 PQS 의 넓이는 삼각형 POS (단, O 는 원점)의 넓이의 2 배이다.

점 P 와 직선 $y = x$ 사이의 거리를 d 라 하면,

$d = \frac{|t - \tan \pi t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\tan \pi t - t}{\sqrt{2}}$ 이다.

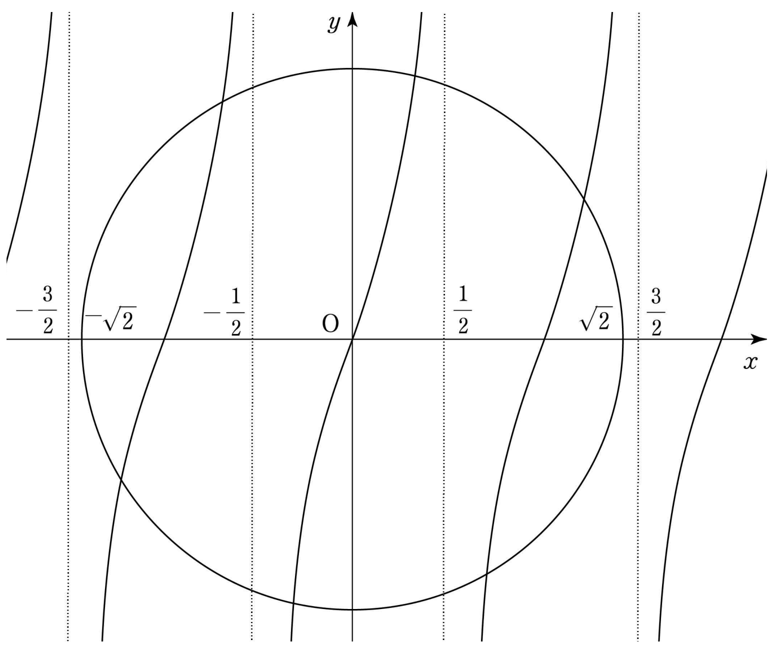
선분 OS 의 길이는 원 C 의 반지름의 길이와 같고, 삼각형 PQS 의 넓이는

$2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times d = \overline{OS} \times \frac{\tan \pi t - t}{\sqrt{2}}$ 이므로,

$\overline{OS} \times \frac{\tan \pi t - t}{\sqrt{2}} = \tan \pi t - t$ 가 되도록 하는 실수 t 에 대하여

원 C 의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

이때 원 C 와 곡선 $y = \tan \pi x$ 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 원 C가 곡선 $y=\tan\pi x$와 만나는 점의 개수는 6이므로 $f(t)=6$이다. (참)

ㄷ.
밑변의 길이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 높이의 비와 같다. 즉, 삼각형 PQR의 넓이와 삼각형 PQS의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면, $\dfrac{\overline{\mathrm{RR}'}}{\overline{\mathrm{SS}'}}=\dfrac{S_1}{S_2}$이다.

$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 삼각형 PQR는 직각삼각형이고,

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(t+\tan\pi t)^2+(\tan\pi t+t)^2}=\sqrt{2}(\tan\pi t+t)$,

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{(-t+\tan\pi t)^2+(-\tan\pi t+t)^2}=\sqrt{2}(\tan\pi t-t)$이다.

그러므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QR}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(\tan\pi t+t)\times\sqrt{2}(\tan\pi t-t)$$
$$=\tan^2\pi t-t^2\text{ 이다.}$$

점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 d라 하면,
ㄴ에서

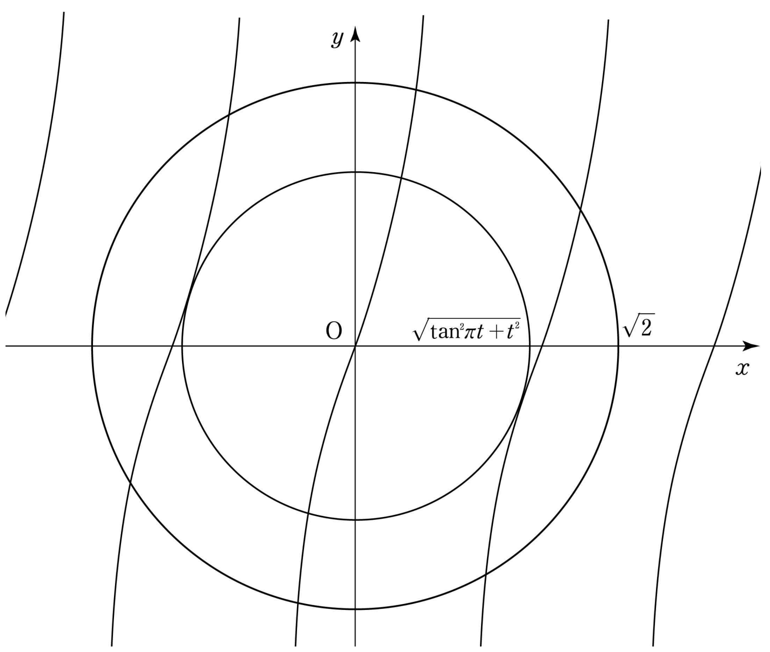
$S_2=2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times d$이고,

$\overline{\mathrm{OS}}=\sqrt{\tan^2\pi t+t^2}$이므로

$S_2=\dfrac{\sqrt{\tan^2\pi t+t^2}(\tan\pi t-t)}{\sqrt{2}}$이다.

즉, $\dfrac{\overline{\mathrm{RR}'}}{\overline{\mathrm{SS}'}}=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\sqrt{2}(\tan\pi t+t)}{\sqrt{\tan^2\pi t+t^2}}$이다.

이때 $f(t)=4$가 되도록 하는 실수 t에 대하여 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{\tan^2\pi t+t^2}$은 $\sqrt{2}$보다 작다.



따라서 $\dfrac{\sqrt{2}(\tan\pi t+t)}{\sqrt{\tan^2\pi t+t^2}}>\tan\pi t+t$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{RR}'}}{\overline{\mathrm{SS}'}}>\tan\pi t+t$이다. (참)

16) [정답] 3 (출제자 : 22 문희성)
[출제의도] 로그의 성질을 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$$\log_3 36+\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_3 36+2\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\log_3 36+\log_3\frac{3}{4}$$
$$=\log_3 27$$
$$=3$$

17) [정답] 7 (출제자 : 21 서연수)
[출제의도] 부정적분을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+4x$이므로

$$f(x)=\int(6x^2+4x)\,dx$$
$$=2x^3+2x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\text{이다.}$$

이때 $f(-1)=3$이므로 $C=3$이고
$f(1)=7$이다.

[별해]
$\displaystyle\int_{-1}^{1}f'(x)\,dx=f(1)-f(-1)$이므로

$$\int_{-1}^{1}(6x^2+4x)\,dx=2\int_0^1 6x^2\,dx$$
$$=2\left[2x^3\right]_0^1$$
$$=4\text{ 에서}$$

$f(1)=f(-1)+4=7$이다.

18) [정답] 9 (출제자 : 21 김민성)
[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하고 있는가?

[해설]
ⅰ) $n<6$일 때
$n-6<0$이므로
n이 홀수일 때 $f(n)=1$이고 n이 짝수일 때 $f(n)=0$이다.

그러므로 $f(2)=f(4)=0$, $f(3)=f(5)=1$이다.

ⅱ) $n=6$일 때
$n-6=0$이므로 $f(6)=1$이다.

ⅲ) $n>6$일 때
$n-6>0$이므로
n이 홀수일 때 $f(n)=1$이고 n이 짝수일 때 $f(n)=2$이다.

그러므로 $f(8)=f(10)=2$이고 $f(7)=f(9)=1$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}f(k)=9$이다.

19) [정답] 8 (출제자 : 21 심현재)
[출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{9}{2}$

$\quad = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ 이고,

$f'(x) = x+3$ 이다.

$f(-2) = -4$ 이고 $f'(-2) = 1$ 이므로

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$ 에서의 접선의 방정식은

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

$= (x+2) - 4$

$= x - 2$ 이다.

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x-5) + \frac{9}{2}$ 라 하면

$g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$ 이다.

방정식 $g(x) = x-2$ 의 두 실근이 $x=2,\ x=4$ 이므로

점 A 의 좌표는 $(2,\ 0)$, 점 B 의 좌표는 $(4,\ 2)$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \sqrt{(4-2)^2+(2-0)^2}^{\,2}$

$= 8$ 이다

20) [정답] 225 (출제자 : 22 김건우)

[출제의도] 위치와 속도 사이의 관계를 바르게 사용할 수 있는가?

[해설]

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 t 에서의 위치를

각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면,

$x_1(t) = \int_0^t (6u+2a)\,du = 3t^2 + 2at$ 이고

$x_2(t) = \int_0^t (2au+3)\,du = at^2 + 3t$ 이다.

두 점 사이의 거리를 $x(t)$ 라 하면,

$x(t) = |(3-a)t^2 + (2a-3)t| = |\{(3-a)t + 2a-3\}t|$ 이다.

두 점이 서로 멀어지는 것은 두 점 사이의 거리가 증가하는 것과 같다.

즉, 어떤 실수 k 에 대하여 $t=k$ 에서 두 점 P, Q 가 서로 멀어진다는 것은

$t=k$ 일 때 함수 $x(t)$ 가 증가한다는 것과 같다.

ⅰ) $a=3$ 일 때

$x(t) = |3t|$ 이고 두 점이 서로 멀어지는 t 의 범위는 $t>0$ 이다.

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 모순이다.

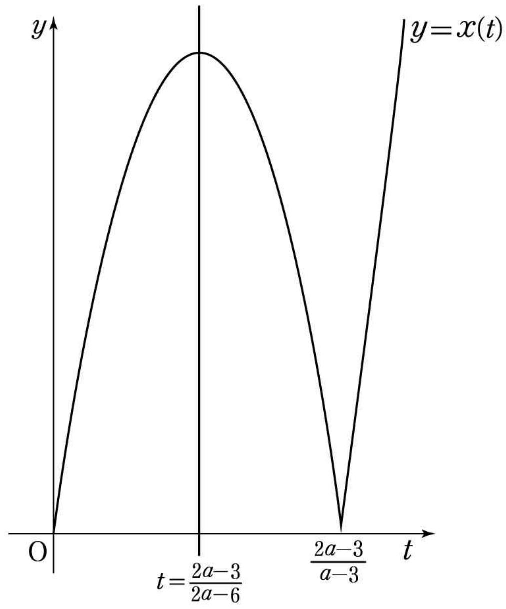
ⅱ) $a \neq 3$ 일 때

방정식 $x(t) = 0$ 의 두 실근은 $t=0,\ t=\frac{2a-3}{a-3}$ 이다.

