파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학 1, 화학 1, 생명과학 1, 지구과학 1, 사회·문화가 예정되어 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.
'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 ‘파급의 기출효과’ 카페에서 질문을 할 수 있습니다.

교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

기출의 파급효과 팀 소속 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

CHAPTER

01 필수 도형 정리와 극한

미적분에서 도형적 요소가 제일 많이 쓰이는 단원은 등비급수, 삼각함수의 덧셈정리, 삼각함수 극한이다. 세 단원 모두 살짝 복잡한 도형이 나오면 많이들 당황한다. 하지만 꼭 그어야 할 보조선을 잘 긋고 문제에서 구하려는 도형의 길이나 각을 잘 표시하면 문제가 잘 풀린다. 보조선, 길이, 각 표시의 정형화된 기준을 배우기 전에 기본적인 도구부터 확인하고 가자.

기본적인 도구

1. 삼각함수 덧셈정리

삼각함수의 덧셈정리 관련 문제의 경우 삼각함수의 덧셈정리가 쓰인다는 것을 인지하지 못하면 헤매는 경향이 있다. **도형이 나오는데 기하 문제도 아니고 삼각함수 극한 문제도 아니라면 삼각함수의 덧셈정리가 쓰이겠구나 하고 예상**하고 문제에 접근하자.

삼각함수의 덧셈정리 공식은 다음과 같다.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

이를 통해 쉽게 알 수 있는 **$\sin$의 2배각 공식**을 꼭 알아두자. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$에 $\alpha=\beta$일 때 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$이다. $\sin\alpha\cos\alpha$를 $\frac{1}{2}\sin2\alpha$로 바꾸면 극한이나 적분에서 계산이 편해진다.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

이를 통해 쉽게 알 수 있는 **$\cos$의 2배각 공식**을 꼭 알아두자. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$에 $\alpha=\beta$일 때 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$이다.

$\cos^2\alpha$를 $\frac{1+\cos2\alpha}{2}$로 바꾸거나 $\sin^2\alpha$를 $\frac{1-\cos2\alpha}{2}$로 바꾸면 극한이나 적분에서 계산이 편해진다.

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan$ 덧셈정리는 두 직선의 기울기 차이를 구할 때 많이 쓰인다. 자주 쓰이니 기억하자.

예제(1) 20년 7월 교육청 26번

삼각형 ABC에 대하여 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$라 할 때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$) [4점]

1. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$이고 등차중항에 의하여 $\alpha+\gamma=2\beta$이므로 $3\beta=\pi$에서 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$이다.

   등비중항에 의하여 $\cos\alpha\times 8\cos\gamma=(2\cos\beta)^2=\left(2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2=1$이므로 $\cos\alpha\cos\gamma=\dfrac{1}{8}$이다.

2. $\cos\alpha\cos\gamma$**의 값을 알고 있으므로** $\tan\alpha\tan\gamma$**의 값을 구하려면** $\sin\alpha\sin\gamma$ **값이 필요하다.**

   $\alpha+r=2\beta=\dfrac{2\pi}{3}$이므로 $\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma$를 떠올릴 수 있다.

   $\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\pi-\beta)=\cos\dfrac{2\pi}{3}$에서

   $\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=\dfrac{1}{8}-\sin\alpha\sin\gamma=-\dfrac{1}{2}$이다.

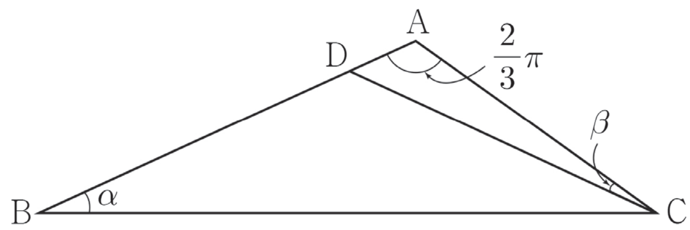
   따라서 $\sin\alpha\sin\gamma=\dfrac{5}{8}$이므로 $\tan\alpha\tan\gamma=5$이다.

답은 5!!

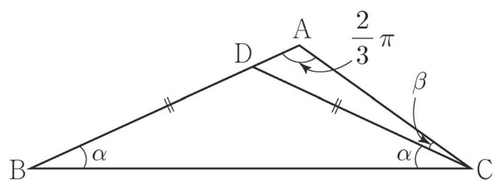
예제(2) 21년 4월 교육청 미적분 29번

그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACD}=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오.

[4점]



1. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 $\angle \mathrm{DBC}=\angle \mathrm{DCB}=\alpha$ 이다.



삼각형 ABC 에서 세 내각의 합은 π 이므로 $\frac{2}{3}\pi+2\alpha+\beta=\pi$ 에서 $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ 이다.

2. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\left(1+\frac{\sqrt{21}}{7}\right)-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 이고, $\tan 2\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan 2\alpha}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ 이다.

$54\sqrt{3}\times\tan\beta=54\sqrt{3}\times\frac{1}{3\sqrt{3}}=18$ 이다.

답은 18!!

◆ 2. 극한 처리

최종적으로 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}$를 계산해야 하는 상황이 자주 발생한다. $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}$은 주로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$, $\lim_{x\to0}g(x)=0$이어서 주로 $\frac{0}{0}$꼴의 극한이다.

본격적인 **극한 계산 전에 꼭 먼저 분모, 분자의 0의 차수를 확인**하자. 예를 들어 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\tan x}{x^3}$의 경우 분모의 0의 차수는 3이고 분자의 0의 차수는 2이다.

분모의 0의 차수가 분자의 0의 차수보다 크다면 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$는 발산한다.

분모의 0의 차수가 분자의 0의 차수보다 작다면 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$는 0으로 수렴한다.

분모의 0의 차수가 분자의 0의 차수와 같다면 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$는 0이 아닌 상수로 수렴한다.

우리는 평가원 문제 중 **도형이 쓰이는 삼각함수의 극한 문제에서 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}$가 $\frac{0}{0}$꼴의 극한일 때 0이 아닌 상수로 수렴할 것임을 이미 알고 있다.** 답이 없거나 선지에 0이 없기 때문이다. 따라서 **분모의 0의 차수가 분자의 0의 차수와 같다는 것을 먼저 확인**하고 계산을 진행하자. **분모의 0의 차수가 분자의 0의 차수와 다르다면 어딘가에서 실수했을 확률이 높다.** 계산 후에 실수를 찾아내면 시간 손실이 너무 크기에 식의 형태가 너무 복잡하지 않다면 **분모, 분자의 0의 차수를 미리 확인**하자.

※ $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}$**가 $\frac{0}{0}$꼴의 극한이 아닐 수도 있으니 반드시 확인**하고 가자.

의외로 $\lim_{x\to0}$일 때, $f(x)$와 $g(x)$가 0이 아닌 상수로 수렴할 수 있다.

(1) 기본 삼각함수, 초월함수 극한

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$는 기본적으로 암기하고 있어야 한다. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$가 상대적으로 생소할 수 있는데 이것도 암기해야 편하다.

유도는 다음과 같다. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0}$**일 때,** $\sin x$, $\tan x$, e^x-1, $\ln(x+1)$**는 0의 차수가 각각 1이고** $1-\cos x$**는 0의 차수가 2이다.**

※ $\lim\limits_{x\to0}$일 때 테일러 급수를 이용한 근사로 $\sin x\approx x$, $\tan x\approx x$, $1-\cos x\approx\dfrac{1}{2}x^2$, $e^x-1\approx x$, $\ln(x+1)\approx x$로 바꿔 계산할 수 있다. 삼각함수, 초월함수 대신 다항식을 사용하여 계산이 약간은 더 쉬워질 수 있다. 다만 평가원 문제에서는 이를 굳이 쓰지 않아도 계산이 편하다. 나도 한 번도 써본 적이 없다.

(2) 수렴 조건에 따른 극한의 사칙연산

복잡한 극한을 계산할 때 가장 많이 쓰이고 중요한 도구이다. 교과서 정의에 입각한다.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)+h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{f(x)}$**가 가능하기 위해서는** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\beta$**로 각각 수렴해야 한다.**

예를 들어 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}$**가 수렴하지 않기에** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}$**로 계산하면 안 된다.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}$는 각각 발산하지만 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$는 $\dfrac{1}{2}$로 수렴한다.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\times\lim\limits_{x\to a}g(x)$**가 가능하기 위해서는** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$**로 각각 수렴해야 한다.**

$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\times\lim\limits_{x\to a}g(x)$에서 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha\ (\alpha\neq0)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\gamma$로 각각 수렴한다면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$도 수렴할까?

수렴한다. 증명은 간단하다. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha\ (\alpha\neq0)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\gamma$**로 각각 수렴하므로**

$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)\div\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\dfrac{\gamma}{\alpha}$**이다.**

α**가 0이 아니어야 한다**는 점에 초점을 두자.

우리는 평가원 문제에서 **도형이 쓰이는 삼각함수의 극한 문제에서** $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$**가** $\frac{0}{0}$**꼴의 극한일 때 0이 아닌 상수로 수렴할 것임**을 이미 알고 있다. 따라서 바로 위에서 배웠듯이 $\lim_{x \to 0} h(x) = \gamma(\gamma \neq 0)$**로 수렴한다면** $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ **도 수렴할 것이다.**

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} h(x) \times \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \gamma \times \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$**로 분리할 수 있다.**

$h(x)$가 연속함수라면 $h(0) = \lim_{x \to 0} h(x)$이므로 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)h(x)}{f(x)} = h(0) \times \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$도 가능하다.

따라서 편하게 $\lim_{x \to 0} h(x) = \gamma(\gamma \neq 0)$**처럼 0으로 수렴하지 않는 부분을 먼저 분리하여 계산하고** $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$**와 같이 순수** $\frac{0}{0}$**꼴은 따로 분리하여 계산하자.** $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$**가** $\frac{0}{0}$**꼴의 극한일 때 0이 아닌 상수로 수렴한다는 것을 전제**로 하기에 이처럼 할 수 있음을 명심하자.

(3) 로피탈 정리

교육과정 밖의 내용이며 현재 평가원 기출에서 사용할 필요가 거의 없다. $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$가 $\frac{0}{0}$꼴이나 $\frac{\infty}{\infty}$꼴일 때 사용한다. 일반적으로 $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$로 계산이 가능하다. **하지만** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$**가** $\frac{0}{0}$**꼴이나** $\frac{\infty}{\infty}$**꼴일 때에도** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$**가 성립하지 않을 수도 있다.**

로피탈 정리의 사용조건은 다음과 같다.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$에서,

1. $f(x)$와 $g(x)$ 모두 $x = a$에서 미분가능

2. $f(a) = 0,\ g(a) = 0$

3. $g'(a) \neq 0$

위 3가지를 만족하고 $\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$이 수렴한다면 $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{g'(a)}{f'(a)}$이다.

로피탈 정리를 적용할 때는 로피탈 정리를 쓰기 위한 조건을 반드시 따져주자.

고등학교 범위 내에서 로피탈 정리를 보이자면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(1) $f(a)=g(a)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$이다.

(2) 다음으로 $\lim\limits_{x\to a}$는 $(x\neq a)$를 의미한다.

즉, $(x-a)\neq 0$이므로 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$의 분모와 분자를 $(x-a)$로 나눌 수 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

(3) 미분계수의 정의상 분모는 $f'(a)$, 분자는 $g'(a)$이다. 분모, 분자 각각 수렴(극한값이 존재)하므로,

극한의 성질에 따라 분모 분자 각각에 $\lim$를 뿌려줄 수 있다. 최종적으로 극한값은 $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$이 된다.

