콜라츠 추측

-수 재정렬과 수형도의 관점에서 바라본 증명-

proof for Collatz conjecture

너의 색으로 물들어♬

2022년 7월 11일

요약

콜라츠 추측이란 1937년에 처음으로 이 추측을 제기한 로타르 콜라츠의 이름을 딴 것이다. 홀수면 3배를 곱하고 1을 더한다. 짝수면 2로 나눈다. 이 과정을 반복하다 보면 결국 모든 자연수는 1이 될 것이다. 콜라츠 추측은 이렇게나 단순한 과정을 거치고 있지만, 80년 넘게 풀리지 않게 풀리고 있다. 이 연구에서 모든 자연수를 재정렬한 다음 수형도를 그리는 방식을 통해 연구하고자 한다.

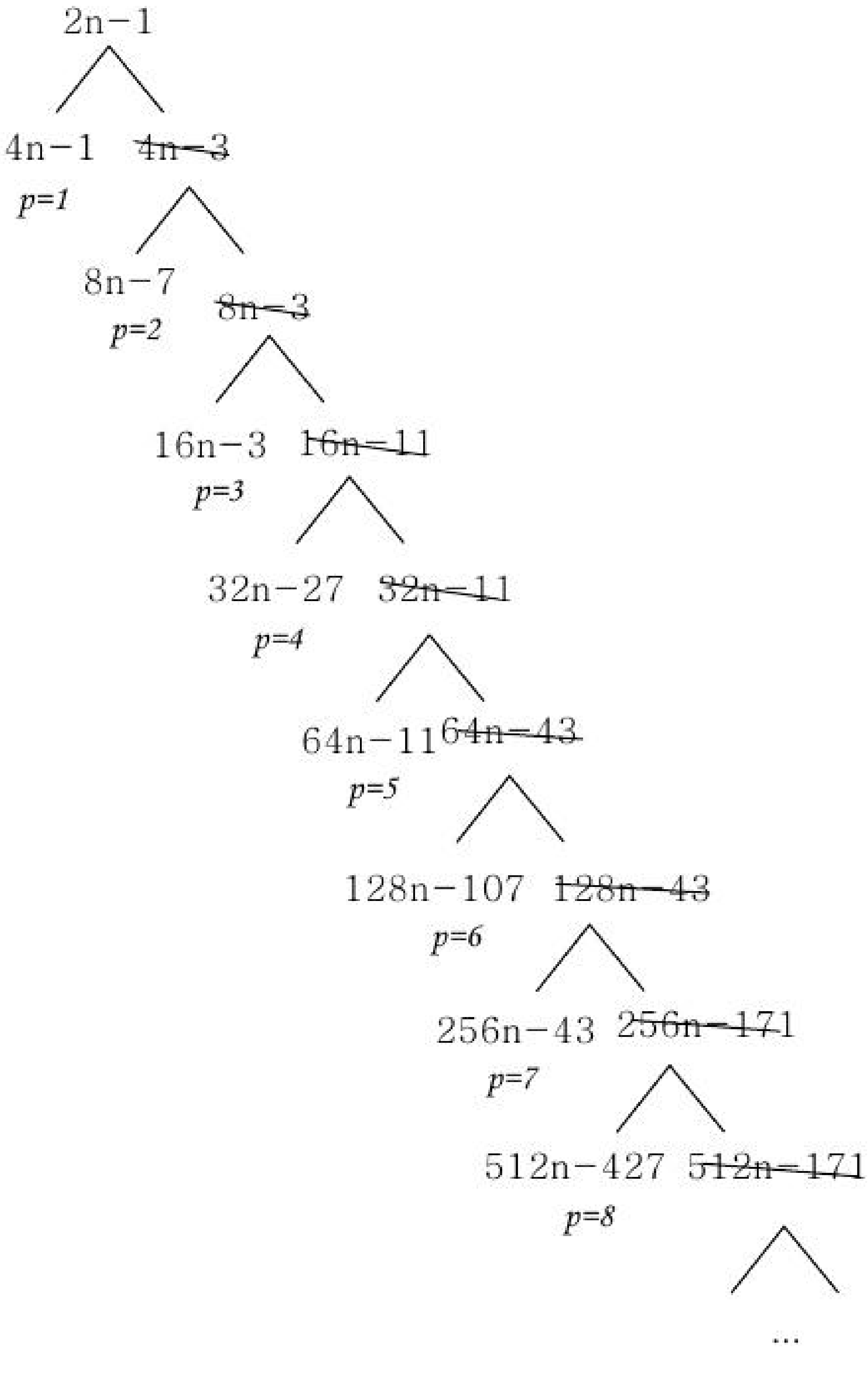
1. 서론

콜라츠 추측이란 아래와 같은 함수를 반복하면 모든 자연수 n이 1로 간다는 추측이다.

$$T(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even} \\ 3n+1, & \text{if } n \text{ is odd}\end{cases} \quad (n\text{은 자연수})$$

모든 짝수는 $T(n)=\dfrac{n}{2}$에 의해 홀수가 된다. 즉, 홀수에 대해서만 성립해도 된다.