만약 $\frac{2a-3}{a-3} \leq 0$ 이면, 두 점이 서로 멀어지는 t 의 범위는 $t>0$ 이다.

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 모순이다.

따라서 $\frac{2a-3}{a-3} > 0$ 이고, 이때 함수 $x(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 두 점이 서로 멀어지는 t 의 범위는

$0 < t < \frac{2a-3}{2a-6}$ 또는 $t > \frac{2a-3}{a-3}$ 이다.

따라서 $b = \frac{2a-3}{2a-6}$ 이고 $\frac{2a-3}{a-3} = 3$ 이다.

즉 $a=6$ 이고 $b = \frac{3}{2}$ 이므로

$30(a+b) = 225$ 이다.

21) [정답] 83 (출제자 : 22 김건우)

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용할 수 있는가?

[해설]

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{a_{n+1}}{3^n}$ 또는 $a_n = 3a_{n+1}$ 이다.

$a_{46} = 3$ 이므로 $a_{45} = \frac{1}{3^{44}}$ 또는 $a_{45} = 3^2$ 이다.

만약 $a_{45} = \frac{1}{3^{44}}$ 라면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 임에 모순이다.

따라서 $a_{45} = 3^2$ 이다.

$a_{45} = 3^2$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 이므로 $a_{44} = 3^3$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_{24} = 3^{23}$ 이다. (출제자의 말 참고)

$a_{24} = 3^{23}$ 이므로 $a_{23} = 1$ 또는 $a_{23} = 3^{24}$ 이다.

ⅰ) $a_{23} = 3^{24}$ 일 때

$a_{23} = 3^{24}$ 이므로 $a_{22} = 3^{25}$ 이다.

또한, $a_{22} = 3^{25}$ 이므로 $a_{21} = 3^{26}$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_1 = 3^{46}$ 이다.

ⅱ) $a_{23} = 1$ 일 때

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 이므로 $a_{22} = 3$ 이다.

$a_{22} = 3$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 이므로 $a_{21} = 3^2$ 이다.

$a_{21} = 3^2$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 이므로 $a_{20} = 3^3$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_{12} = 3^{11}$ 이다.

$a_{12} = 3^{11}$ 이므로 $a_{11} = 1$ 또는 $a_{11} = 3^{12}$ 이다.

ii) − ① $a_{11}=3^{12}$ 일 때

$a_{11}=3^{12}$ 이므로 $a_{10}=3^{13}$ 이다.

또한, $a_{10}=3^{13}$ 이므로 $a_9=3^{14}$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_1=3^{22}$ 이다.

ii) − ② $a_{11}=1$ 일 때

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_{10}=3$ 이다.

$a_{10}=3$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_9=3^2$ 이다.

$a_9=3^2$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_8=3^3$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_6=3^5$ 이다.

$a_6=3^5$ 이므로 $a_5=1$ 또는 $a_5=3^6$ 이다.

ii) − ② − (a) $a_5=3^6$ 일 때

$a_5=3^6$ 이므로 $a_4=3^7$ 이다.

또한, $a_4=3^7$ 이므로 $a_3=3^8$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_1=3^{10}$ 이다.

ii) − ② − (b) $a_5=1$ 일 때

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_4=3$ 이다.

$a_4=3$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_3=3^2$ 이다.

$a_3=3^2$ 이므로 $a_2=1$ 또는 $a_2=3^3$ 이다.

$a_2=1$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_1=3$ 이다.

$a_2=3^3$ 일 때, $a_1=3^4$ 이다.

따라서 $a_{46}=3$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값은 3, 3^4, 3^{10}, 3^{22}, 3^{46} 이다.

그러므로 $k=1+4+10+22+46=83$ 이다.

[출제자의 말]

어떤 자연수 m 에 대하여 $a_{2m+1}=1$ 이라 하자.

$a_{2m+1}=1$ 에서 $a_{2m}=\dfrac{1}{3^{2m}}$ 또는 $a_{2m}=3$ 이다.

하지만 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\geq 1$ 이므로 $a_{2m}=3$ 이다.

같은 방법으로 $a_{2m-1}=3^2$, $a_{2m-2}=3^3\cdots$ 이다.

따라서 $a_{m+1}=3^m$ 이다.

$a_{m+1}=3^m$ 에서 $a_m=1$ 또는 $a_m=3^{m+1}$ 이다.

따라서 $a_{2m+1}=1$ 이라면 $a_m=3^{m+1}$ 또는 $a_m=1$ 이다.

$a_m=3^{m+1}$ 일 때, $a_{m-1}=3^2$ 또는 $a_{m-1}=3^{m+2}$ 이다.

하지만 $a_{m-1}=3^2$ 이고 $a_m=3^{m+1}$ 이려면 a_{m-1} 은 3 의 배수가 아니어야 하므로 모순이다.

그러므로 $a_{m-1}=3^{m+2}$ 이다.

같은 방법을 반복하면 $a_1=3^{2m}$ 이다.

따라서 $a_m=3^{m+1}$ 이라면 $a_1=3^{2m}$ 이다.

$a_m=1$ 일 때, $m=2k+1$ (k 는 자연수) 꼴을 만족시킨다면 위와 같은 과정을 반복하면 된다.

※ 47, 23, 11, 5 로 좁혀지기 때문에 대부분 이 꼴을 만족시킨다.

이 사실을 이용하면 수열을 더 직관적으로 바라볼 수 있다.

22) [정답] 15 (출제자 : 21 박창수)

[출제의도] 곱으로 표현된 낯선 함수의 미분가능성을 파악하여 삼차함수를 추론할 수 있는가?

[해설]

함수 $h(x)=(x-t)(x-t-3)$ 라 하자.

함수 $g(x)(x-t)(x-t-3)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 우선 함수 $g(x)$ 가 구간 $(-\infty,t)\cup(t,t+3)\cup(t+3,\infty)$ 에서 미분가능해야 한다.

구간 $(-\infty,t)$, $(t+3,\infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(x)=f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

$$\left|\frac{1}{3}(f(t+3)-f(t))(x-t)+f(t)\right|=\left|\frac{f(t+3)-f(t)}{t+3-t}(x-t)+f(t)\right|$$

이고 $g(t)=|f(t)|$, $\lim\limits_{x\to(t+3)-}g(x)=|f(t+3)|$ 이므로

구간 $[t,t+3)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 두 점 $(t,f(t))$, $(t+3,f(t+3))$ 을 지나는 직선의 방정식에 절댓값을 취한 것과 같다.

만약 구간 $(t,t+3)$ 에 방정식 $g(x)=0$ 을 만족시키는 한 실근 α 가 존재하면, 구간 $[t,t+3)$ 에서 함수 $g(x)$ 에 대해

$g(x)=|m(x-\alpha)|$ $(m\neq 0)$ 라 할 때

$$\lim_{x\to\alpha+}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{|m||x-\alpha|}{x-\alpha}=|m|,$$

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha-}\frac{|m||x-\alpha|}{x-\alpha}=-|m|$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 구간 $(t,t+3)$ 에서 미분가능하려면 구간 $(t,t+3)$ 에 방정식 $g(x)=0$ 을 만족시키는 한 실근 α 가 존재하지 않아야 하므로 $f(t)f(t+3)\geq 0$ 이어야 한다.

함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 t 의 범위는 $3\leq t\leq 4$ 이므로, $3\leq t\leq 4$ 일 때, 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=t$, $t+3$ 에서도 미분가능해야 한다.

이제 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=t$, $t+3$ 에서 미분가능하기 위한 조건들을 찾아보자.

(1) 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하기 위한 조건

$$\lim_{x\to t+}g(x)h(x)=\lim_{x\to t+}\left|\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)\right|h(x)$$
$$=|f(t)|h(t)=0,$$

$$\lim_{x\to t-}g(x)h(x)=\lim_{x\to t-}f(x)h(x)$$
$$=f(t)h(t)=0$$

$g(t)h(t)=0$ 이므로

함수 $g(x)h(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이다

$\lim_{x\to t+}\frac{g(x)h(x)-g(t)h(t)}{x-t} = \lim_{x\to t-}\frac{g(x)h(x)-g(t)h(t)}{x-t}$ 에서
$h(t)=0$ 이므로

$\lim_{x\to t+}\frac{\left|\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)\right|h(x)}{x-t} = \lim_{x\to t-}\frac{f(x)h(x)}{x-t}$,
$-3|f(t)| = -3f(t)$ 이다.
그러므로 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하려면 $f(t)\ge 0$ 이다.

(2) 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=t+3$ 에서 미분가능하기 위한 조건

$\lim_{x\to(t+3)+} g(x)h(x)$
$= \lim_{x\to(t+3)+} \left|\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)\right|h(x)$
$= |f(t+3)|h(t+3) = 0$,

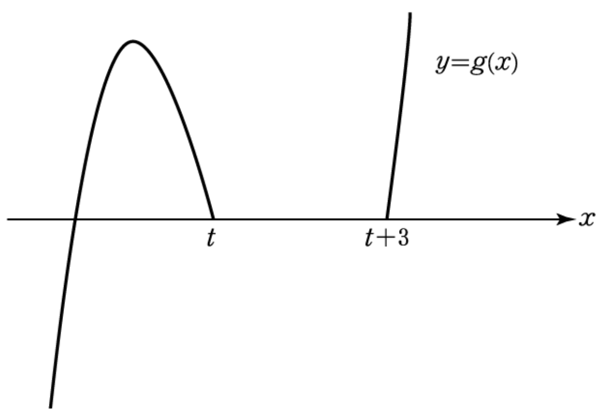
$\lim_{x\to(t+3)-} g(x)h(x)$
$= \lim_{x\to(t+3)-} f(x)h(x)$
$= f(t+3)h(t+3) = 0$

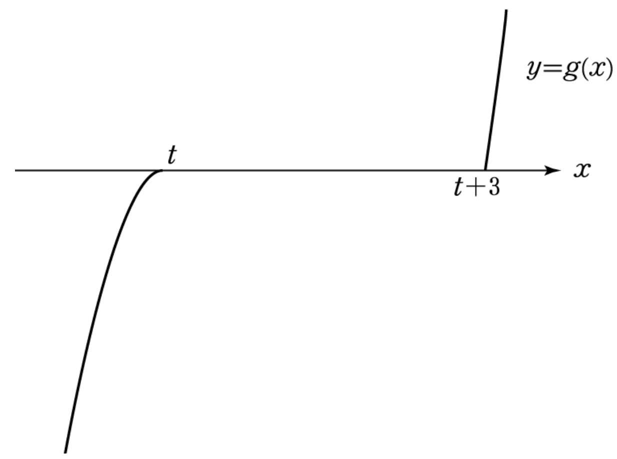
$g(t+3)h(t+3)=0$ 이므로
함수 $g(x)h(x)$ 는 $x=t+3$ 에서 연속이다

$\lim_{x\to(t+3)+}\frac{f(x)h(x)-f(t+3)h(t+3)}{x-t-3}$
$= \lim_{x\to(t+3)-}\frac{f(x)h(x)-f(t+3)h(t+3)}{x-t-3}$ 에서 $h(t+3)=0$ 이므로,
$\lim_{x\to(t+3)+}\frac{\left|\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)\right|h(x)}{x-t-3}$
$= \lim_{x\to(t+3)-}\frac{f(x)h(x)}{x-t-3}$, $3|f(t+3)| = 3f(t+3)$ 이다.