여기서 '$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=\dfrac{g'(a)}{f'(a)}$는 어떻게 증명할까?'라는 의문이 들 수 있으나 이것은 '대학 과정'이다.

흔히 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$를 '로피탈 정리'로 알고 있으나 엄밀히 말하면 이건 **'로피탈 정리'를 이용한 것이 아닌 미분계수를 이용한 것이다.**

로피탈 정리를 적용할 때는 로피탈 정리를 쓰기 위한 조건을 반드시 따져주자.
다만, 대부분 조건을 제대로 따지지 않기에 **정의를 쓰는 것이 안전하고 정의대로 푸는 것이 쉬울 때도 많다.**

(4) 미정계수 결정

극한과 관련된 조건에서 자주 쓰이는 성질이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)이고

1. $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이다.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이고 $\alpha \neq 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이다.

별생각 없이 쓰는 경우가 많을 텐데 꼭 증명도 알도록 하자.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면,

함수의 극한의 성질에 의해 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \times 0 = 0$이다.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$)이고 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이면, $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$이다. 이때, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이므로

함수의 극한의 성질에 의해 $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$이다.

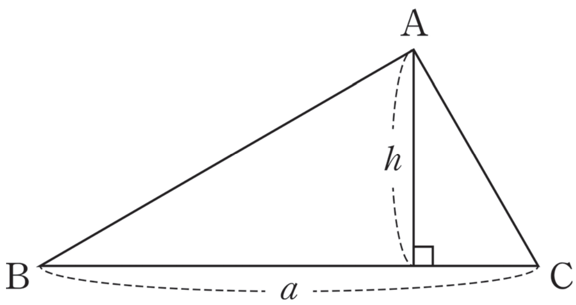
※ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$이고 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$라면 어떨까?

꼭 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$일 필요가 없다. 예를 들어 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ($\beta \neq 0$) 일 때에도

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$가 성립하기 때문이다.

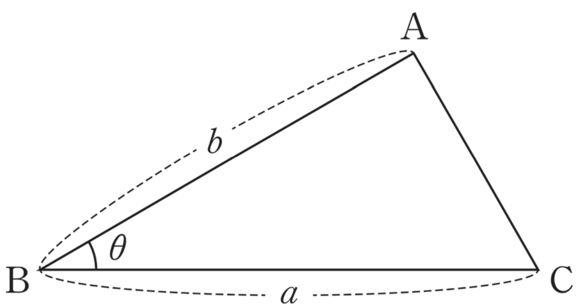
◆ 3. 대표적인 삼각형 넓이 구하는 방법

(1) 높이×밑변

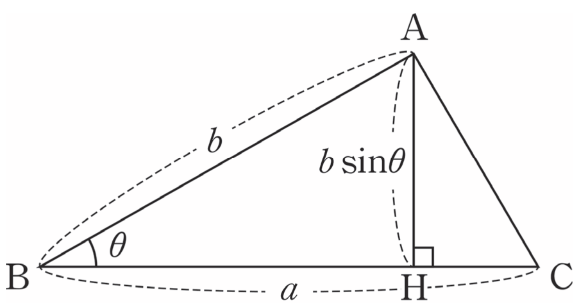


밑변 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이 a와 높이 h가 주어질 때 $\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}ah$이다. **밑변을 어디로 잡든 밑변과 높이가 수직이면 된다.** 가장 평범하지만 **평가원 기출에서 삼각형 넓이를 구할 때 제일 많이 쓰는 방법**이다.

(2) 두 변과 그 끼인각

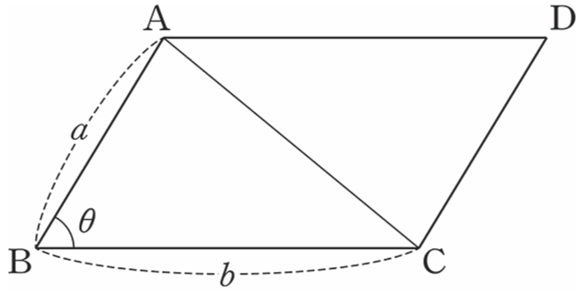


$\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$ 각각의 길이 a, b와 그 사이의 끼인각의 크기가 θ로 주어질 때 $\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다. **삼각형 넓이를 구할 때 평가원 기출에서 두 번째로 많이 쓰이는 방법**이다. 가끔 까먹을 때도 있으니 그림으로 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$를 보이겠다. θ가 둔각이어도 성립한다.



밑변을 $\overline{\mathrm{BC}}$로 잡으면 높이는 $\overline{\mathrm{AH}}$이다. $\overline{\mathrm{AH}}$ 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$와 삼각비를 이용하면 $b\sin\theta$이다.

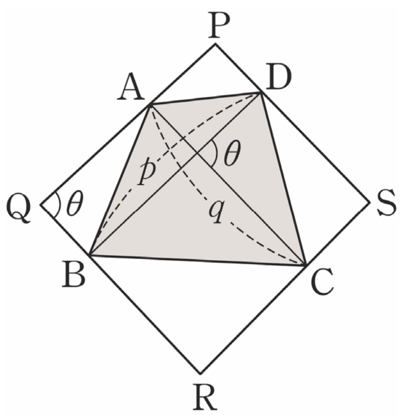
※ 평행사변형 넓이



$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 각각의 길이 a, b와 그 사이의 끼인각의 크기가 θ로 주어질 때 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{CDA}$이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는 $ab\sin\theta$이다. θ가 둔각이어도 성립한다.

※ 사각형의 두 대각선의 길이와 두 대각선이 이루는 각이 주어질 때

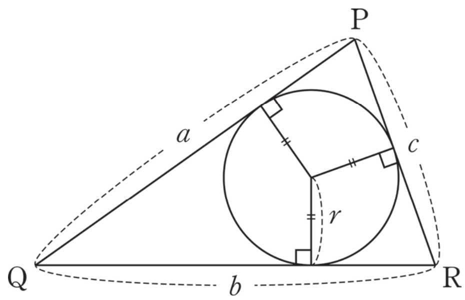


$\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 각각의 길이 p, q와 그 사이의 끼인각의 크기가 θ로 주어질 때 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}pq\sin\theta$이다. θ가 둔각이어도 성립한다.

두 대각선과 평행한 사각형 PQRS의 넓이가 $pq\sin\theta$이므로

사각형 PQRS의 넓이의 절반인 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}pq\sin\theta$이다.

(3) 내접원이 있을 때



이후에 더 자세히 설명하겠지만 **내접원 꼴이 나오면 내접원의 중심에서 접점을 잇고 직각을 반드시 표시해야 한다.** 또한, **내접원의 중심에서 접점을 이을 때 생기는 선분은 모두 내접원의 반지름이므로 '같다'를 나타내는 표시를 반드시 하자.**

$\triangle$PQR의 내접원의 중심을 점 O라고 하자. $\triangle$PQR의 넓이는 $\triangle$POQ, $\triangle$QOR, $\triangle$POR 각각의 넓이의 합이다. $\triangle$POQ, $\triangle$QOR, $\triangle$POR의 밑변은 각각 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$이고 밑변의 길이는 각각 a, b, c이다. 이때 $\triangle$POQ, $\triangle$QOR, $\triangle$POR의 높이는 내접원의 반지름 r로 같다. 따라서 $\triangle$PQR의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$이다.

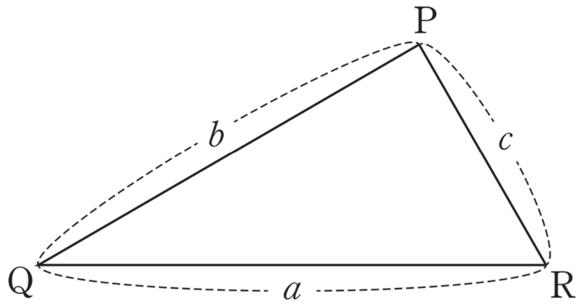
(4) 신발끈 공식

삼각형을 세 점의 이루는 세 점의 좌표가 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)일 때 삼각형 넓이는 아래의 공식을 이용하여 구하면 된다.

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

선으로 이어진 것끼리 곱하면 된다. 다만, **\은 부호가 $+$**이고 **/은 부호가 $-$**이다. 맨 바깥의 $|\ \ |$는 절댓값이다. 따라서 넓이$S=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_3y_2+x_2y_1)\right|$이다.

(번외) 헤론 공식



$\triangle \mathrm{PQR}$의 세 변의 길이만을 알 때 $\triangle \mathrm{PQR}$의 넓이를 헤론 공식을 이용하여 구할 수 있다.

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$로 둔다면 $\triangle \mathrm{PQR}$의 넓이는 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$로 구할 수 있다.

증명은 코사인법칙을 사용한다.

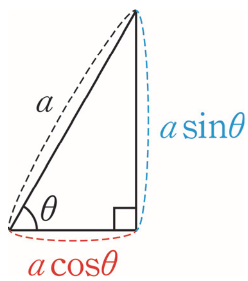
길이나 넓이가 정 안 구해질 때 최후의 방법으로 헤론 공식을 사용하도록 하자.

웬만하면 제일 보편적인 $\dfrac{1}{2}ah$, $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$를 쓰도록 하자.

◆ 4. 직각삼각형에서 삼각비를 이용한 길이 표시

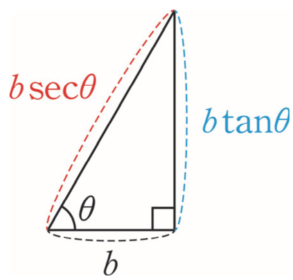
우리는 이과다. **닮음비 대신 삼각비를 적극적으로 이용해 길이를 표시**하도록 하자. 삼각비를 더 잘 사용하기 위해서는 **변의 길이뿐만 아니라 각도 미지수로 잡을 수 있다는 점**을 꼭 염두에 두자. **직각삼각형에서 한 변의 길이와 직각이 아닌 각 하나가 주어진다면 모든 변의 길이와 모든 각의 크기 표시가 가능**하다.

(1) 빗변, 직각이 아닌 한 각 θ



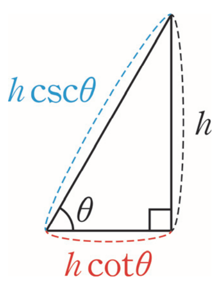
빗변의 길이가 a이면 밑변의 길이는 $a\cos\theta$, 높이는 $a\sin\theta$이다.

(2) 밑변, 직각이 아닌 한 각 θ



밑변의 길이가 b이면 빗변의 길이는 $b\sec\theta$, 높이는 $b\tan\theta$이다.

(3) 높이, 직각이 아닌 한 각 θ

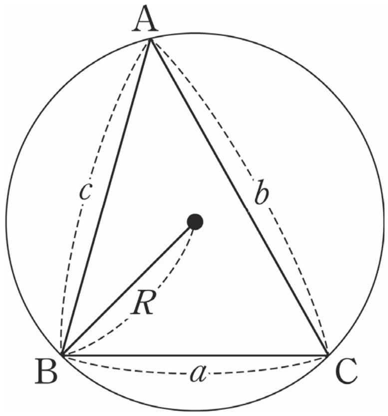


높이가 h이면 밑변의 길이는 $h\cot\theta$, 빗변의 길이는 $h\csc\theta$이다.