모든 홀수는 $T(n)=3n+1$가 한 번 시행되면 짝수가 된다. 임의의 홀수에 대해 $T(n)=3n+1$가 한 번 행해져 2로 나눠질 수 있는 횟수, 다시 말해 $T(n)=\dfrac{n}{2}$를 시행할 수 있는 횟수를 p라 하자. p의 값에 따라 홀수는 다음 수형도와 같이 나눠진다.


2n−1
4n−1
~~4n−3~~
p=1
8n−7
~~8n−3~~
p=2
16n−3
~~16n−11~~
p=3
32n−27
~~32n−11~~
p=4
64n−11
~~64n−43~~
p=5
128n−107
~~128n−43~~
p=6
256n−43
~~256n−171~~
p=7
512n−427
~~512n−171~~
p=8
...

이때 p가 홀수인 경우인 $4n-1, 16n-3, 64n-11..$ 등은 $T(n)=3n+1$을 시행하고, 2^p로 나누면 $6n-1$이 된다.

또, p가 짝수인 경우인 $8n-7, 32n-27, 128n-107..$ 등은 $T(n)=3n+1$을 시행하고, 2^p로 나누면 $6n-5$가 된다.

즉, $6k-1, 6k-5$ (k는 자연수)인 수에 대해 콜라츠 추측이 성립하면 모든 자연수에 대해 콜라츠 추측이 성립한다.

또한 $6k-1, 6k-5$도 홀수이므로 임의의 자연수 n에 대해 다시 새로운 $6n-1$ 또는 $6n-5$가 된다.

2. 모든 자연수에 대한 재정렬

따라서 콜라츠 추측을 새롭게 4가지 경우로 나눌 수 있다.

ⅰ) $6k-5$로 시작하여 $6n-1$이 되는 경우
ⅱ) $6k-5$로 시작하여 $6n-5$가 되는 경우
ⅲ) $6k-1$로 시작하여 $6n-1$이 되는 경우
ⅳ) $6k-1$로 시작하여 $6n-5$가 되는 경우

이 4가지 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

	i) from $6k-5$ to $6n-1$	ii) from $6k-5$ to $6n-5$
식	$6k-5=\dfrac{(6n-1)2^{p}-1}{3} \Rightarrow 9k-7=2^{p-1}(6n-1)$	$6k-5=\dfrac{(6n-5)2^{p}-1}{3} \Rightarrow 9k-7=2^{p-1}(6n-5)$
순서쌍	$3k-2=2n$ $p=1\,(2,2),(4,5),(6,8)..$ $3k-1=8n$ $p=3\,(3,1),(11,4),(19,7)..$ $3k+3=32n$ $p=5\,(31,3),(63,6),(607,57)..$ $3k+19=128n$ $p=7\,(89,2),(217,5),(345,8)..$ $3k+83=512n$ $p=9\,(143,1),(655,4),(1167,7)..$ $3k+339=2048n$ $p=11\,(1935,3),(3983,6),(6031,9)..$ . . .	$3k+1=4n$ $p=2\,(1,1),(5,4),(9,7)..$ $3k+11=16n$ $p=4\,(7,2),(23,5),(39,8)..$ $3k+51=64n$ $p=6\,(47,3),(111,6),(175,9)..$ $3k+211=256n$ $p=8\,(15,1),(271,4),(527,7)..$ $3k+851=1024n$ $p=10\,(399,2),(1423,5),(2447,8)..$ $3k+3411=4096n$ $p=12\,(2959,3),(7055,6),(11151,9)..$ . . .
일반화	$3k+\dfrac{2^{p-1}-7}{3}=2^{p}n$	$3k+\dfrac{5\times 2^{p-1}-7}{3}=2^{p}n$
	iii) from $6k-1$ to $6n-1$	iv) from $6k-1$ to $6n-5$
식	$6k-1=\dfrac{(6n-1)2^{p}-1}{3} \Rightarrow 9k-1=2^{p-1}(6n-1)$	$6k-1=\dfrac{(6n-5)2^{p}-1}{3} \Rightarrow 9k-1=2^{p-1}(6n-5)$
순서쌍	$3k=2n$ $p=1\,(2,3),(4,6),(6,9)..$ $3k+1=8n$ $p=3\,(5,2),(13,5),(21,8)..$ $3k+5=32n$ $p=5\,(9,1),(41,4),(73,7)..$ $3k+21=128n$ $p=7\,(121,3),(249,6),(377,9)..$ $3k+85=512n$ $p=9\,(313,2),(825,5),(1337,8)..$ $3k+341=2048n$ $p=11\,(569,1),(2617,4),(4665,7)..$ . . .	$3k+3=4n$ $p=2\,(3,3),(7,6),(11,9)..$ $3k+13=16n$ $p=4\,(1,1),(17,4),(33,7)..$ $3k+53=64n$ $p=6\,(25,2),(89,5),(153,8)..$ $3k+213=256n$ $p=8\,(185,3),(441,6),(697,9)..$ $3k+853=1024n$ $p=10\,(57,1),(1081,4),(2105,7)$ $3k+3413=4096n$ $p=12\,(1593,2),(5689,5),(9785,8)$ . . .
일반화	$3k+\dfrac{2^{p-1}-1}{3}=2^{p}n$	$3k+\dfrac{5\times 2^{p-1}-1}{3}=2^{p}n$