그러므로 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=t+3$ 에서 미분가능하려면
$f(t+3)\ge 0$ 이다.

이때, $f(t)=f(t+3)=0$ 이면 함수 $g(x)$ 의 그래프의
개형은 다음과 같다.





이때, 함수 $g(x)h(x)$ 는 $3\le t\le 4$ 에서 미분가능하지만
$4<t<6$ 에서도 미분가능하므로 주어진 조건에 모순이다.

따라서 함수 $g(x)h(x)$ 는 $3\le t\le 4$ 인 실수 t 에 대하여 부등식
$f(t)\ge 0$, $f(t+3)\ge 0$ 을 만족시키고, 방정식 $f(t)=f(t+3)=0$ 을
만족시키지 않을 때 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$3\le t\le 4$ 에서 $6\le t+3\le 7$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $[3, 4]$,
$[6, 7]$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이고 구간 $[4, 6]$ 에서 $f(x)\le 0$ 이다.
이때 삼차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4-} f(x) = f(4)$ 이다.
그런데 $\lim_{x\to 4+} f(x)\le 0$ 이고 $\lim_{x\to 4-} f(x)\ge 0$ 이다.
그러므로 $0\le \lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4+} f(x)\le 0$ 에서 $f(4)=0$ 이다.

같은 방법으로 $f(6)=0$ 이므로 $f(x)=(x-2)(x-4)(x-6)$ 이다.

이제 함수 $g(x)(x-t-3)$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는
실수 t 의 값을 구하자.

(1) 함수 $g(x)(x-t-3)$ 이 $x=t$ 에서 미분가능하기 위한 조건

$\lim_{x\to t+} g(x)(x-t-3) = -3|f(t)|$
$\lim_{x\to t-} g(x)(x-t-3) = -3|f(t)|$
$g(t)(t-t-3) = -3|f(t)|$ 에서
$-3|f(t)| = -3f(t)$ 이므로
함수 $g(x)(x-t-3)$ 이 $x=t$ 에서 연속이려면 $f(t)\ge 0$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to t+}\frac{g(x)(x-t-3)-\{-3g(t)\}}{x-t} = \lim_{x\to t-}\frac{g(x)(x-t-3)-\{-3g(t)\}}{x-t}$
에서
$\lim_{x\to t+}\frac{\left|\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)\right|(x-t-3)-(-3)g(t)}{x-t}$
$= \lim_{x\to t+}\frac{\left|\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)\right|(x-t-3)+3g(t)}{x-t}$
$= \lim_{x\to t+}\frac{\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)^2+(x-t)\{2f(t)-f(t+3)\}}{x-t}$
$= 2f(t)-f(t+3)$ 이고
$\lim_{x\to t-}\frac{f(x)(x-t-3)-(-3)f(t)}{x-t}$
$= \lim_{x\to t-}\frac{(x-t)f(x)-3\{f(x)-f(t)\}}{x-t}$
$= f(t)-3f'(t)$ 이므로
$2f(t)-f(t+3) = f(t)-3f'(t)$, 즉 $f(t+3)-f(t) = 3f'(t)$ 이다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 그래프와 함수 $\frac{1}{3}(f(t+3)-f(t))(x-t)+f(t)$ 가 점 $(t,\ f(t))$ 에서 접해야 한다.

(2) 함수 $g(x)(x-t-3)$ 이 $x=t+3$ 에서 미분가능하기 위한 조건

함수 $g(x)(x-t-3)$ 은 $x=t+3$ 에서 함숫값이 0 이다.
$\lim_{x\to(t+3)+}\frac{f(x)(x-t-3)}{x-t-3}=\lim_{x\to(t+3)-}\frac{f(x)(x-t-3)}{x-t-3}$ 에서

$f(t+3)=|f(t+3)|$ 이므로 함수 $g(x)(x-t-3)$ 이 $x=t+3$ 에서 연속이려면 $f(t+3)\geq 0$ 이어야 한다.

따라서 함수 $g(x)(x-t-3)$ 는 어떤 실수 t 에 대하여
$f(t)\geq 0$, $f(t+3)\geq 0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 그래프와 함수
$\frac{1}{3}\{f(t+3)-f(t)\}(x-t)+f(t)$ 의 그래프가 점 $(t,\ f(t))$ 에서 접할 때 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\frac{f(t+3)-f(t)}{(t+3)-t}=3f'(t)$ 에
$f(t+3)=(t+1)(t-1)(t-3)=t^3-3t^2-t+3$,
$f(t)=(t-2)(t-4)(t-6)=t^3-12t^2+44t-48$,
$f'(t)=3t^2-24t+44$ 를 각각 대입하면
$\frac{9t^2-45t+51}{3}=3t^2-24t+44$ 이고,
이 식을 정리하면 $t=3$ 이다.
그러므로 $a=3$ 이다.

따라서 $f(a+4)=f(7)=15$ 이다.

[추가 해설]

ⅰ) 함수 $g(x)$ 가 구간 $(-\infty,\ t)$ 또는 $(t,\ t+3)$ 또는 $(t+3,\ \infty)$ 에서 미분불가능하다고 가정하자.
우선 $h(x)=(x-t)(x-t-3)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 구간 $(-\infty,\ t)\cup(t+3,\ \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
따라서 가정에 따르면 함수 $g(x)$ 는 $(t,\ t+3)$ 에서 미분불가능하다.
함수 $g(x)$ 가 $(t,\ t+3)$ 에서 미분불가능하면 구간 $(t,\ t+3)$ 에 방정식 $g(x)=0$ 을 만족시키는 한 실근 α 가 존재한다.
이때, 함수 $g(x)h(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 미분불가능하므로 함수 $g(x)$ 는 $g(x)(x-t)(x-t-3)$ 가 미분가능할 때,
구간 $(-\infty,\ t)\cup(t,\ t+3)\cup(t+3,\ \infty)$ 에서 미분가능해야 한다.

ⅱ) 실수 전체의 집합을 U,
집합 $A=(-\infty,\ t)\cup(t,\ t+3)\cup(t+3,\ \infty)$ 라 하자.
함수 $g(x)h(x)$ 가 구간 $(-\infty,\ t)\cup(t,\ t+3)\cup(t+3,\ \infty)$ 에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $f(t)f(t+3)\geq 0$ 이다.
여기서 함수 $g(x)h(x)$ 는 $3\leq t\leq 4$ 일 때, 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $3\leq t\leq 4$ 에서도 $f(t)f(t+3)\geq 0$ 이어야 한다.
그런데 $f(t)f(t+3)\geq 0$ 은 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 필요충분조건이 아닌 집합 A 에서 미분가능할 필요충분조건이므로 함수 $g(x)h(x)$ 는 집합 $U-A=\{x|x=t$ 또는 $x=t+3\}$ 에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $3\leq t\leq 4$ 이다.

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ③ (출제자 : 22 임지훈)

[출제의도] 이항분포의 분산을 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(75,\ \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=75\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=12$ 이다.

24) [정답] ① (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r\,(x^2)^{5-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r$ 이다.

$r=3$ 일 때 ${}_5\mathrm{C}_3\times(x^2)^{5-3}\times\left(-\frac{2}{x}\right)^3=-80x$ 에서

x 의 계수는 -80 이다.

25) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 독립시행의 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

서로 다른 동전 2 개를 동시에 던졌을 때, 2 개의 동전 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

서로 다른 동전 2 개를 동시에 던지는 시행을 5 회 반복할 때, 2 개의 동전 모두 앞면이 나오는 사건이 3 번 이하로 발생할 사건을 A 라 하자,

이때 A 의 여사건은 서로 다른 동전 2 개를 던지는 시행을 5 회 반복할 때, 2 개의 동전 모두 앞면이 나오는 사건이 4 회 이상 발생할 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{64}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$ 이다.

(단, A^C 는 A 의 여사건이다.)

26) [정답] ① (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 중복조합을 활용할 수 있는가?

[해설]

네 종류의 과일 중 서로 다른 두 종류의 과일을 고르는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 이다.

즉, 바구니에 들어갈 수 있는 서로 다른 두 종류의 과일을 고르는 경우의 수는 총 6 이다.

따라서 서로 같은 세 개의 바구니에 각각 서로 다른 두 종류의 과일을 하나씩 넣는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{H}_3=56$ 이다.

27) [정답] ④ (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 정규분포 그래프의 특징을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

정규분포곡선은 평균에서 최댓값을 가지므로, 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(10)$ 이다.

함수 $g(x)$ 의 최댓값이 $f(10)$ 보다 작으면 방정식 $g(x)=f(10)$ 은 실근을 갖지 않고, 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 $f(10)$ 보다 크면 방정식 $g(x)=f(10)$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=f(10)$ 이 오직 하나의 실근을 갖기 위해서는 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 $f(10)$ 과 같아야 하므로, 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최댓값은 같다.

정규분포곡선의 최댓값은 오직 정규분포의 표준편차에 의해서만 결정되므로, 두 정규분포곡선의 최댓값이 같다면 두 정규분포의 표준편차는 서로 같다.

따라서 $\sigma=4$ 이다.

$\mathrm{P}(X\geq\sigma)+\mathrm{P}(Y\geq 12)$

$=\mathrm{P}(X\geq 4)+\mathrm{P}(Y\geq 12)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{4-10}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{12-m}{4}\right)=1$ 이므로

$\frac{4-10}{4}=-\frac{12-m}{4}$ 에서 $m=6$ 이다.

28) [정답] ② (출제자 : 21 박창수)

[출제의도] 모평균을 추정하여 신뢰구간을 구할 수 있는가?

학생 49 명을 임의추출하여 얻은 하루 운동 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_1}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\leq m\leq\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$ 이다.

이 신뢰구간이 $a\leq m\leq 2-a$ 이므로

$2-a+a=2\overline{x_1}$ 에서 $\overline{x_1}=1$ 이고,

$a-(2-a)=2a-2=-2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$ 에서

$a=1-0.28\sigma$ 이다.

또한 이 고등학교 학생 36명을 임의추출하여 얻은 하루 운동 시간의 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2} - 2.58 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{36}} \le m \le \overline{x_2} + 2.58 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}$ 이다.