5. 사인법칙, 코사인법칙

(1) 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이다.



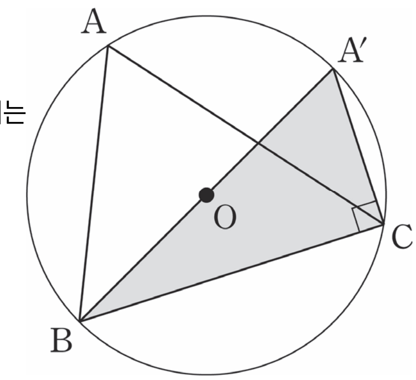
$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$이므로 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$임을 알 수 있다.

삼각형 ABC의 넓이 S의 넓이는 $\dfrac{abc}{4R}$이다. 증명은 다음과 같다.

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$이다. $\sin A=\dfrac{a}{2R}$이므로 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$에 대입하면 $S=\dfrac{abc}{4R}$이다.

사인법칙의 증명은 다음과 같다.

① 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때,

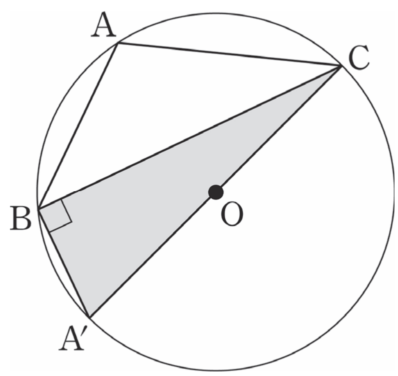


$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하고 지름 $\overline{\mathrm{A'B}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그린다.
$\angle\mathrm{BAC}$, $\angle\mathrm{BA'C}$는 호 BC에 대한 원주각이기에 $\angle\mathrm{BAC}$의 크기는 $\angle\mathrm{BA'C}$의 크기와 같다.

$\angle\mathrm{BCA'}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A'B}}=2R$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$이므로 $\sin A'=\frac{a}{2R}=\sin A$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$를 증명할 수 있다.

② 삼각형 ABC가 둔각삼각형일 때,



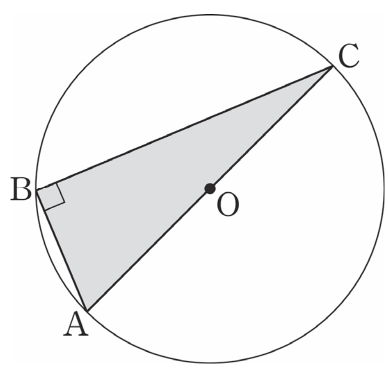
$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하고 지름 $\overline{\mathrm{A'C}}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 그린다.
사각형 $\mathrm{ABA'C}$는 원에 내접하는 사각형이다.
따라서 $\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{BA'C}=\pi$이다.

$\angle\mathrm{A'BC}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A'C}}=2R$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$이므로

$\sin A'=\frac{a}{2R}=\sin(\pi-A)=\sin A$이다.

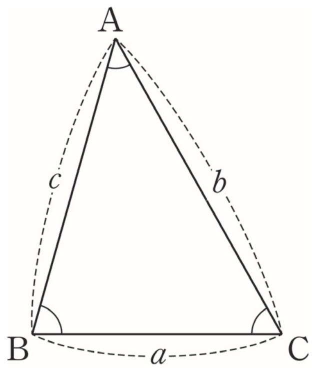
마찬가지 방법으로 $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$를 증명할 수 있다.

③ 삼각형 ABC가 직각삼각형일 때,



그림에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$임이 자명하다.

(2) 코사인법칙



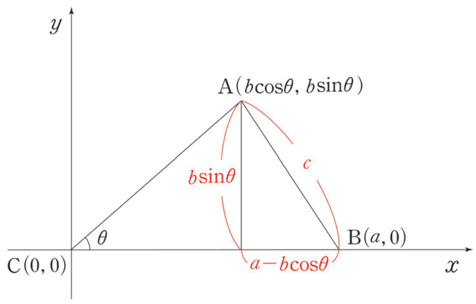
삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
2. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

이를 각에 대하여 나타내면 다음과 같다.

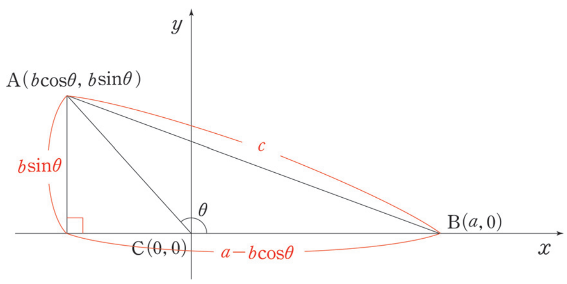
1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
2. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
3. $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

(1) 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때,



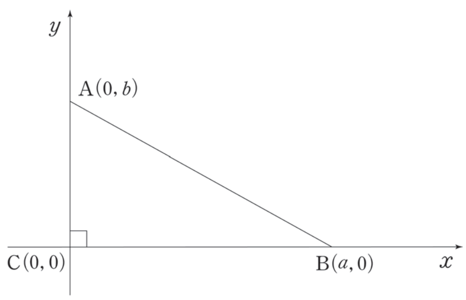
점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(b\cos\theta, b\sin\theta)$이다.
그림으로부터 $c^2 = (a - b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$임을 알 수 있다.

(2) 삼각형 ABC가 둔각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(b\cos\theta, b\sin\theta)$이다.
그림으로부터 $c^2 = (b\cos\theta - a)^2 + (b\sin\theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$임을 알 수 있다.

(3) 삼각형 ABC가 직각삼각형일 때,



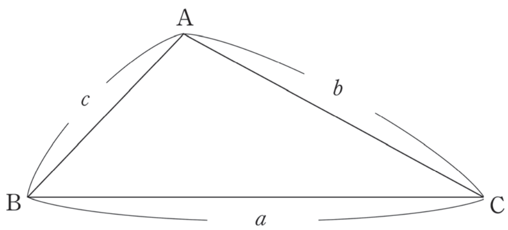
점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(0, b)$이다.
그림으로부터 $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있다.

(3) 사인법칙, 코사인법칙 활용

삼각형의 결정조건에는 **세 변의 길이가 주어질 때, 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어질 때, 한 변의 길이와 그 양 끝각이 주어질 때**가 있다. 여기에서 주어지지 않은 나머지 변의 길이나 각에 대한 정보를 알기 위해 사인법칙이나 코사인법칙을 이용해야 한다.

각 상황에서 언제 사인법칙이 편할지, 언제 코사인법칙이 편할지 구분하는 것은 중요하다. 이를 고려하지 않고 무작정 사인법칙이나 코사인법칙을 쓴다면 구하려고 하는 변이나 각과 관련된 식이 너무 복잡해질 수 있다. 언제 사인법칙이 더 편하고 언제 코사인법칙이 더 편할지 알려주도록 하겠다.

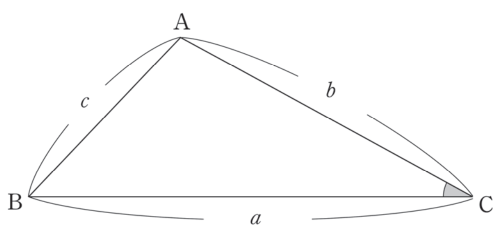
세 변의 길이가 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 세 각에 대한 정보를 쉽게 알 수 있다.



코사인법칙을 이용하면 $\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos\angle\mathrm{C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이다.

또한, 헤론 공식 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$을 이용하여 삼각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

두 변의 길이와 그 끼인각이 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 쉽게 알 수 있다. 이후 나머지 두 각에 대한 정보도 코사인법칙이나 사인법칙을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

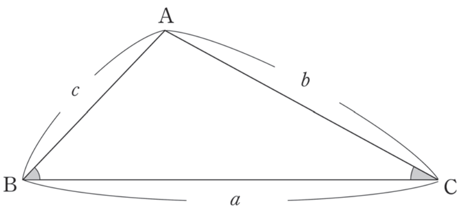


코사인법칙을 이용하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{C}$로 나머지 한 변의 길이 c를 알 수 있다.

이후에 코사인법칙을 이용해 $\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$를 구하거나

사인법칙을 이용해 $\sin\angle\mathrm{A}=\dfrac{a\sin\angle\mathrm{C}}{c}$, $\sin\angle\mathrm{B}=\dfrac{b\sin\angle\mathrm{C}}{c}$를 구할 수 있다.

한 변의 길이와 두 각의 크기가 주어질 때는 사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 두 각의 크기를 알면 삼각형 내각의 합이 π이므로 나머지 한 각의 크기도 아는 거나 다름이 없다. 사인법칙을 이용하여 두 변의 길이를 쉽게 알 수 있다.

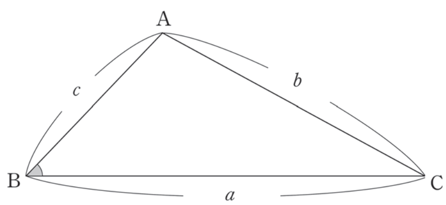


삼각형 내각의 합이 π이므로 $\angle \mathrm{A} = \pi - (\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C})$이다.

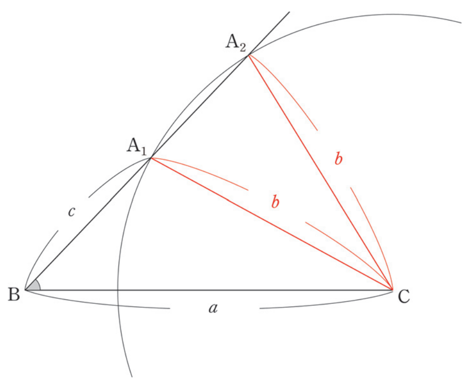
사인법칙을 이용해 $b = \dfrac{a \sin \angle \mathrm{B}}{\sin \angle \mathrm{A}}$, $c = \dfrac{a \sin \angle \mathrm{C}}{\sin \angle \mathrm{A}}$를 구할 수 있다.

※ **두 변의 길이와 끼인각이 아닌 각 하나가 주어질 때는 삼각형의 결정조건은 아니다.** 그럼에도 불구하고 코사인 법칙이나 사인법칙을 적절히 이용하여 나머지 한 변의 길이와 나머지 두 각에 대한 정보를 알 수 있다.

두 변의 길이와 끼인각이 아닌 각 하나가 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 쉽게 알 수 있다. 이후 나머지 두 각에 대한 정보도 코사인법칙이나 사인법칙을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

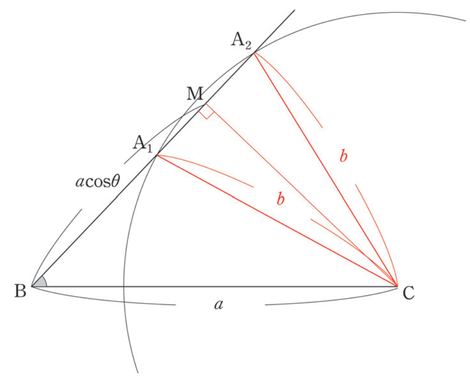


코사인법칙을 이용하면 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \angle \mathrm{B}$로 나머지 한 변의 길이 c를 알 수 있다.



다만, 다루는 삼각형에 따라 위 그림과 같이 **점** A**의 위치가 점** A_1**이거나 점** A_2**일 수 있다.**

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \angle \mathrm{B}$를 이용해 나머지 한 변의 길이 c를 구할 때, c**에 대한 이차방정식이 나오는 이유**도 이 때문이다.