콜라츠 추측은 모든 수가 1로 간다는 추측이므로, 참이라고 가정하고 역추적을 해보자. 이 경우는 ii)에서 $n=1$인 경우와 iv)에서 $n=1$인 경우이다. 역추적을 통해 수형도를 그려 모든 자연수가 2번씩 나오면 $6k-1, 6k-5$를 지정하는 자연수 k 2쌍이 $n=1$로의 수형도가 있으므로 콜라츠 추측이 참이 된다.

그러나 수형도에서 모든 자연수를 지정하지 못하고 무한히 반복하는 경우가 있을 수 있다. 그 경우가 없다면, 혹은 문

제 없이 제거할 수 있다면 결과에 영향을 주지 않을 것이다.

반복할 수 있는 경우는 역추적을 기반으로 하였을 때 다음과 같은 2가지가 있다.

Case 1) ⅰ, ⅲ에서 겹치는 경우
Case 2) ⅱ, ⅳ에서 겹치는 경우

Case 1)의 경우

ⅰ, ⅲ에서 (k, n)이 동일할 때, 각각의 p의 유무를 밝히면 된다. ⅰ에서 $p=\alpha$, ⅲ에서 $p=\beta$라 두자.

$2^{\alpha}=\dfrac{18k-14}{6n-1}, 2^{\beta}=\dfrac{18k-2}{6n-1}$이다. $2^{\beta}-\dfrac{12}{6n-1}=2^{\alpha}$이고, 이를 만족하는 α, β와 순서쌍은 존재하지 않는다.

Case 2)의 경우

ⅱ, ⅳ에서 (k, n)이 동일할 때, 각각의 p의 유무를 밝히면 된다. ⅱ에서 $p=\alpha$, ⅳ에서 $p=\beta$라 두자.
$2^{\alpha}=\dfrac{18k-2}{6n-5}, 2^{\beta}=\dfrac{18k-14}{6n-5}$이다. $2^{\alpha}-\dfrac{12}{6n-5}=2^{\beta}$이고, 이를 만족하는 경우는
$\alpha=4, \beta=2, (k,n)=(1,1)$로 유일하다.

즉, Case 1)과 Case 2)를 통해 역추적에서 무한히 회귀하는 경우는 오직 Case 2)에서 $(k, n)=(1,1)$인 경우뿐이고, 이 경우의 수형도는 자기 자신을 회귀할 뿐이므로 제거할 수 있다.

3. 결론

결국 역추적을 하였을 때 위에서 언급한 회귀하는 경우를 제외한 수형도는 모든 자연수를 2번씩 지정한다.
($6k-1$(또는 $6k-5$)을 따르던 k에서 지시되는 n, 즉(k, n)은 하나로 유일하므로 계속 (k, n)쌍을 거쳐 최종적으로 $n=1$까지 도달할 때까지 루트는 하나로 유일하고, 역추적의 관점에서는 (k,n)쌍은 계속 새로운 수를 지정하기 때문이다.) 즉, $6k-1, 6k-5$을 지정할 수 있는 모든 자연수 k가 각각 하나씩 존재하므로 콜라츠 추측은 참이다.