이 신뢰구간이 $a+1 \le m \le b$ 이므로
$a+1 = 2-0.28\sigma = \overline{x_2} - 0.43\sigma$ 에서 $\overline{x_2} = 2+0.15\sigma$ 이다.
또한 $b-a = 2.72$ 이고 $b-a-1 = 2 \times 0.43\sigma = 0.86\sigma = 1.72$ 이므로 $\sigma = 2$ 이다.

따라서 $\overline{x_1} = 1$, $\overline{x_2} = 2.3$, $\sigma = 2$ 이므로 $\dfrac{\overline{x_1} + \overline{x_2}}{\sigma} = 1.65$ 이다.

29) [정답] 73 (출제자 : 21 박창수)
[출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]
A 는 주사위에 적힌 수가 1 , 4 일때만 점수를 1 점 더 얻으므로 주사위를 한 번 던질 때 2 점을 얻을 확률은 $\dfrac{2}{3}$. 3 점을 얻을 확률은 $\dfrac{1}{6}$, 5 점을 얻을 확률은 $\dfrac{1}{6}$ 이다.

B 는 주사위에 적힌 수가 2 , 3 일 때만 점수를 1 점 더 얻으므로 주사위를 한 번 던질 때 1 점을 얻을 확률, 3 점을 얻을 확률, 4 점을 얻을 확률이 모두 $\dfrac{1}{3}$ 이다.

$2 \le a_1 \le 5$, $1 \le b_1 \le 4$ 에서 $4 \le a_2 \le 10$. $2 \le b_2 \le 8$ 이므로
$a_2 = b_2 < 7$ 이면 $a_2 = b_2 = 4$ 또는 $a_2 = b_2 = 5$ 또는 $a_2 = b_2 = 6$ 이다.
$a_2 = b_2 < 7$ 인 사건을 C , $a_1 < b_1$ 인 사건을 D 라 하자.
이때 $a_2 = b_2 = 4$ 인 사건을 C_1 , $a_2 = b_2 = 5$ 인 사건을 C_2 ,
$a_2 = b_2 = 6$ 인 사건을 C_3 라 하면
구해야 하는 확률은 $a_2 = b_2 < 7$ 일 때, $a_1 < b_1$ 일 확률이므로
$\dfrac{P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{P((C_1 \cup C_2 \cup C_3) \cap D)}{P(C_1 \cup C_2 \cup C_3)}$ 이다.
C_1 , C_2 , C_3 은 서로 배반사건이므로 위 식을 정리하면
$\dfrac{P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + P(C_3 \cap D)}{P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)}$ 이다.

분모의 값을 구하기 위해 사건 C_1 , C_2 , C_3 가 일어나는 경우를 순서쌍을 이용하여 표로 나타내면 다음과 같다.

	A	B
C_1	(2 , 2)	(1 , 3) , (3 , 1)
C_2	(2 , 3) , (3 , 2)	(1 , 4) , (4 , 1)
C_3	(3 , 3)	(3 , 3)

(순서쌍 (a, b) 에서 a 는 첫 번째 시행에서 얻은 점수를, b 는 두 번째 시행에서 얻은 점수를 나타낸다.)

$P(C_1)$ 은 $a_2 = 4$ 이면서 $b_2 = 4$ 일 확률이므로
$P(C_1) = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times 1\right\}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times 2\right\}$ 이고 같은 방식으로
$P(C_2) = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right) \times 2\right\}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right) \times 2\right\}$,
$P(C_3) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ 이다.

이제 분자의 값을 구하기 위해 사건 $C_1 \cap D$, $C_2 \cap D$, $C_3 \cap D$ 가 일어나는 경우를 순서쌍을 이용하여 표로 나타내면 다음과 같다.

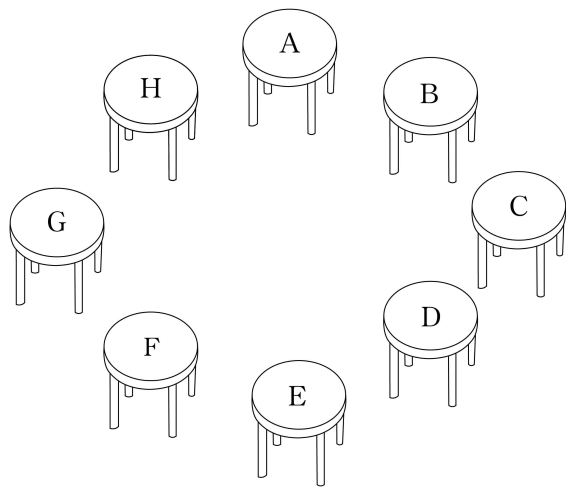
	A	B
$C_1 \cap D$	(2 , 2)	(3 , 1)
$C_2 \cap D$	(2 , 3) , (3 , 2)	(4 , 1)
$C_3 \cap D$	존재하지 않는다.	

$P(C_1 \cap D)$ 은 $a_2 = b_2 = 4$ 이면서 $a_1 < b_1$ 일 확률이므로
$P(C_1 \cap D) = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times 1\right\}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ 이고 같은 방식으로
$P(C_2 \cap D) = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right) \times 2\right\}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times 1\right\}$, $P(C_3) = 0$ 이다.

따라서 $a_2 = b_2 < 7$ 일 때, $a_1 < b_1$ 일 확률은
$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{24}{49}$$
이므로 $p+q = 73$ 이다.

30) [정답] 192 (출제자 : 21 김서원)
[출제의도] 원순열을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]



그림과 같이 1 이 적힌 의자를 A 로 하여 의자에 이름을 임의로 정하고, 각각의 의자에 적힌 수를 $a, b, \cdots, h$ 라 하면 시계방향으로 연속된 4 개의 숫자의 순서쌍은 다음과 같이 이렇게 8 개가 있다.

$(a, b, c, d), (b, c, d, e), \cdots, (h, a, b, c)$

이때 8 개의 숫자는 모두 다르므로 이 순서쌍 중 3 개의 숫자가 같은 두 순서쌍은 순서쌍에 포함된 수의 합이 같을 수 없다.
예를 들어 $a+b+c+d \ne b+c+d+e$ 이다.
이때 총 순서쌍은 8 개이고, 이 중 4 개의 순서쌍에 포함된 수의 합이 18 로 같아야 하므로, $a+b+c+d = 18$ 이면
$c+d+e+f = e+f+g+h = g+h+a+b = 18$ 이다.
여기서 $a+b = e+f$ 이고, $c+d = g+h$ 이다.

즉 이웃한 의자를 두 개씩 묶어 합을 구했을 때, 서로 맞은 편에 위치한 묶음끼리 두 의자에 적힌 수의 합이 같으면 서로 이웃한 4 개의 의자에 적힌 숫자의 합이 18 이다.

두 수의 합끼리 같도록 하는 순서쌍은 다음과 같다.

$(1, 4)$ 와 $(2, 3)$ – $(5, 8)$ 과 $(6, 7)$
$(1, 6)$ 과 $(2, 5)$ – $(3, 8)$ 과 $(4, 7)$
$(1, 7)$ 과 $(3, 5)$ – $(2, 8)$ 과 $(4, 6)$
$(1, 8)$ 과 $(2, 7)$ – $(3, 6)$ 과 $(4, 5)$
$(1, 8)$ 과 $(3, 6)$ – $(2, 7)$ 과 $(4, 5)$
$(1, 8)$ 과 $(4, 5)$ – $(2, 7)$ 과 $(3, 6)$

두 수의 합이 같은 순서쌍 2 개가 서로 맞은편에 위치하도록 하는 경우의 수는 $(2-1)! \times 2! = 2$ 이다.
두 숫자끼리 서로 자리 바꾸는 경우의 수는 $2!$ 이고, 4 개의 이웃한 두 숫자에서 모두 자리 바꿀 수 있으므로
두 숫자끼리 자리 바꾸는 경우의 수는
$2! \times 2! \times 2! \times 2! = 16$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 16 = 192$ 이다.

2023학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ③ (출제자 : 22 손효원)

[출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$=3$ 이다.

24) [정답] ④ (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}-2e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=6-e^t$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6-e^t}{2e^{2t}-2e^{-t}}$ 이다.

따라서 $t=\ln 2$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$\frac{6-e^{\ln 2}}{2e^{2\ln 2}-2e^{-\ln 2}}=\frac{6-2}{2\times 4-2\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}$ 이다.

25) [정답] ① (출제자 : 21 박창수)

[출제의도] 정적분과 급수의 관계를 이용할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{\sqrt{4n^2+5nk}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{5k}{n}}}$ 이다.

이때, $4+\frac{5k}{n}=x_k$ 라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{5k}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}$ 이고

적분구간은 $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{5k}{n}\right)$ 의 k 에 1 과 n 을 대입하면 4 부터 9 까지이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}=\int_4^9\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 이다.

따라서 $\int_4^9\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$=\left[2\sqrt{x}\right]_4^9=2$ 이다.

26) [정답] ② (출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 한없이 반복되는 도형에서 넓이의 합을 등비급수를 활용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

직각삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$ 에서

$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB_1}}^2-\overline{\mathrm{AC_1}}^2}=\sqrt{16-12}=2$ 이고

$\cos(\angle\mathrm{AB_1C_1})=\frac{\overline{\mathrm{AB_1}}}{\overline{\mathrm{BC_1}}}=\frac{1}{2}$ 이므로

$\angle\mathrm{AB_1C_1}=\frac{\pi}{3}$ 이다.

직선 $\mathrm{B_2C_2}$ 와 직선 $\mathrm{B_1C_1}$ 이 평행하므로

$\angle\mathrm{AC_2B_2}=\frac{\pi}{2}$,

$\angle\mathrm{AB_2C_2}=\frac{\pi}{3}$ 에서

삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$ 과 삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$ 는 닮음이다.

이때, 부채꼴 $\mathrm{B_1C_1B_2}$ 에서

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB_2}}=\overline{\mathrm{AB_1}}-\overline{\mathrm{B_1B_2}}=4-2=2$ 이다.

삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$ 과 삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$ 의 닮음비가 $2:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1$,

$\overline{\mathrm{AC_2}}=\sqrt{3}$ 에서

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}=\overline{\mathrm{AC_1}}-\overline{\mathrm{AC_2}}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$ 이다.

$S_1=$ (사다리꼴 $\mathrm{B_1C_1C_2B_2}$ 의 넓이) $-$ (부채꼴 $\mathrm{B_1C_1B_2}$ 의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$ 이다.

삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$ 과 삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$ 의 넓이의 비가 $1:\frac{1}{4}$ 이므로

수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$ 이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{9}(9\sqrt{3}-4\pi)$ 이다.

27) [정답] ④ (출제자 : 22 윤성준)

[출제의도] 역함수 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$(g_n(t),\ t)$는 제4사분면 위의 점이므로 $t = 2\sin\{g_n(t)\}$ 이다.