$\angle \mathrm{B} = \theta$로 두고 c**에 대한 이차방정식** $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle\mathrm{B}$**를 정리**하면

$c = a\cos\theta \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ 이다. $\overline{\mathrm{BM}} = a\cos\theta$이므로 점 A의 위치가 점 A_1이면

$c = a\cos\theta - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ 이고,

점 A의 위치가 점 A_2이면 $c = a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **임을 알 수 있다.**

점 A의 위치가 점 A_1이면 $\angle\mathrm{A}$가 둔각이고 점 A의 위치가 점 A_2이면 $\angle\mathrm{A}$가 예각이다.

따라서 $\angle\mathrm{A}$**가 둔각인지 예각인지에 따라** $c = a\cos\theta - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **인지** $c = a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$ **인지를 결정할 수 있다.**

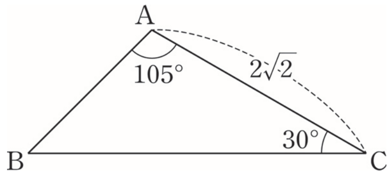
이후에 코사인법칙을 이용해 $\cos\angle\mathrm{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\angle\mathrm{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 를 구하거나

사인법칙을 이용해 $\sin\angle\mathrm{A} = \dfrac{a\sin\angle\mathrm{B}}{b}$, $\sin\angle\mathrm{C} = \dfrac{c\sin\angle\mathrm{B}}{b}$ 를 구할 수 있다.

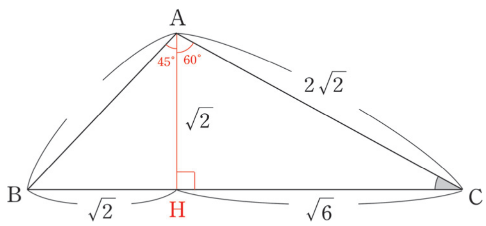
만약 나머지 한 변의 길이 c**가 아닌** $\sin\angle\mathrm{A}$**가 필요하다면 굳이** c**를 구할 필요 없이**

사인법칙을 이용해 $\sin\angle\mathrm{A} = \dfrac{a\sin\angle\mathrm{B}}{b}$ **로 나타내면 된다.**

※ 주의
사인법칙, 코사인법칙을 쓰는 것이 최선이 아닐 때도 존재한다.



$\overline{BC}$의 길이를 구해보자. $\angle B = 45^\circ$이다. '어? 이거 완전 사인법칙 상황 아니냐?' 하며
$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ}$를 이용하려 했다면 잠깐 멈춰보자. $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ)$는
삼각함수 덧셈정리를 이용해 구할 수도 있으나 그리 편한 선택은 아닐 거 같다.



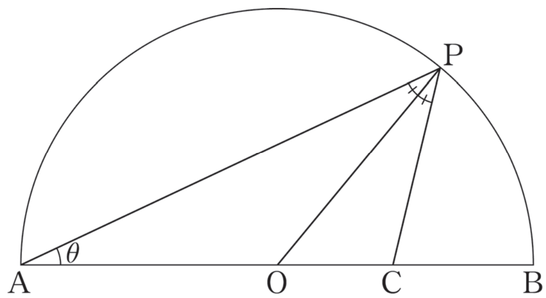
점 A에서 선분 BC에 수선의 발 H를 내려 직각삼각형 2개를 만든다.
삼각형 AHC에서 특수각 삼각비를 이용하면 $\overline{AH} = \sqrt{2}$, $\overline{CH} = \sqrt{6}$임을 쉽게 알 수 있고,
삼각형 AHB에서 특수각 삼각비를 이용하면 $\overline{BH} = \sqrt{2}$임을 쉽게 알 수 있다.
$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$이다.

따라서 사인법칙이나 코사인법칙을 이용하기 전에 수선, 특수각 삼각비를 최대한 이용해 보는 것이 좋다.

예제(3) 15년 10월 교육청 12번

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ 라 하자. 선분 OB 위의 점 C 가 $\angle \mathrm{APO} = \angle \mathrm{OPC}$ 를 만족시킬 때, $\lim_{\theta \to 0+} \overline{\mathrm{OC}}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이고, 점 O 는 선분 AB 의 중점이다.) [3점]



① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

1. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ 이고 $\triangle \mathrm{OAP}$ 는 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{APO} = \angle \mathrm{OPC} = \theta$ 이다.

2. $\overline{\mathrm{OP}} = 1$, $\angle \mathrm{POB} = 2\theta$, $\angle \mathrm{OPC} = \theta$, $\angle \mathrm{OCP} = \pi - 3\theta$ 이다.

   $\triangle \mathrm{OCP}$ 에서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 와 세 각의 크기를 알기에 사인법칙을 활용하여 $\overline{\mathrm{OC}}$ 를 표현하면 된다.

   $\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\angle \mathrm{OCP})} = \frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin(\angle \mathrm{OPC})}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OC}} = \frac{1 \times \sin\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

3. $\lim_{\theta \to 0+} \overline{\mathrm{OC}}$ 는 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다.

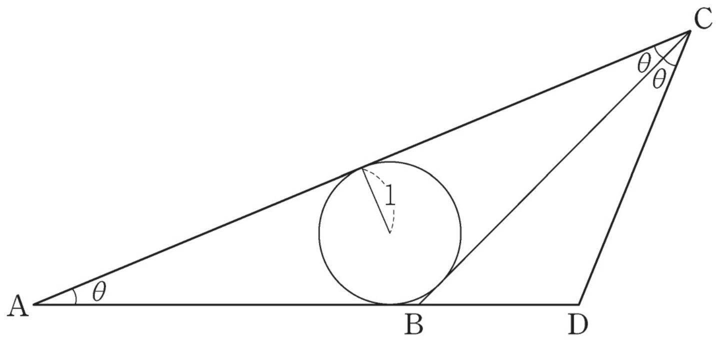
   0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

   $\lim_{\theta \to 0+} \overline{\mathrm{OC}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{1}{3}$ 이다.

답은 ④!!

예제(4) 15학년도 수능 20번

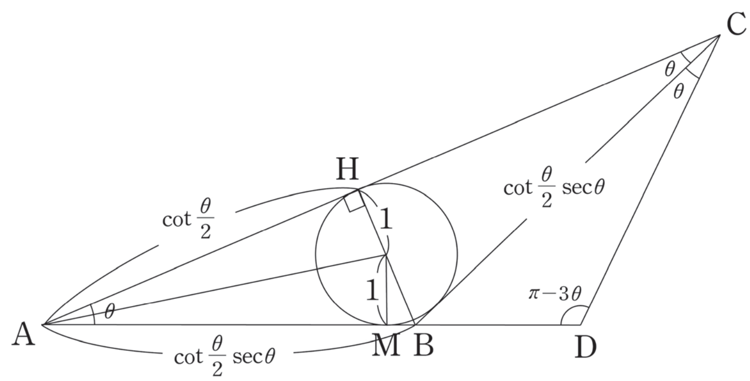
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{BCA} = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle \mathrm{DCB} = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{8}{9}$　　③ $\frac{10}{9}$　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{14}{9}$

1. **새부리를 닮은 내접원 꼴이다. 내접원의 중심에서 접점을 잇고 직각을 표시하자.**

$\triangle\mathrm{ABC}$는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 그림에 꼭 표시하자.



원의 중심을 O라 하면, $\overline{\mathrm{AO}}$는 $\angle\mathrm{CAB}$를 이등분한다.

점 O에서 $\overline{\mathrm{AC}}$ 위로의 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{AB}}$ 위로의 수선의 발을 M이라 하자.

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AM}}=\cot\dfrac{\theta}{2}$이다.

$\triangle\mathrm{BAH}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}\sec\theta=\cot\dfrac{\theta}{2}\sec\theta$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\cot\dfrac{\theta}{2}\sec\theta$이다.

2. $\triangle\mathrm{BCD}$의 넓이를 구하기 위해서는 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구해야 한다.

$\triangle\mathrm{ACD}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}$와 세 각의 크기를 알기에 사인법칙을 활용하여 $\overline{\mathrm{CD}}$를 표현하면 된다.

$\triangle\mathrm{ADC}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=2\cot\dfrac{\theta}{2}$, $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{D}=\pi-3\theta$이다.

$\sin(\pi-3\theta)=\sin3\theta$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{D}}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\angle\mathrm{A}}$에서 $\dfrac{2\cot\frac{\theta}{2}}{\sin3\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{2\sin\theta\cot\frac{\theta}{2}}{\sin3\theta}$이고 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\dfrac{\sin\theta\tan\theta\cot^2\frac{\theta}{2}}{\sin3\theta}$이다.

3. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 3이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

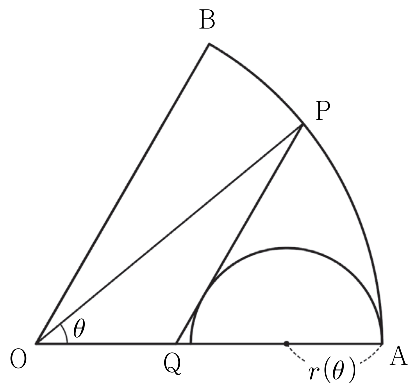
$$\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\sin\theta\tan\theta\cot^2\frac{\theta}{2}}{\sin3\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\sin\theta\tan\theta}{\sin3\theta\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\text{이다.}$$

답은 ④!!

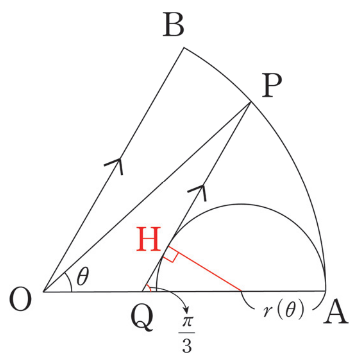
예제(5) 17학년도 사관 29번

그림과 같이 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 호 AB 위의 점 P 를 지나고 선분 OB 와 평행한 직선이 선분 OA 와 만나는 점을 Q 라 하고 $\angle \mathrm{AOP} = \theta$ 라 하자.
점 A 를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ 에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ 이고, } a, b \text{ 는 유리수이다.} \right)$ [4점]



1. $\overline{\mathrm{OB}}$**와** $\overline{\mathrm{PQ}}$**가 평행함을 그림에 나타내자. 또한, 반원의 중심** O'**을 표시하고 접점을 잇고 직각을 표시한다.**



$\overline{\mathrm{OB}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 평행하므로 $\angle \mathrm{PQA}=\frac{\pi}{3}$이다. 반원의 중심을 O'이라 하면 $\overline{\mathrm{O'Q}}=\frac{2}{\sqrt{3}}r(\theta)$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=1-\overline{\mathrm{AQ}}=1-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)r(\theta)$이다.

2. $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\angle \mathrm{AOP}=\theta$, $\angle \mathrm{OQP}=\frac{2\pi}{3}$, $\angle \mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{3}-\theta$이다.

$\triangle\mathrm{OPQ}$**에서** $\overline{\mathrm{OP}}$**와 세 각의 크기를 알기에 사인법칙을 활용하여** $\overline{\mathrm{OQ}}$**를 표현하면 된다.**

$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\angle \mathrm{OQP})}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin(\angle \mathrm{OPQ})}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$이다.

3. $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=1-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)r(\theta)$이다. 따라서 $r(\theta)=\dfrac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\frac{2}{\sqrt{3}}+1}$이다.

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}r'(\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$이다.

$a=2$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=5$이다.

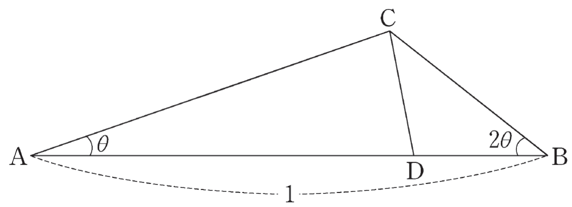
답은 5!!

※ $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}r'(\theta)$는 로피탈의 정리를 적용한 결과이다.

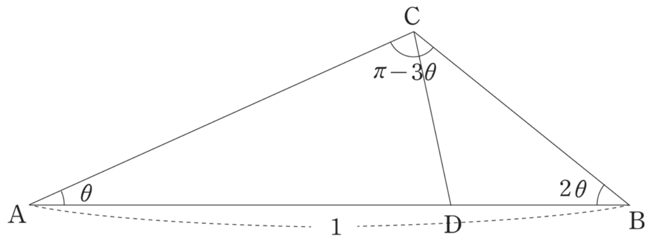
$\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}$는 $\frac{0}{0}$꼴이며 θ, $r(\theta)$는 $\theta=0$에서 미분가능하다. 또한, $\frac{d\theta}{d\theta}=1\neq 0$이므로 로피탈 정리를 쓸 수 있다. **로피탈 정리를 적용할 때는 로피탈 정리를 쓰기 위한 조건을 반드시 따져주자.**

예제(6) 13학년도 수능 29번

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle \mathrm{A}=\theta$, $\angle \mathrm{B}=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle \mathrm{ACD}=2\angle \mathrm{BCD}$가 되도록 잡는다. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



1. $\angle \mathrm{C}=\pi-3\theta$이다. $\triangle \mathrm{ABC}$**에서** $\overline{\mathrm{AB}}$**와 세 각의 크기를 알기에 사인법칙을 활용하여** $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$**를 표현하자.**

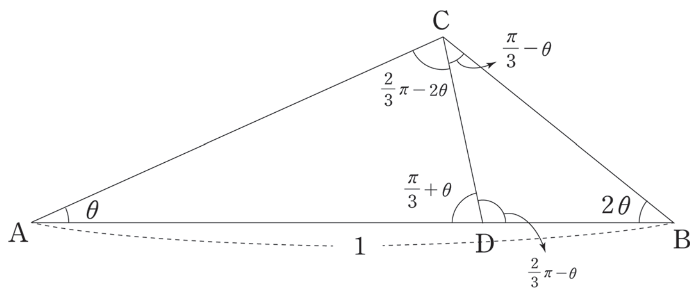


$\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle \mathrm{A}=\theta$, $\angle \mathrm{B}=2\theta$, $\angle \mathrm{C}=\pi-3\theta$이다.

$\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 3\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 2\theta}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$이다.

2. $\angle \mathrm{ACD}=2\angle \mathrm{BCD}$에서 $\angle \mathrm{ACD}=\dfrac{2}{3}\pi-2\theta$, $\angle \mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$, $\angle \mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{3}+\theta$이다.

$\triangle \mathrm{BCD}$**에서** $\overline{\mathrm{AC}}$**와 세 각의 크기를 알기에 사인법칙을 활용하여** $\overline{\mathrm{CD}}$**를 표현하자.**



$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ADC})}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}$에서 $\dfrac{\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}$이다.

3. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 2이다.

0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin\theta\times\sin 2\theta}{\theta\times\sin 3\theta\times\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$이다.

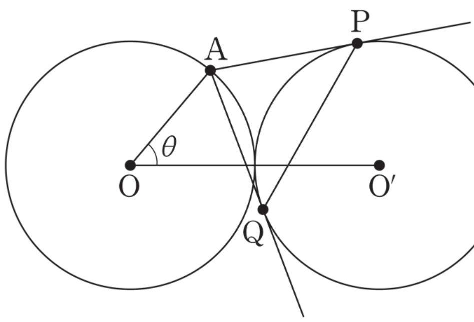
따라서 $a=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$이므로 $27a^2=16$이다.

답은 16!!

예제(7) 14학년도 6월 평가원 21번

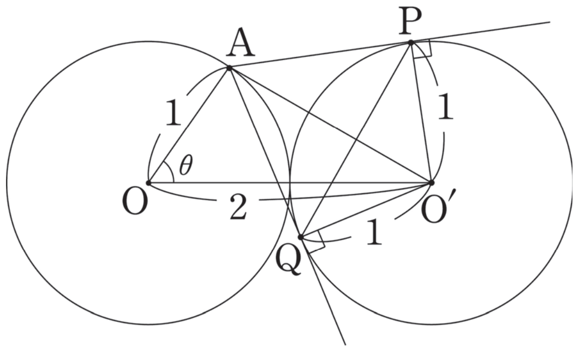
그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O′이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O′에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle \mathrm{AOO'} = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① 2　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{3}$

1. **새부리를 닮은 내접원 꼴이다. 내접원의 중심 O'에서 접점을 잇고 직각을 표시하자.**

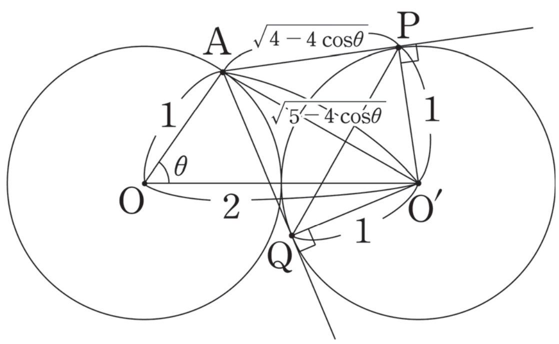


$\triangle OAO'$**에서** $\overline{AO}$, $\overline{OO'}$**의 길이와 끼인각** $\angle AOO'$**를 알기에 코사인법칙을 활용하여** $\overline{AO'}$**을 표현할 수 있다.** $\overline{AO}=1$, $\overline{OO'}=2$, $\angle AOO'=\theta$이다.

$\{\overline{AO'}\}^2=\{\overline{AO}\}^2+\{\overline{OO'}\}^2-2\times\overline{AO}\times\overline{OO'}\times\cos\angle AOO'=5-4\cos\theta$이다.

따라서 $\overline{AO'}=\sqrt{5-4\cos\theta}$, $\overline{AQ}=\overline{AP}=\sqrt{4-4\cos\theta}$ 이다.

2. $\square APO'Q$의 넓이를 이용하여 $\overline{PQ}$의 길이를 구하자.



$\square APO'Q$의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\overline{AP}\times\overline{O'P}=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AO'}$ 이므로

$\sqrt{4-4\cos\theta}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5-4\cos\theta}\times\overline{PQ}$에서 $\overline{PQ}=\dfrac{2\sqrt{4-4\cos\theta}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$ 이다.

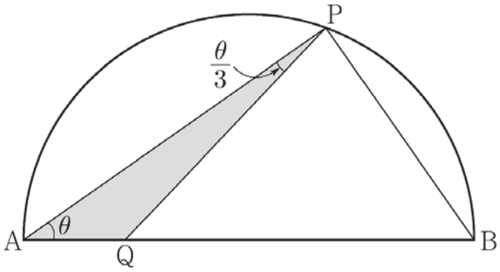
3. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\overline{PQ}}{\theta}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta}=4\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta\times\sqrt{5-4\cos\theta}}=4\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}}\right)$$

$=4\times\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ 이다. **답은 ③!!**

예제(8) 22학년도 예비시행 미적분 28번

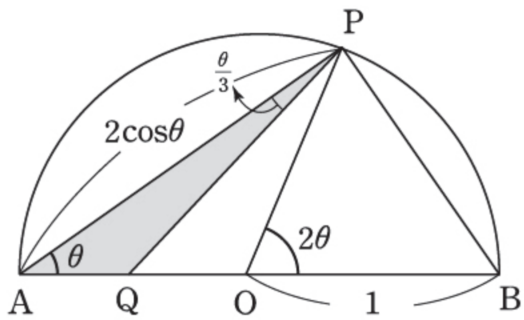
그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P 가 있고, 선분 AB 위에 점 Q 가 있다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ 이고 $\angle \mathrm{APQ} = \dfrac{\theta}{3}$ 일 때, 삼각형 PAQ 의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB 의 길이를 $l(\theta)$ 라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)}$ 의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \right)$ [4점]



① $\dfrac{1}{12}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ $\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{12}$

1. **반원의 중심을 먼저 표시하자.** 반원의 중심을 점 O라 하자.

$\overline{AB}=2$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $l(\theta)=\overline{PB}=2\sin\theta$이다. 이제 $S(\theta)$를 구하자.



$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\angle PQA=\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)$이므로 $\triangle PAB$에서 사인법칙을 활용하여 $\overline{AQ}$를 구하자.

$\dfrac{2\cos\theta}{\sin\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)}=\dfrac{\overline{AQ}}{\sin\frac{\theta}{3}}$에서 $\overline{AQ}=\dfrac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\dfrac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}\times\sin\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos^2\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$이다.

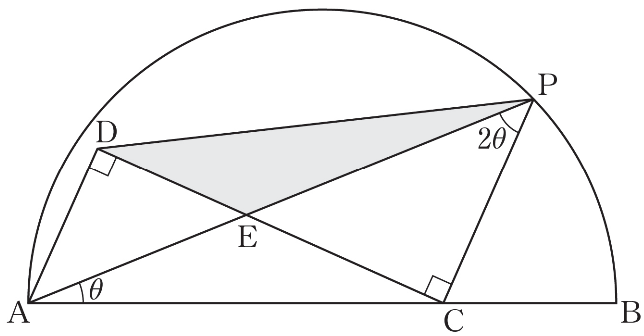
2. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{l(\theta)}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{2\sin\theta\cos^2\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}}{2\sin\theta}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$이다.

답은 ③!!