$t = 2\sin\{g_n(t)\}$ 의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1 = 2g_n{}'(t) \times \cos\{g_n(t)\}$ 이다.

$\cos\{g_n(t)\} \neq 0$ 이므로 양변을 $\cos\{g_n(t)\}$ 으로 나누면

$g_n{}'(t) = \dfrac{1}{2\cos\{g_n(t)\}}$ 이다.

$t = -\dfrac{1}{2}$ 일 때 $\sin\left\{g_n\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\} = -\dfrac{1}{4}$ 이고

$g_n{}'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2\cos\left\{g_n\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$ 이다.

한편, $(2n-1)\pi < x < \left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 일 때 $\cos\left\{g_{2n-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

$\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi < x < 2n\pi$ 일 때 $\cos\left\{g_{2n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

따라서 $g_{2n-1}{}'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$, $g_{2n}{}'(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{51} g_n{}'\left(-\frac{1}{2}\right) = g_{51}{}'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$$ 이다.

28) [정답] ② (출제자 : 22 문희성)

[출제의도] 치환적분을 활용하여 주어진 함수의 역함수를 적분할 수 있는가?

[해설]

$g(x) = t$ 라 하면 $g'(x) = \dfrac{dt}{dx}$ 이다.

또한 $f(\sqrt{\ln 4}) = 0$ 이고 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$g(0) = \sqrt{\ln 4}$, $g(f(\sqrt{\ln 8})) = \sqrt{\ln 8}$ 에서

$\displaystyle\int_0^{f(\sqrt{\ln 8})} \{g'(x)\}^2\,dx = \int_{\sqrt{\ln 4}}^{\sqrt{\ln 8}} g'(x)\,dt$ 이다.

한편, $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ 이고 주어진 조건에 의해 함수 $f(x)$는 $x>0$ 에서 정의되었으므로, $f'(x) > 0$ 이다.

따라서 $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{f'(t)}$ 이다.

$\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 4}}^{\sqrt{\ln 8}} g'(x)\,dt = \int_{\sqrt{\ln 4}}^{\sqrt{\ln 8}} \frac{1}{f'(t)}\,dt$ 이고 $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ 이므로

$\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 4}}^{\sqrt{\ln 8}} \frac{1}{f'(t)}\,dt = \int_{\sqrt{\ln 4}}^{\sqrt{\ln 8}} \frac{t}{e^{t^2}}\,dt$ 이다.

$t^2 = u$ 라 하면 $2t = \dfrac{du}{dt}$ 이고,

$(\sqrt{\ln 4})^2 = \ln 4$, $(\sqrt{\ln 8})^2 = \ln 8$ 에서

$\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 4}}^{\sqrt{\ln 8}} \frac{t}{e^{t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{1}{e^u}\,du = \frac{1}{2}\int_{\ln 4}^{\ln 8} e^{-u}\,du$ 이다.

따라서 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\ln 4}^{\ln 8} e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_{\ln 4}^{\ln 8}$

$= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16}$ 이다.

29) [정답] 4 (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{PB}} = 2\sin\theta$ 이고, $\angle \mathrm{PBQ} = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{3}\sin\theta$ 이다.

$\angle \mathrm{PQB} = \dfrac{\pi}{6}$ 이고, 삼각형 AOP는 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{APO} = \theta$ 이다.

그러므로 $\angle \mathrm{QRP} = \pi - \angle \mathrm{PQR} - \angle \mathrm{RPQ} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \theta = \dfrac{5}{6}\pi - \theta$ 이다.

삼각형 PQR에서 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin(\angle \mathrm{PQR})} = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle \mathrm{QRP})}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PR}} = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}} \times \sin(\angle \mathrm{PQR})}{\sin(\angle \mathrm{QRP})}$

$= \dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi - \theta\right)}$ 이다.

한편, 삼각형 QRO의 넓이는 삼각형 PQO의 넓이에서 삼각형 PQR의 넓이를 뺀 것과 같다.

삼각형 PQO의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{PO}} \times \sin(\angle \mathrm{QPO})$

$= \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\sin\theta \times 1 \times \sin\theta$

$= \sqrt{3}\sin^2\theta$ 이고

삼각형 PQR의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{PR}} \times \sin(\angle \mathrm{QPO})$

$= \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\sin\theta \times \dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)} \times \sin\theta$

$= \dfrac{3\sin^3\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}$ 이다.

그러므로

$f(\theta) = \sqrt{3}\sin^2\theta - \dfrac{3\sin^3\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}$ 이고

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta^2}{f(\theta)}$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta^2}{\sqrt{3}\sin^2\theta - \dfrac{3\sin^3\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta^2}{\sin^2\theta} \times \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{\sqrt{3} - \dfrac{3\sin\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}}$$ 이다.

이때, $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 이므로 $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta^2}{\sin^2\theta}=1$ 이다.

그러므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2}{f(\theta)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{3\sin\theta}{\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\theta\right)}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$ 이다.

따라서 $p+q=3+1=4$ 이다.

30) [정답] 6 (출제자 : 22 김건우)

[출제의도] 합성함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

[해설]

$\{f(x)\}^2-2e^x f(x)+e^{2x}-e^{-2x}=0$

$\{f(x)-(e^x+e^{-x})\}\{f(x)-(e^x-e^{-x})\}=0$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 곡선 $y=e^x+e^{-x}$ 와 곡선 $y=e^x-e^{-x}$ 는 서로 만나지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=e^x+e^{-x}$ 의 그래프와 함수 $y=e^x-e^{-x}$ 의 그래프 중 하나이다.

$\therefore f(x)=e^x+e^{-x}$ 또는 $f(x)=e^x-e^{-x}$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

만약 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 이면 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다. 이 경우 함수 $f(x)$는 극값을 가지지 않고, 함수 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이므로 함수 $h(x)$의 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$의 극소가 되는 x의 개수와 같다. 그런데 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 함수 $g(x)$가 가질 수 있는 극소가 되는 x의 개수는 3 보다 작다. 이는 조건 (가)에 모순이다.

따라서 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 이다.

조건 (나)에서 함수 $h(x)=g(f(x))$는 최솟값을 가지므로 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

함수 $g(x)$가 $x=k$ 에서만 극솟값을 갖는다고 가정하자.

(i) $k\le 2$ 인 경우

함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$
$g'(f(x))$	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

즉, 함수 $h(x)$의 극소가 되는 x의 개수는 1 이고, 이는 조건 (가)에 모순이다.

(ii) $k>2$ 인 경우

방정식 $f(x)=k$ 를 만족시키는 x의 값을 각각 α_1, β_1 ($\alpha_1<\beta_1$)라 할 때, 함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	0	$\cdots$	β_1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	k	$\searrow$	2	$\nearrow$	k	$\nearrow$
$g'(f(x))$	$+$	0		$-$		0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

즉, 함수 $h(x)$의 극소가 되는 x의 개수는 2 이고, 이는 조건 (가)에 모순이다.

위의 (i)~(ii)에 의해 함수 $g(x)$의 극소가 되는 x의 개수는 2 이다.

함수 $g(x)$가 극값을 갖는 세 점의 x좌표를 각각 k_1, k_2, k_3 ($k_1<k_2<k_3$)라 하자.

(a) $k_1>2$ 인 경우

방정식 $f(x)=k_1$ 을 만족시키는 x의 값을 각각 α_1, α_2 ($\alpha_1<\alpha_2$),
방정식 $f(x)=k_2$ 을 만족시키는 x의 값을 각각 β_1, β_2 ($\beta_1<\beta_2$),
방정식 $f(x)=k_3$ 을 만족시키는 x의 값을 각각 γ_1, γ_2 ($\gamma_1<\gamma_2$),
라 할 때, 함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	γ_1	$\cdots$	β_1	$\cdots$	α_1	$\cdots$	0	$\cdots$	α_2	$\cdots$	β_2	$\cdots$	γ_2	$\cdots$
$f'(x)$				$-$				0				$+$			
$f(x)$	$\searrow$	k_3	$\searrow$	k_2	$\searrow$	k_1	$\searrow$	2	$\nearrow$	k_1	$\nearrow$	k_2	$\nearrow$	k_3	$\nearrow$
$g'(f(x))$	$+$	0	$-$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

즉, 함수 $h(x)$의 극소가 되는 x의 개수는 4 이고, 이는 조건 (가)에 모순이다.

(b) $k_1\le 2<k_2$ 인 경우

이때 방정식 $f(x)=k_2$ 을 만족시키는 x의 값을 각각 α_1, α_2 ($\alpha_1<\alpha_2$),
방정식 $f(x)=k_3$ 을 만족시키는 x의 값을 각각 β_1, β_2 ($\beta_1<\beta_2$)
라 하면, 함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	β_1	$\cdots$	α_1	$\cdots$	0	$\cdots$	α_2	$\cdots$	β_2	$\cdots$
$f'(x)$			$-$			0			$+$		
$f(x)$	$\searrow$	k_3	$\searrow$	k_2	$\searrow$	2	$\nearrow$	k_2	$\nearrow$	k_3	$\nearrow$
$g'(f(x))$	$+$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

즉, 함수 $h(x)$의 극소가 되는 x의 개수는 3 이고, 이는 조건 (가)를 만족시킨다.

(c) $k_2 \le 2 < k_3$ 인 경우

방정식 $f(x)=k_3$ 을 만족시키는 x 의 값을 각각 α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$)라 할 때, 함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	0	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	k_3	$\searrow$	2	$\nearrow$	k_3	$\nearrow$
$g'(f(x))$	$+$	0		$-$		0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

즉, 함수 $h(x)$ 의 극소가 되는 x 의 개수는 2 이고, 이는 조건 (가)에 모순이다.

(d) $k_3 \le 2$ 인 경우

방정식 $f(x)=k_1$, $f(x)=k_2$ 의 실근이 존재하지 않는다.

이때 함수 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$
$g'(f(x))$	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

즉, 함수 $h(x)$ 의 극소가 되는 x 의 개수는 1 이고, 이는 조건 (가)에 모순이다.

따라서 위의 (a)~(d)에 의해 조건 (가)를 만족시키는 경우는 (b)이다.

조건 (나)에 의해 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 1 이다.

또한, $h(x)=g(f(x))=g(f(-x))=h(-x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)=h(-x)$ 이다.