예제(9) 20년 10월 교육청 21번

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P 와 선분 AB 위의 점 C 에 대하여 $\angle \mathrm{PAC} = \theta$ 일 때, $\angle \mathrm{APC} = 2\theta$ 이다. $\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{PCD} = \frac{\pi}{2}$ 인 점 D 에 대하여 두 선분 AP 와 CD 가 만나는 점을 E 라 하자. 삼각형 DEP 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1 à• 8 9 Ɖ+ Ý D 9 8@ ¥f A . •1[%§"C9 Ɖ0' 8 9#c S?[/c ?C Ë9 D@7 D» g Y.W 1[%§"C

7 D#c $#1ç S??3wè*£ è?ü 5 6 Ɖc 1[0•?? 0ë?[&Û2W6 D#c ß/›2ã1w

Ý 5 D @ ¥f 1[%§"CÝ 5 6 D@ ¥f ? • Ý 7 D 6@ ¥f ? . •1[Ë !c+ Ý D 7 6@/ •1[Ë

à• 5 6 Ɖ+ 6 D@. g] b 1[%§"C

*"1_&|8@/· 1???/Ó g] b / g] b @ 7 D / g] Ɖ ¥f ? • @ 6 7 / g] Ɖ ¥f ? . • 1[Ç g] Ɖ ¥f ? • @W c g

g] Ɖ ¥f ? . • @W c. g 1[%§"C7 D@ . W c g] b / g] b @ g] b• / g] b• 6 7@ . g] bW c. g / g] b 1[Ë

!c+ 9 D@7 D» g Y.W@ g] b• / g] b• W c. g @ h U.b / g] b• 1[Ë

5 8 0' 7 D{ =°?p??%§"CÝ 6 7 D@Ý 7 5 8@/ •/·+ Ý 9 5 8@. •1[Ë

9 8@5 8» h U.b @5 7» W c/ g » h U.b 1[%§"C5 7#c S??1w

5 7@5 6? 6 7@. ? . g] bW c. g / g] b 1[%§"C9 8@h U.b W c/ g ¹ ? . g] bW c. g / g] b 1[Ë

!c+ >@ -f ¹ h U.b / g] b ¹ h U.b W c/ g ¹ ? . g] bW c. g / g] b ¹ g] Ɖ ¥f A . •

@ -f ¹ h U b• ¹ W c. g / h U/b ¹ ? . g] bW c. g / g] b 1[Ë

`] a 6A > { 6 / 6 1[%§"C «*—?? 1ë/· %ÿ Ã,Ã 1? 6 +ÿ#c @<1_??1w 'k$• 'k1w1? 1? 6 +ÿ ç 1[Ë

1[/+ ³ *¨+ÿ"C +ÿ" ?? { 'g'k1+ 'k#"?[ç$W «*—,Ä1+ 1ü#"?? ‡ Ë

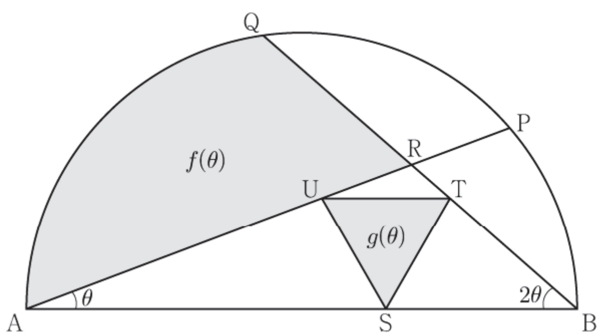
`] a 6A > @ `] a 6A -f ¹ h U b• ¹ W c. g / • h U/b ¹ ? . g] bW c. g / g] b @ -f ¹ 0 / f ¹ ? f @ 4 / 5 1[Ë

Ü1' x

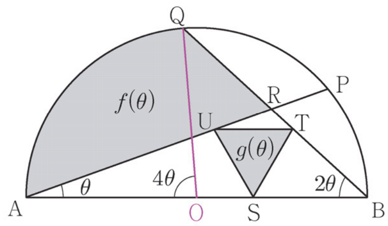
예제(10) 22학년도 수능 미적분 29번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자. 선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



1. **반원의 중심 O 를 표시하자.** $f(\theta)$ 의 값은 부채꼴 AOQ 의 넓이에서 삼각형 BOQ 의 넓이를 더한 것에 삼각형 ARB 의 넓이를 뺀 것이다.



$\angle AOQ = 2\times\angle ABQ = 2\times 2\theta = 4\theta$ 이므로 부채꼴 AOQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times 4\theta = 2\theta$ 이고,

삼각형 BOQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times \sin(\pi-4\theta) = \frac{1}{2}\sin 4\theta$ 이다.

삼각형 ARB 에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$ 이고 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta}$ 이므로

$\overline{BR} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

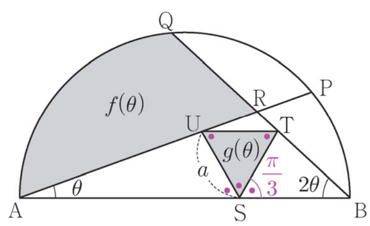
따라서 삼각형 ARB 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BR}\times\sin 2\theta = \frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta = \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로

$f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

2. $g(\theta)$ 의 값을 구하기 위하여 정삼각형 STU 의 한 변의 길이를 a 라 하자.

선분 UT 와 선분 AB 가 서로 평행하므로 $\angle TSB = \frac{\pi}{3}$ 이다.



삼각형 TSB 에서 사인법칙을 활용하자. $\frac{a}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{TB}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ 이므로 $\overline{TB} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}$ 이다.

$\overline{RT} = \overline{RB} - \overline{TB} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}$ 이고 삼각형 RUT 와 삼각형 RAB 가 서로 닮음이므로

$\overline{RT} : \overline{RB} = \overline{UT} : \overline{AB}$ 에서 $\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}\right) : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} = a : 2$ 이다.

$\frac{2a\sin\theta}{\sin 3\theta} = 2\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}\right)$ 이므로 $a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}$ 이다.

따라서 $g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}\right)^2$ 이다.

3. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{2\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\sin3\theta}\right)^2}{\theta\times\left(2\theta+\frac{1}{2}\sin4\theta-\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)}$$ 에서

분자와 분모를 각각 θ^2으로 나누면 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin2\theta\sin3\theta}{2\theta\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\,\theta\sin3\theta}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{2}\frac{\sin4\theta}{\theta}-\frac{2\sin\theta\sin2\theta}{\theta\sin3\theta}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2+2-\frac{4}{3}}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\left(\frac{2\theta\sin\theta\sin2\theta+\sqrt{3}\,\theta\sin3\theta}{\sin2\theta\sin3\theta}\right)^{-2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$ 이므로 $p=9$, $q=2$ 에서 $p+q=11$ 이다.

답은 11!!

여기까지가 **기본적 도구의 끝**이다. 이 교재가 추구하는 삼각함수 극한 문제풀이는 **정석대로 필요한 넓이나 길이를 구하고 정석대로 극한을 계산**하는 것이다. $\lim_{x\to 0}$나 $\lim_{x\to\infty}$일 때 넓이나 길이를 근사시킨다든지 극한 계산에서 정의가 아닌 테일러 급수를 이용한 근사나 로피탈을 쓴다든지의 풀이는 지양한다.

이제 꼭 표시해야 할 도형적 요소를 알아보자. 이것만 잘 지킨다면 도형이 쓰이는 극한 문제에서 당황할 일이 거의 없다.

꼭 표시해야 할 도형적 요소

수능에서는 심화 중학교 도형 문제처럼 특별한 보조선을 그을 필요가 없다. **구하려는 도형 넓이나 길이를 구하는 데에 필요한 것만 표시**하자. 표시해야 하는 도형적 요소는 이후에 잘 소개되어있다. **소개하지 않은 보조선 등을 그으면 오히려 그림이 더러워져 문제 풀기 힘들어진다.** **필요한 것만 표시했는데도 그림이 더러워진다면 그림을 여러 번 그리자!**

1. 직각

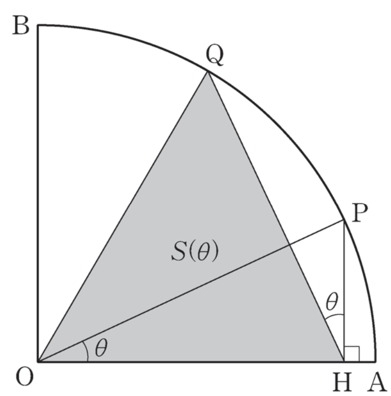
구하려는 도형 넓이나 변의 길이 주변에 아는 각이나 길이가 있으면 모두 표시하는 것이 좋다. 표시하다 보면 어느 순간 구하려는 도형 길이나 넓이를 어떻게 구해야 할지 감이 잡힐 것이다.

각 중에서 특히 직각은 반드시 표시해줘야 한다. **필요한 경우 수선의 발을 적극적으로 내려 직각을 만들어 줘야 한다.**

예제(11) 19학년도 6월 평가원 16번

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle\mathrm{POH} = \angle\mathrm{PHQ}$가 되도록 잡는다. $\angle\mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)

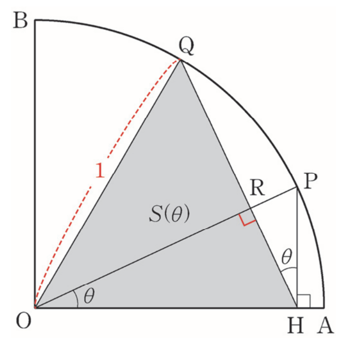
[4점]



① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

1. $\triangle \mathrm{OHQ}$의 넓이인 $S(\theta)$를 구하면 된다. 먼저 $\triangle \mathrm{OHQ}$의 세 변 중 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이는 부채꼴 OAB의 반지름의 길이이므로 1이다. $\triangle \mathrm{OHQ}$와 관련된 정보이므로 표시하자.

$\angle \mathrm{POH} = \angle \mathrm{PHQ} = \theta$를 평가원에서 친절히 표시까지 해줬다. $\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{HQ}}$의 교점을 R라 하면 $\angle \mathrm{PHA} = \frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{OHR} = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로 $\angle \mathrm{ORH} = \frac{\pi}{2}$라는 것을 발견하기 쉽도록 평가원에서 $\angle \mathrm{PHA}$**에 직각을 표시**하는 배려까지 해주었다. 이 배려로 $\angle \mathrm{ORH} = \frac{\pi}{2}$임을 쉽게 알 수 있으므로 $\angle \mathrm{ORH}$**에 직각을 꼭 표시**하자!



이렇게 표시하면 이제 문제의 윤곽이 어느 정도 잡힌다.
$\triangle \mathrm{OPH}$에서 $\overline{\mathrm{OP}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$이다. $\triangle \mathrm{OHR}$에서 $\overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{OR}} = \cos^2\theta$, $\overline{\mathrm{HR}} = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$이다.
여기까지 구했으면 $S(\theta)$를 $\overline{\mathrm{HQ}}$를 밑변으로 하고 높이를 $\overline{\mathrm{OR}}$로 하는 삼각형의 넓이로 구하면 되는구나 하고 감이 올 것이다.

※ $\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이를 알기에 $\overline{\mathrm{OQ}}$와 $\overline{\mathrm{OH}}$ 사이에 끼인각 $\angle \mathrm{QOH}$를 구해 넓이를 구하려고 시도할 수도 있을 것이다. 다만, $\angle \mathrm{QOR}$을 θ로 표현하기 매우 힘들다는 문제가 있다.

2. $\triangle \mathrm{OQR}$에서 $\overline{\mathrm{OQ}} = 1$, $\overline{\mathrm{OR}} = \cos^2\theta$이므로 $\overline{\mathrm{QR}} = \sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}$이다.
따라서 $S(\theta) = \frac{1}{2} \times \cos^2\theta \times \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}\right)$이다.

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \cos^2\theta \times \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}\right)}{\theta}$$를 구하면 된다.