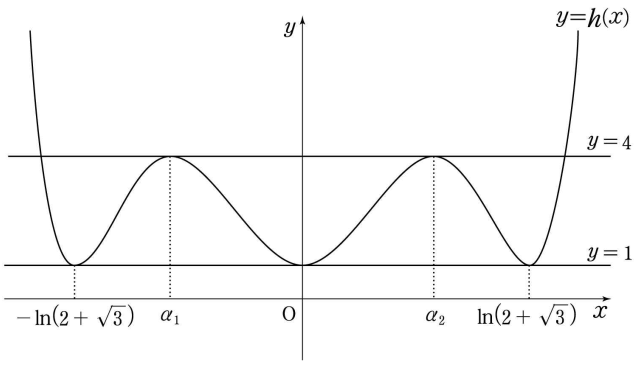
그러므로 조건 (다)에서

$h(0)=h(\ln(2+\sqrt{3}))=h(-\ln(2+\sqrt{3}))=1$ 이고

$h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로

함수 $h(x)$ 는 $x=-\ln(2+\sqrt{3})$, 0, $\ln(2+\sqrt{3})$ 에서 극솟값이자 최솟값 1 을 갖는다.

그러므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=n$ 이 만나는 점의 개수 a_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{4} a_n = 19$ 이려면 함수 $h(x)$ 의 극댓값이 4 이어야 한다.

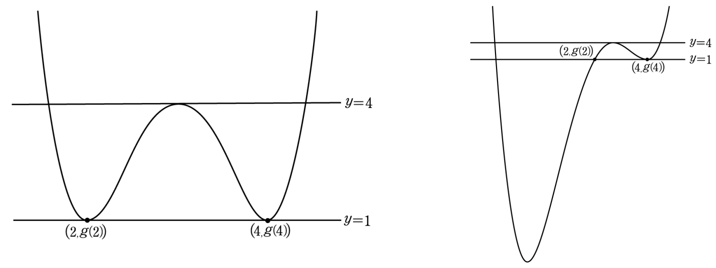
즉, $h(\alpha_1)=h(\alpha_2)=g(k_2)=4$ 이다.

이때, $h(0)=g(2)=1$, $h(\ln(2+\sqrt{3}))=g(4)=1$ 이므로,

$$\begin{aligned}\int_2^4 |g'(x)|\,dx &= \int_2^{k_2} |g'(x)|\,dx + \int_{k_2}^4 |g'(x)|\,dx \\ &= \int_2^{k_2} g'(x)\,dx - \int_{k_2}^4 g'(x)\,dx \\ &= \{g(k_2)-g(2)\} - \{g(4)-g(k_2)\} \\ &= 6 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

[출제자의 말]

사차함수 $g(x)$ 의 개형으로 가능한 것은 2 개로, 확정되지 않는다.



수학 영역(기하) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ①　(출제자 : 21 박주원)

[출제의도] 공간좌표의 대칭이동을 활용할 수 있는가?

[해설]

좌표공간의 점 A$(a,1,2)$를 z축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(-a,-1,2)$이다.

선분 AB의 길이는 두 점 A와 B 사이의 거리와 같으므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{\{a-(-a)\}^2+\{1-(-1)\}^2+(2-2)^2} \\ &= \sqrt{4a^2+4} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

이다.

$4a^2+4=8$이므로 $a=1$ 또는 $a=-1$이다.

따라서 양수 a의 값은 1이다.

24) [정답] ④　(출제자 : 22 이수훈)

[출제의도] 벡터를 이용하여 직선을 표현할 수 있는가?

[해설]

직선 l의 방향벡터는 직선 $12x+5y+6=0$의 법선벡터와 평행하므로 $(12,5)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(12,6-k)$가 직선 l의 방향벡터와 평행하므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(12,5)$이다.

따라서 $k=1$이다.

25) [정답] ①　(출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

점 P의 좌표를 $(2,a)$라고 하자.

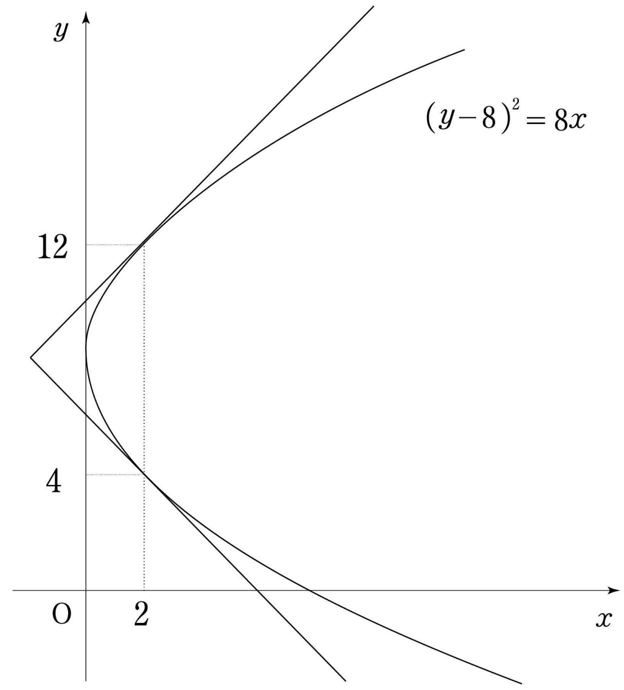
점 P는 포물선 $(y-8)^2=8x$ 위의 점이므로

$(a-8)^2=16$에서

$a=4$ 또는 $a=12$이다.

다음 그림과 같이 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기가 음수이므로

$a=4$이다.



포물선 $(y-8)^2=8x$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선은 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(2,-4)$에서의 접선을 y축 방향으로 8만큼 평행이동한 것과 같다.

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(2,-4)$에서의 접선의 방정식은

$-4y=4(x+2)$, 즉 $y=-x-2$이므로

포물선 $(y-8)^2=8x$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y &= -x-2+8 \\ &= -x+6\end{aligned}$$ 이다.

따라서 $m+n=-1+6=5$이다.

26) [정답] ②　(출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 쌍곡선의 정의를 활용할 수 있는가?

[해설]

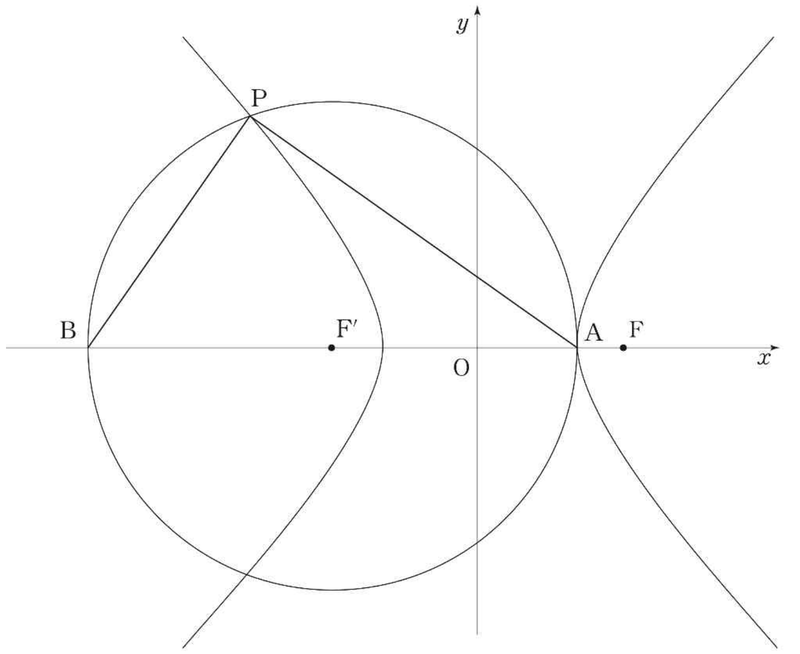
쌍곡선의 두 초점과 점 A는 각각 F$(3,0)$, F$'(-3,0)$, A$(2,0)$이다.

점 B는 선분 AF$'$을 $2:1$로 외분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF'}}=5$이다.

쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이고,

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF'}}$이므로 그림과 같이 점 P는 점 F$'$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위를 지난다.



(점 P 가 제3 사분면에 있을 수 있으나, 풀이 방식은 동일하므로 그 경우는 그림에서 생략한다.)

그러므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=5$ 이다.

주축의 길이가 4 이고, $\overline{\mathrm{PF}'}=5$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}=4$ 에서 $\overline{\mathrm{PF}}=9$ 이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 평면벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 식 $|\overrightarrow{\mathrm{EA}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{13}$ 의 양변을 제곱하면

$|\overrightarrow{\mathrm{EA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=13$ 이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면,

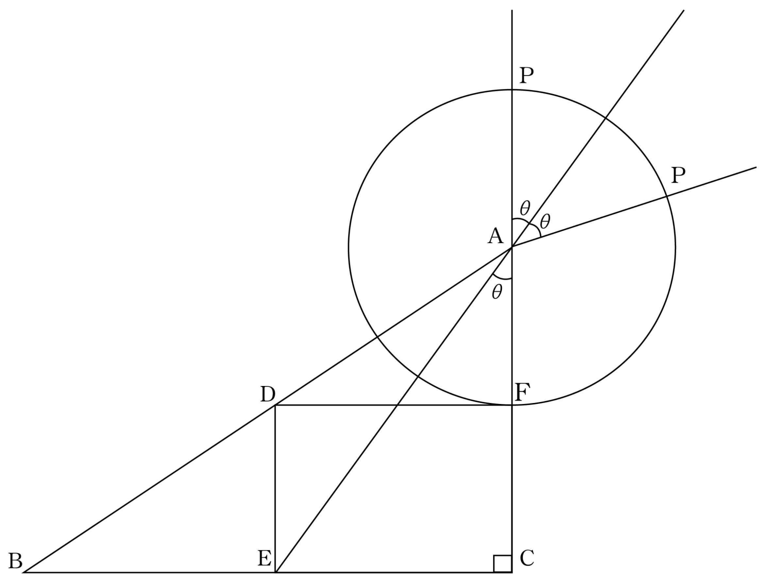
$|\overrightarrow{\mathrm{EA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=13$ 에서

$5^2+2^2-2\times5\times2\times\cos\theta=13$,

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ 이다.

이때, θ 의 값의 범위는 $0\le\theta\le\pi$ 이므로 θ 와 $\angle\mathrm{EAC}$ 의 크기가 같다.

따라서 점 P 의 위치는 다음과 같다.