우리는 이 극한이 수렴할 것임을 알기에 $\lim_{\theta \to 0+}$일 때 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 먼저 분리하여 계산하자. $\lim_{\theta \to 0+} \cos^2\theta = 1$이므로 식을 $\frac{1}{2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}}{\theta}$와 같이 바꿀 수 있다.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{\theta}$**이 수렴하고** $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}}{\theta}$**도 수렴**하므로

$\frac{1}{2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}}{\theta} = \frac{1}{4} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin 2\theta}{\theta} + \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}}{\theta}$이다.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos^4\theta}}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}}{\theta} = \sqrt{2} \times \lim_{\theta \to 0+} \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}} = \sqrt{2}$이고

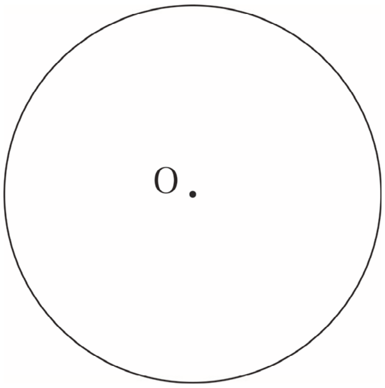
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = 2$이므로 $\frac{1}{4} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin 2\theta}{\theta} + \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}}{\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

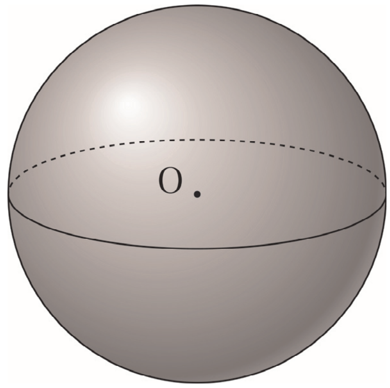
답은 ①!!

comment

머릿속에만 직각 표시를 하지 말고 **직접 그림 위에 직각을 표시**하자! 극한 계산을 할 때 **0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 먼저 분리하여 계산**하면 편하다.

◈ 2. 원, 구 중심과 반지름

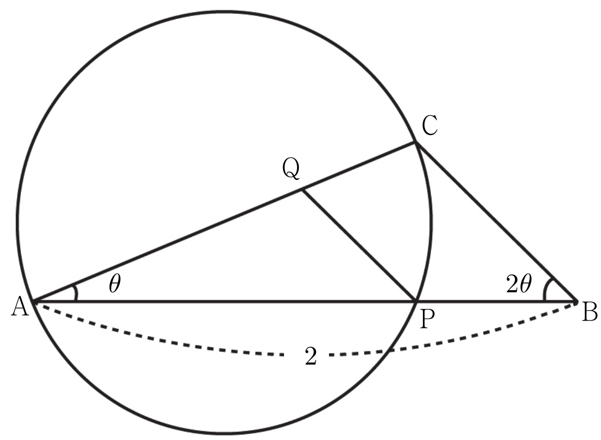




원의 정의는 '평면 위의 한 점에 이르는 거리가 일정한 평면 위 점들의 자취'이고 구의 정의는 '공간 위의 한 점에 이르는 거리가 일정한 공간 위 점들의 자취'이다. 여기에서 **'한 점'은 원과 구의 중심에 해당하고 '거리'는 반지름에 해당**한다. 따라서 **원과 구의 중심과 반지름은 죽었다 깨어나도 표시해야 한다.**

예제(12) 17년 7월 교육청 21번

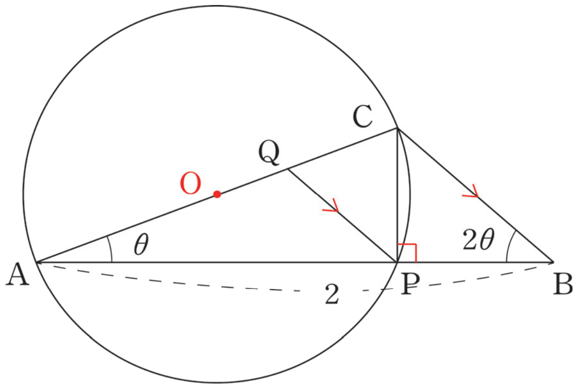
그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABC = 2\angle BAC$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC = \theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{19}{27}$ ⑤ $\frac{20}{27}$

1. **원의 중심 O를 표시하자. $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 평행함을 표시하자.**

점 C, 점 P를 잇자. $\angle \mathrm{CPB}=\frac{\pi}{2}$이므로 직각을 표시하자.



$S(\theta)$를 구하기 위해서는 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 구하면 된다.

원의 반지름을 r라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=2r\cos\theta$, $\overline{\mathrm{CP}}=2r\sin\theta$이다.

또한 $\angle \mathrm{CPB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=2r\sin\theta\cot2\theta$, $\overline{\mathrm{BC}}=2r\sin\theta\csc2\theta=r\sec\theta$이다

$\overline{\mathrm{AB}}=2r\cos\theta+2r\sin\theta\cot2\theta=2$이므로 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta\cot2\theta}$이다.

2. $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 평행하므로 $\triangle\mathrm{ABC}$와 $\triangle\mathrm{APQ}$는 닮음이다.

두 삼각형의 닮음비는 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AP}}=2:2r\cos\theta=1:r\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BC}}\times r\cos\theta=r^2$이다.

3. $S(\theta)=\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\sin(\angle\mathrm{APQ})=r^3\cos\theta\sin2\theta$이다.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$는 $\frac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다.

0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to0+}r=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta\cot2\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\cos\theta\sin2\theta+\sin\theta\cos2\theta}=\frac{2}{3}$$

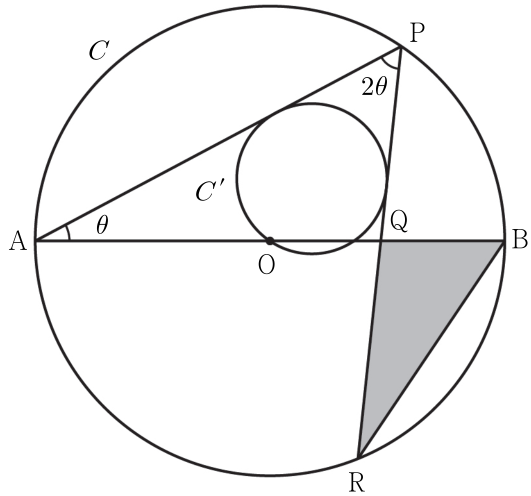
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{r^3\cos\theta\sin2\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}2r^3=2\lim_{\theta\to0+}r^3=2\left(\lim_{\theta\to0+}r\right)^3=\frac{16}{27}$$ 이다.

답은 ①!!

예제(13) 20년 7월 교육청 29번

그림과 같이 길이가 4 인 선분 AB 를 지름으로 하고 중심이 O 인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ 라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ} = 2\theta$ 를 만족시키는 점을 Q 라 하자. 직선 PQ 가 원 C와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 R 라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA , PR 에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O 를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)} = a$ 일 때, $45a$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

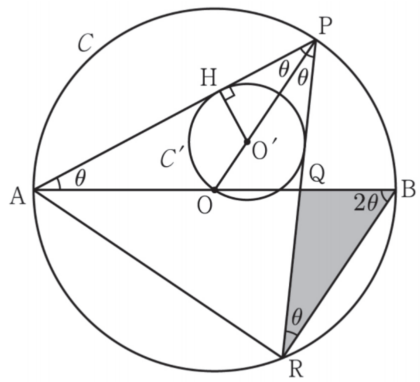


1. **원 C'의 중심을 O'이라고 하면 세 점 O, O', P는 한 직선 위에 있다.**

원 C'의 반지름을 $r(\theta)$라 하면 $\overline{\mathrm{O'P}}=2-r(\theta)$이므로 $\sin\theta=\dfrac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$이다.

따라서 $r(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$이다.

2. $\triangle\mathrm{PAQ}$와 $\triangle\mathrm{BRQ}$는 닮음 관계에 있다. $\angle\mathrm{ABR}=2\theta$이므로 $\overline{\mathrm{BR}}=4\cos 2\theta$이다.



$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}\cdot\overline{\mathrm{BR}}\cdot\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}\cdot 4\cos 2\theta\cdot\sin 2\theta$이다.

$\triangle\mathrm{BRQ}$에서 사인법칙을 활용하여 $\overline{\mathrm{BQ}}$의 길이를 구하자.

$\dfrac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{4\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{4\sin\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$이다.

따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16\sin\theta\cos^2 2\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}=\dfrac{8\sin\theta\cos^2 2\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$이다.

3. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{r(\theta)}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다.

0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\dfrac{8\sin\theta\cos^2 2\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}}{\dfrac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

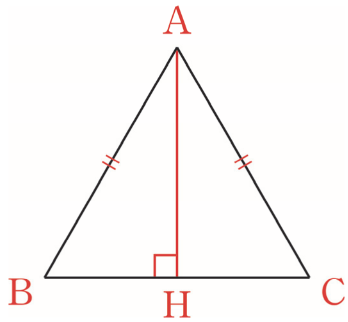
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\dfrac{4\cos^2 2\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}}{\dfrac{1}{1+\sin\theta}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\cos^2 2\theta\sin 2\theta\times(1+\sin\theta)}{\sin 3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\times 4\cos^2 2\theta(1+\sin\theta)\right)=\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}\text{이다.}$$

따라서 $a=\dfrac{8}{3}$이므로 $45a=120$이다.

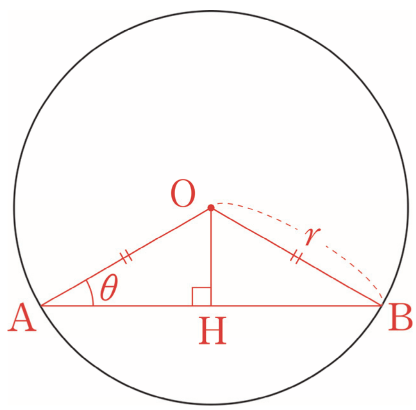
답은 120!!

3. 길이 동일 표시 및 이등변삼각형의 수직이등분선 표시



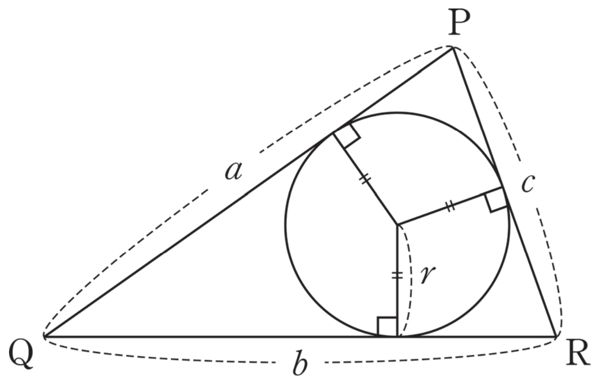
두 변의 길이가 서로 같다면 반드시 '같다'를 나타내는 표시를 해주자. 마음속으로만 생각하다가 문제를 못 풀 수 있다.

위 그림에서 $\triangle \mathrm{ABC}$는 **이등변삼각형**이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$를 그림에 꼭 표시하자. 더욱 중요한 것은 $\triangle \mathrm{ABC}$의 **수직이등분선 $\overline{\mathrm{AH}}$를 반드시 그어주어야 한다는 것이다.** 왜? **직각**이 껴있기 때문이다. 정삼각형, 이등변삼각형, 직각삼각형 등 특수한 삼각형이 나오는 경우가 많다. 특수한 삼각형에서 길이, 각 등을 구하려면 직각을 이용하는 것은 필수이다.

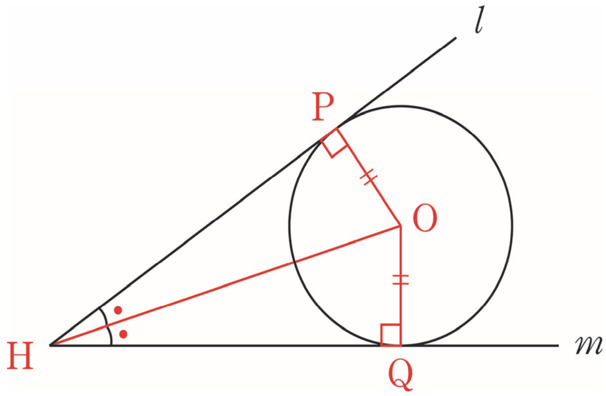


이등변삼각형의 수직이등분선이 제일 많이 활용되는 때는 원의 현의 길이를 구할 때이다. 위의 그림에서 현 AB의 길이를 구하기 위해서 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$의 길이가 반지름 r로 각각 같다는 점을 이용하여 이등변삼각형 OAB를 만든다. $\angle \mathrm{AOB}$의 수직이등분선 $\overline{\mathrm{OH}}$를 그어주자. $\angle \mathrm{OAB}=\theta$로 주어질 때 삼각비를 이용하면 현 AB의 길이는 $2r\cos\theta$라는 것을 알 수 있다.