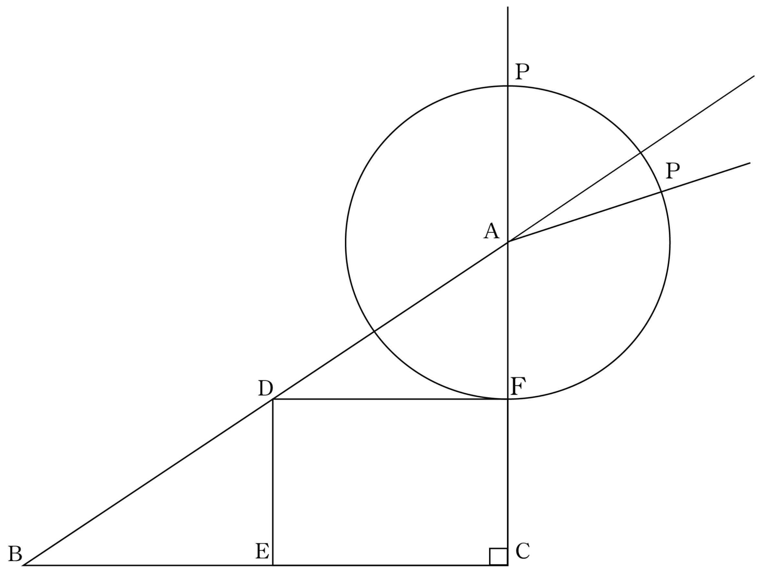
$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$\quad=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 이므로,

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 가 최소일 때,

즉 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 가 이루는 각의 크기가 최대일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ 은 최솟값을 갖는다.

아래 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 가 이루는 각의 크기는 점 P 가 직선 AC 위에 있을 때 최대이다.



따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=6^2+6^2$

$\quad=72$ 이다.

28) [정답] ③ (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 단위벡터로 이루어진 벡터의 식을 해석하고 벡터의 내적을 계산할 수 있는가?

[해설]

$3\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}$ 을 만족시키는 점을 P′ 이라 하자.

점 P′ 은 원 $x^2+y^2=(3r)^2$ 위의 점이고, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}+3\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}'}$ 이다.

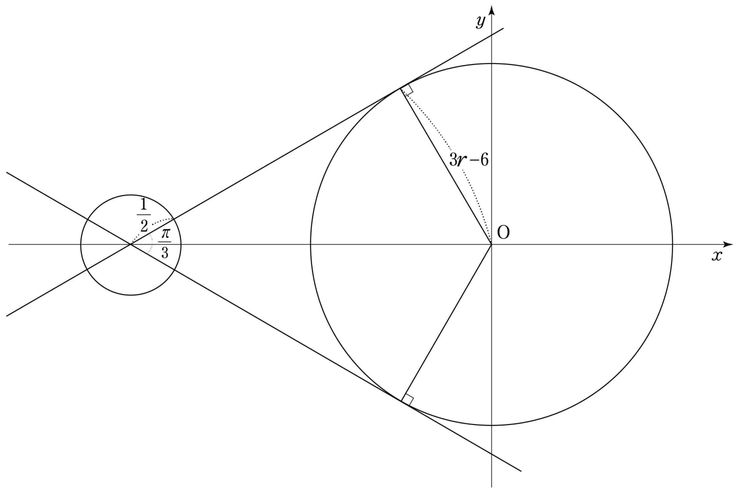
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}+3\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|2\overrightarrow{\mathrm{AO}}+6\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}'}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}'}|}$ 이므로

점 Q 가 나타내는 도형은 점 $\mathrm{A}(-12,\,0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$ 인 원의 일부이다.

점 Q 가 나타내는 도형의 길이가 $\dfrac{\pi}{6}$ 이므로, 중심각의 크기를 θ 라 하면

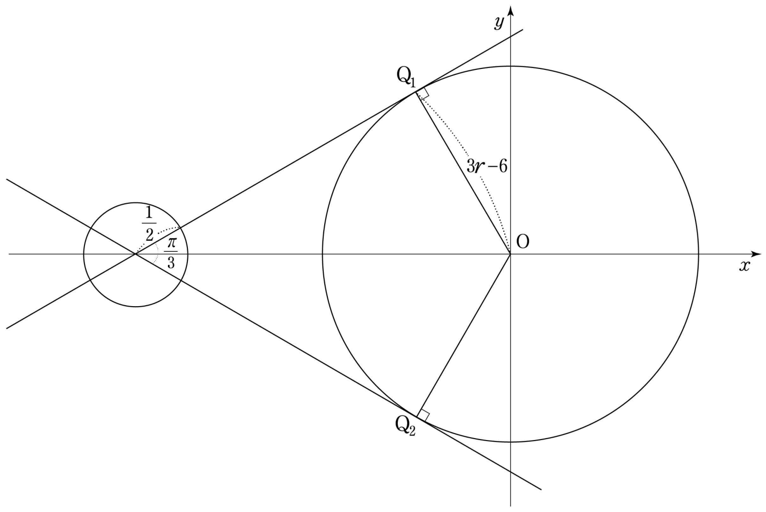
$\dfrac{1}{2}\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 점 Q 가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$ 이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 인 호이다.



즉, 점 A 에서 원 $x^2+y^2=(3r)^2$ 에 그은 두 접선이 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로, 한 접선이 x 축과 이루는 각은 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\sin(\angle \mathrm{QAO})$ 의 값이 최대가 되는 경우는 $\angle \mathrm{QAO}=\frac{\pi}{6}$ 일 때이므로 이를 만족하는 점 Q_1, Q_2 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



이때 $\overline{\mathrm{AO}}=12$ 이고, $\overline{\mathrm{OQ_1}}=\overline{\mathrm{AO}}\sin\frac{\pi}{6}$ 이므로 $6=3r$ 에서 $r=2$ 이다.

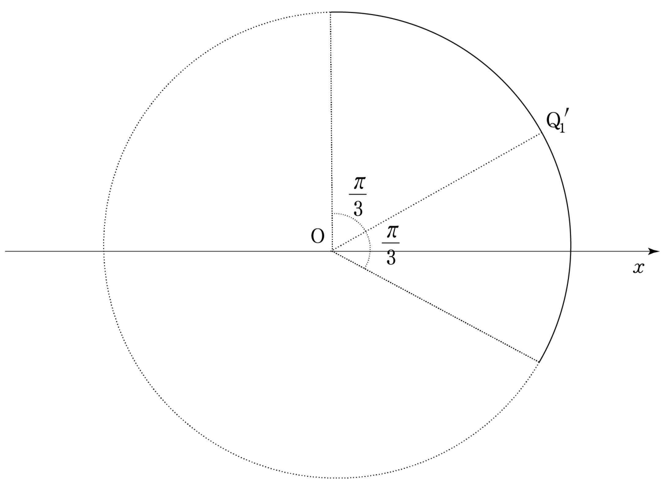
$\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}$ 의 시점을 원점으로 평행이동한 벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}'}$ 이라 하고 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}'}$ 이 이루는 각을 θ_1 이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}'}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\theta_1=\frac{1}{2}\times 2\times\cos\theta_1$

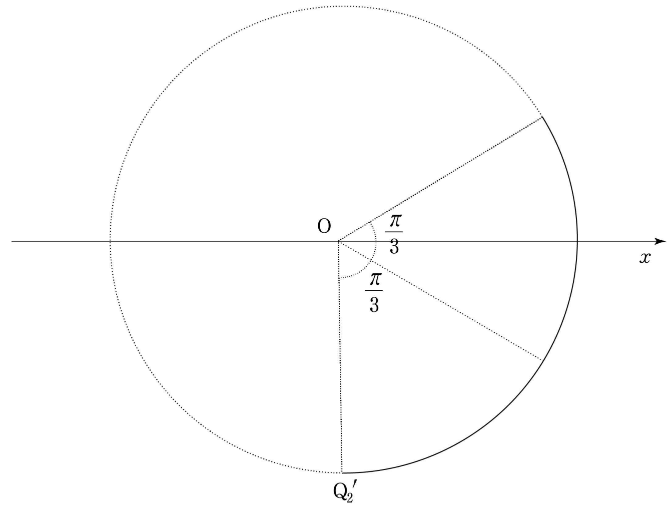
이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\geq\frac{1}{2}$ 에서 $\cos\theta_1\geq\frac{1}{2}$ 이다.

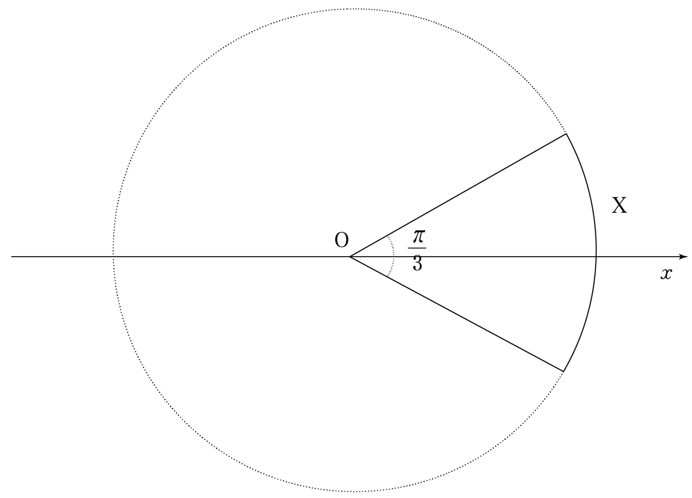
즉, $\theta_1\leq\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\geq\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 점 X 가 나타내는 도형은 다음과 같다.



위와 같은 방식으로 $\overrightarrow{\mathrm{AQ_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\geq\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 점 X 가 나타내는 도형은 다음과 같다.



따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\geq\frac{1}{2}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{AQ_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\geq\frac{1}{2}$ 을 동시에 만족하는 원 C 위의 점 X 가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2 이고 중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 인 호이다.



그러므로 원 C 위의 모든 점 X 가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

29) [정답] 42　(출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 타원과 삼각형의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

주어진 조건에 의하여 삼각형 ACF 는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CF}}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{CAF}=\angle\mathrm{CFA}$ 이다.

이때, $\angle\mathrm{CAF}=\frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 ACF 는 정삼각형이다.

즉, 삼각형 ACF 와 삼각형 AF′B 는 닮음이므로

$\angle\mathrm{ACF}=\angle\mathrm{AF'B}=\frac{\pi}{3}$ 이고,

주어진 조건에서 $\angle\mathrm{CDB}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CF'}}:\overline{\mathrm{F'D}}=2:1$ 이다.

주어진 타원의 방정식이 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 이므로 장축의 길이는 6 이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\alpha$ (α 는 양수)라 하면, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{CF'}}=6-\alpha$ 이므로 $\overline{\mathrm{F'D}}=\frac{6-\alpha}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CF'}}=\alpha+(6-\alpha)=6$ 이므로 삼각형 AF′B 의 한 변의 길이는

6 이다.

그러므로 $\overline{BD} = \overline{BF'} - \overline{DF'} = \frac{\alpha}{2} + 3$ 이다.

타원의 정의에 의하여 $\overline{DF} = 6 - \overline{DF'} = \frac{\alpha}{2} + 3$ 이다.

즉, 삼각형 DBF 는 $\overline{DB} = \overline{DF}$ 인 이등변삼각형이므로
$\angle DBF = \angle DFB$ 이다.

이때, $\angle DBF = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 DBF 는 정삼각형이다.

$\overline{BF} = \overline{BA} - \overline{FA} = 6 - \alpha$ 이고, 삼각형 DBF 는 정삼각형이므로
$\overline{BD} = \overline{BF}$ 이다.

즉, $\frac{\alpha}{2} + 3 = 6 - \alpha$ 에서 $\alpha = 2$ 이다.

$\overline{EF} = \beta$ (β는 양수)라 하자.
$\overline{BE} = \overline{BF} - \overline{BE} = 4 - \beta$ 이고,
타원의 정의에 의하여 $\overline{EF'} = 6 - \beta$ 이다.

삼각형 BEF′ 에 대하여 코사인법칙을 적용하면
$\overline{EF'}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BF'}^2 - 2 \times \overline{BE} \times \overline{BF'} \times \cos\frac{\pi}{3}$ 에서
$(6-\beta)^2 = (4-\beta)^2 + 6^2 - 2 \times (4-\beta) \times 6 \times \frac{1}{2}$ 이고,
이 식을 정리하면 $\beta = \frac{4}{5}$ 이다.

점 E 에서 선분 AF′ 위에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
$\overline{EH} = \overline{AE} \times \sin\frac{\pi}{3}$ 이므로,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{CF'} \times \overline{EH} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{CF'} \times \left(\overline{AE} \times \sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{14}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{14}{5}\sqrt{3} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

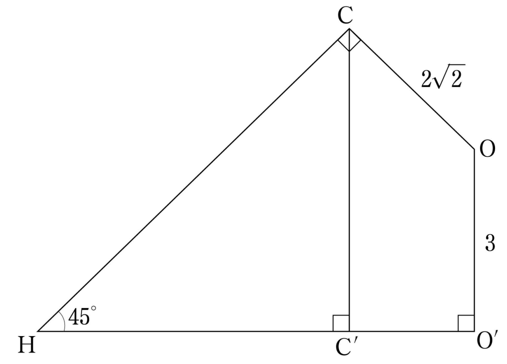
따라서 $5\sqrt{3}S = 42$ 이다.

[별해]
직선 CF 와 직선 F′D 는 서로 평행하고, 각각 점 F(c, 0) 과 F′(− c, 0) 을 지나므로 두 직선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
이때, 점 C 는 직선 CF 와 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점이고, 점 D 는 직선 F′D 와 타원의 교점 중 제3사분면 위의 점이므로, 점 C 와 점 D 는 서로 원점에 대하여 대칭이다.
즉, 직선 CF′ 과 직선 DF 는 서로 평행하므로, 사각형 CF′DF 는 평행사변형이다.
따라서 $\overline{CF} = \overline{F'D}$ 이므로 $\alpha = \frac{6-\alpha}{2}$ 에서 $\alpha = 2$ 이다.

30) [정답] 14 (출제자 : 22 이수훈)
[출제의도] 삼수선의 정리를 활용하고 정사영을 구할 수 있는가?

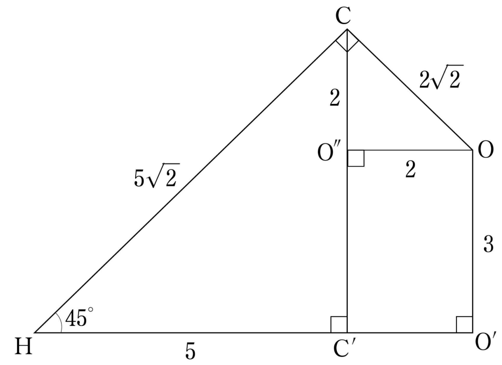
[해설]
점 C 가 원의 중심이므로 평면 β와 직선 OC 는 수직이다.
(원의 반지름) $= \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$ 이다.
평면 α 와 평면 β의 교선을 l 이라 하고,
직선 l 과 수직이고 점 O 를 지나는 평면을 γ라 하자.

점 O 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 O′ 이라 하고,
점 C 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
점 O′ 과 점 H 는 모두 평면 γ 위에 있다.
이때, 평면 α 와 직선 OO′ 는 수직이므로 평면 α 와 평면 γ는 수직이다.
그러므로 점 C 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 C′ 이라 하면 점 C′ 은 평면 γ 위에 있다.



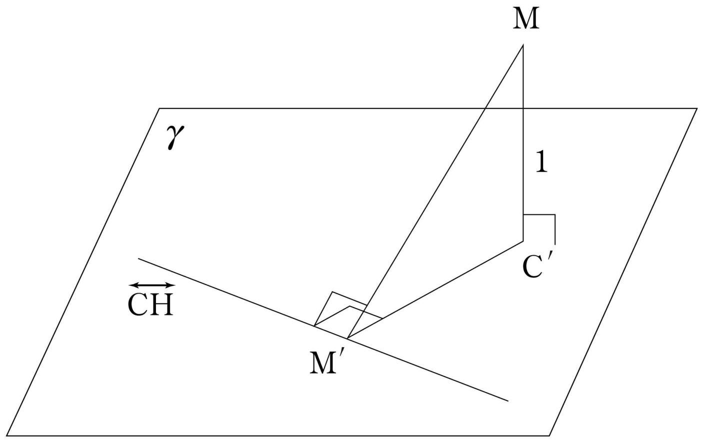
두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\angle CHO'$ 와 같으므로
$\angle CHO' = \frac{\pi}{4}$ 이다.

$\angle HCO = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle OCC' = \frac{\pi}{4}$ 이고 점 O 에서 선분 CC′ 에 내린 수선의 발을 O″ 이라 하면
$\overline{CO''} = 2$,
$\overline{CC'} = \overline{CO''} + \overline{O''C'} = \overline{CO''} + \overline{OO'} = 2 + 3 = 5$,
$\overline{HC'} = \overline{CC'} = 5$,
$\overline{CH} = 5\sqrt{2}$



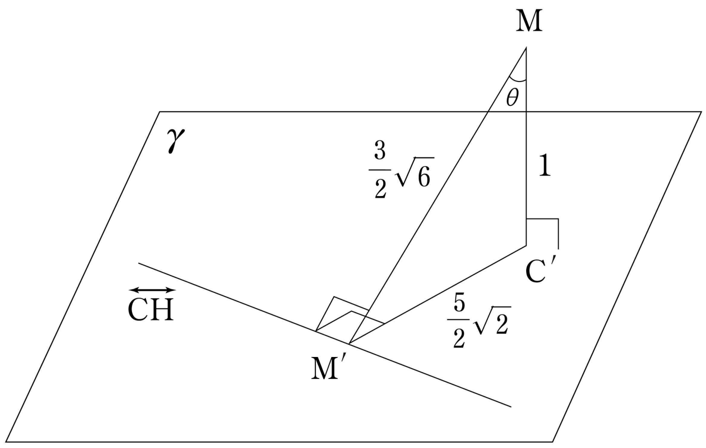
한편, $\overline{CC'}$ 의 값이 일정하므로 $\overline{CP'}$ 의 값이 최대가 되려면 $\overline{C'P'}$ 의 값이 최대가 되어야 한다.
선분 C′P′ 는 선분 CP 의 평면 α 위로의 정사영이고 선분 CP 는 원의 반지름이며 평면 β 위에 있으므로 직선 C′P′ 가 l 과 평행할 때 $\overline{C'P'}$ 의 값은 최대가 된다.
(추가 해설 참고)
그러므로 직선 C′M 은 직선 l 과 평행하고 $\overline{C'M} = 1$ 이다.

이때, 평면 γ는 직선 l 과 수직이므로 평면 γ는 직선 C′M 과 수직이고 점 M 에서 직선 CH 에 내린 수선의 발을 M′ 이라 하면 삼수선의 정리에 의해 직선 CH 와 직선 C′M′ 은 수직이다.



평면 β와 평면 CHM이 이루는 각의 크기를 θ라 하면,
θ는 직선 l과 직선 MM′이 이루는 각의 크기와 같고,
직선 l은 직선 C′M과 평행하므로
θ는 직선 C′M과 직선 MM′이 이루는 각의 크기, 즉 $\angle$C′MM′과 같다.

$\overline{\mathrm{C'M'}} = \overline{\mathrm{C'H}} \times \cos\frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$,
$\overline{\mathrm{C'M}} = 1$이므로 직각삼각형 C′MM′에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{MM'}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$ 이다.



그러므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{9}$ 이다.

삼각형 CHP 의 넓이를 S라고 하면
$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CH}} \times$ (점 P 에서 직선 CH 에 내린 수선의 길이) $\leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$
삼각형 CHP 는 평면 β위에 있으므로
삼각형 CHP 의 평면 CHM 위로의 정사영의 넓이 S′에 대하여
$\mathrm{S'} = \mathrm{S} \times \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{9} S \leq \frac{5}{9}\sqrt{3}$ 이다.
따라서 $p + q = 9 + 5$
$= 14$ 이다.

(추가 해설)
평행하지 않은 두 평면 α, β와 평면 β위에 중심이 O 이고 반지름이 r인 원 C가 있다고 하자.
원 C 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}} = r$이다.

두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자.
점 O 를 지나고 직선 l과 평행한 직선과 평면 β위에 있고 점 P 를 지나며 직선 l과 수직인 직선의 교점을 H 라 하고
선분 OH 의 길이를 Δx, 선분 HP 의 길이를 Δy라 하자.
직각삼각형 OHP 에서 $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2$이다.

이때, 세 점 O, H, P 의 평면 α위로의 정사영을 각각 O′, H′, P′라 하자. 점 O 에서 직선 l까지의 거리와 점 H 에서 직선 l까지의 거리가 같으므로 점 O′에서 직선 l까지의 거리와 점 H′에서 직선 l까지의 거리도 같다. 따라서 직선 O′H′는 직선 l과 평행하다. 사각형 OO′H′H가 직사각형이므로 $\overline{\mathrm{O'H'}} = \Delta x$이다.

직선 HH′는 평면 α와 수직이므로 평면 α위에 있는 직선 l과 직선 HH′는 수직이다. 직선 PH 와 직선 l도 수직이므로 직선 l과 평면 HH′P′P 는 수직이다. 그러므로 평면 HH′P′P 위에 있는 직선 H′P′도 직선 l과 수직이다.

두 평면 α, β사이의 이면각의 크기를
$\theta\,(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$라 하면 이면각의 크기의 정의에 의해
$\overline{\mathrm{H'P'}} = \overline{\mathrm{HP}}\cos\theta = \Delta y\cos\theta$이다.
직각삼각형 O′H′P′에서
$\overline{\mathrm{O'P'}} = \sqrt{\overline{\mathrm{O'H'}}^2 + \overline{\mathrm{H'P'}}^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y\cos\theta)^2}$ 이므로
Δy가 0일 때, 즉 직선 O′P′이 직선 l과 평행할 때 최댓값 r을 가진다.