4. 새 부리를 닮은 내접원 꼴

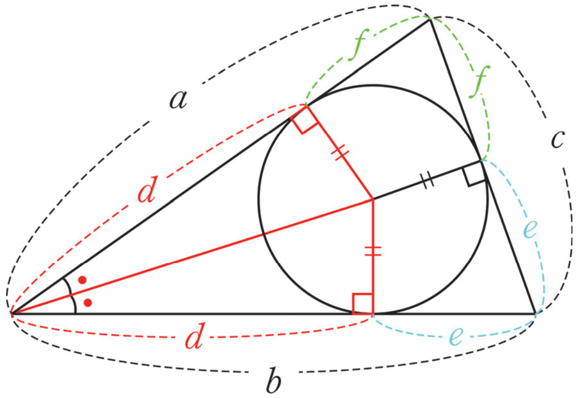


삼각형 전체와 **내접원**이 주어진다면 반사적으로 **내접원의 중심에서 접점을 잇고 직각을 표시**한다. 또한, **내접원의 중심에서 접점을 이을 때 생기는 선분**은 **모두 내접원의 반지름**이므로 **'같다'를 나타내는 표시**도 한다.

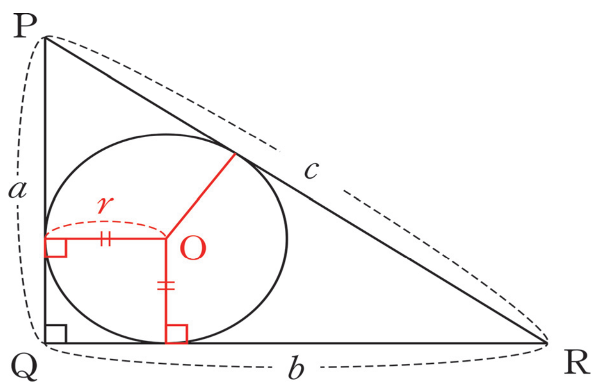


위의 그림은 두 직선이 원과 접할 때이다. **만약 원과 접하고 직선 l, 직선 m과 각각 만나도록 하는 임의의 직선 하나를 추가하면 내접원 꼴을 만들 수 있다.** 하지만 삼각형 전체와 내접원이 주어질 때와는 달리 **두 직선이 원과 접할 때는 의외로 원의 중심에서 접점을 이어 직각을 표시하지 않고 반지름이 같다는 표시를 안 하는 경우가 많다.** 이러면 $\triangle \mathrm{OHQ} \equiv \triangle \mathrm{OHP}$**를 발견하기 힘들어** 필요한 길이나 넓이를 구하는 데에 방해가 된다.

두 직선이 원과 접할 때도 위의 그림과 같이 꼭 표시해줬으면 하는 마음에서 위의 그림과 같은 꼴에 **'새 부리'**라는 이름을 붙여 주었다. 원을 앵무새의 눈, 원의 중심을 앵무새의 동공, 사각형 OPHQ를 앵무새의 부리라고 생각하면 된다. **앵무새의 부리를 완성하기 위해서는 $\overline{\mathrm{OH}}$를 그어주어야 하고** 이를 그어준다면 앵무새의 머리가 완성되고 $\triangle \mathrm{OHQ} \equiv \triangle \mathrm{OHP}$를 쉽게 발견할 수 있을 것이다.



d의 길이는? $d+e+f=\dfrac{a+b+c}{2}$, $e+f=c$이므로 $d=\dfrac{a+b-c}{2}$이다.



$\triangle$PQR이 직각삼각형일 때, 내접원의 반지름 r의 길이는?

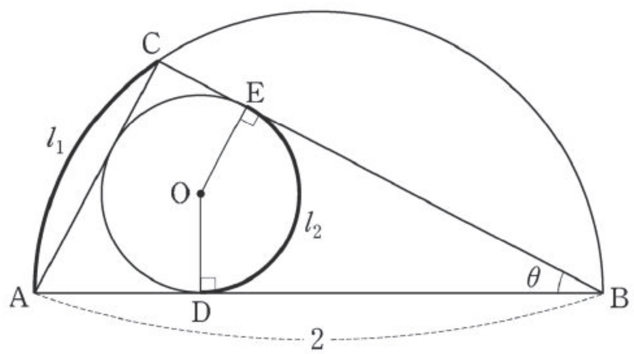
위에서 구한 방식으로 구하면 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$이다. 이전에 배웠던 내접원이 있을 때 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 이용하면 어떨까?

$\triangle$PQR의 넓이는 밑변×높이를 이용하면 $\dfrac{1}{2}ab$이다. 이는 $\triangle$POQ, $\triangle$QOR, $\triangle$POR 각각의 넓이의 합과 같아야 한다. $\triangle$POQ, $\triangle$QOR, $\triangle$POR의 밑변은 각각 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$이고 밑변의 길이는 각각 a, b, c이다. 이때 $\triangle$POQ, $\triangle$QOR, $\triangle$POR의 높이는 내접원의 반지름 r로 같다. 따라서 $\triangle$PQR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$이다. $\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$이므로 $r=\dfrac{ab}{a+b+c}$이다.

$r=\dfrac{a+b-c}{2}$와 $r=\dfrac{ab}{a+b+c}$를 비교하면 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$의 표현이 더 간단하기에 문제 풀기에 더 좋은 형태임을 알 수 있다.

예제(14) 08학년도 6월 평가원 27번

그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC = \theta$이고, 호 AC의 길이를 l_1, 호 DE의 길이를 l_2라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{l_1}{l_2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이다.) [3점]



① 1　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{2}{\pi}$　⑤ $\dfrac{3}{\pi}$

1. **반원의 중심 O′을 표시하자.**

$\overset{\frown}{AC}$**의 원주각은** $\angle ABC = \theta$ **이므로** $\overset{\frown}{AC}$**의 중심각** $\angle AO'C = 2\angle ABC = 2\theta$**이다.**

따라서 $l_1 = 2\theta$이다.

2. $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}$ **이므로 직각을 표시하자.**

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 2\sin\theta$, $\overline{BC} = 2\cos\theta$이므로 이전에 배웠듯이

내접원의 반지름 $r = \overline{OE} = \dfrac{2\sin\theta + 2\cos\theta - 2}{2} = \sin\theta + \cos\theta - 1$로 표현이 가능하다.

$\angle DOE = \pi - \theta$이므로 $l_2 = (\pi - \theta)(\sin\theta + \cos\theta - 1)$이다.

3. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{l_1}{l_2}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다.

0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

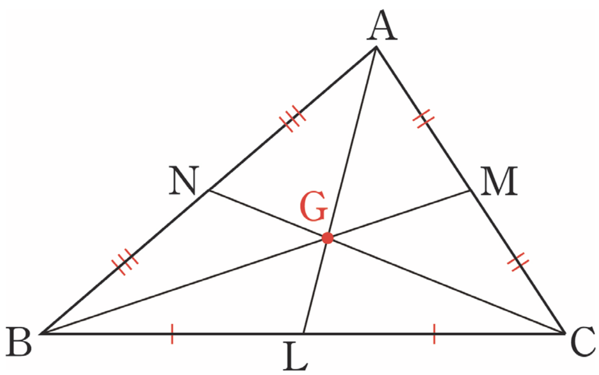
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{l_1}{l_2} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta}{(\pi - \theta)(\sin\theta + \cos\theta - 1)} = \frac{2}{\pi} \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta} - \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta}} = \frac{2}{\pi}$$ 이다.

답은 ④!!

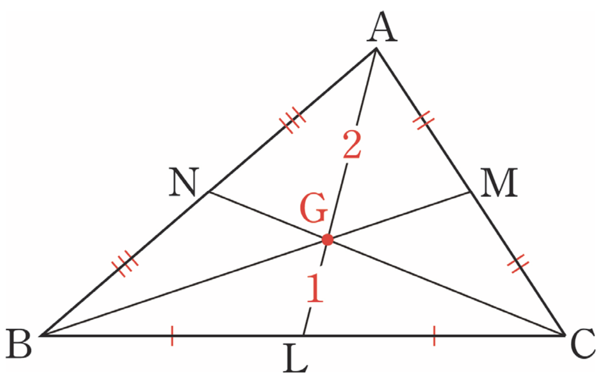
추가적 도형 성질

원과 특수한 삼각형을 제외한 중학교 도형을 완전히 잊은 경우가 있다. **무게중심, 외심, 각 이등분선, 원주각, 원에 내접하는 사각형, 원과 비례 관계 정도는 기억하자.** 또한, 원의 반지름, 중심각을 이용하여 원 위의 점의 좌표를 잡는 방법을 짚고 넘어가겠다.

1. 무게중심

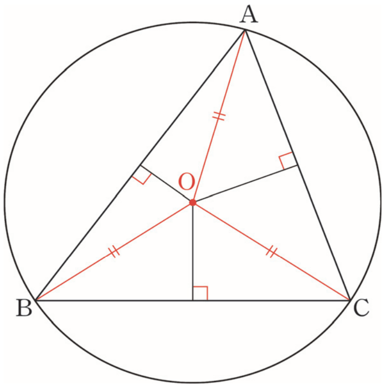


삼각형의 중선은 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 연결한 선을 뜻한다. 삼각형에는 세 개의 중선이 있는데,
이 세 개의 중선의 교점이 바로 무게중심이다.

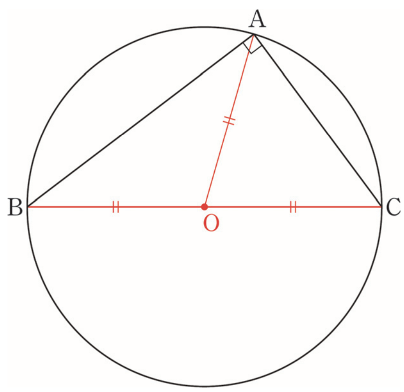


무게중심을 점 G라 하자. $\overline{AG}:\overline{GL}=2:1$**이다. 마찬가지로** $\overline{BG}:\overline{GM}=2:1$, $\overline{CG}:\overline{GN}=2:1$**이다.**
평가원에 기출을 풀기 위한 무게중심의 성질의 끝이다. 까먹지 말자.

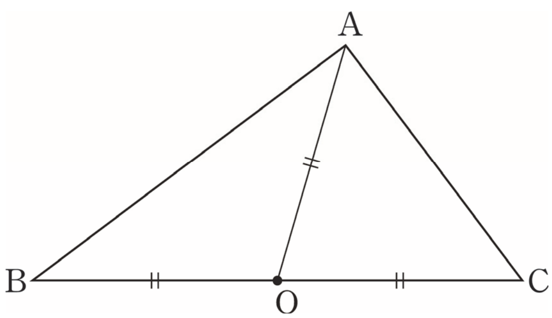
2. 외심

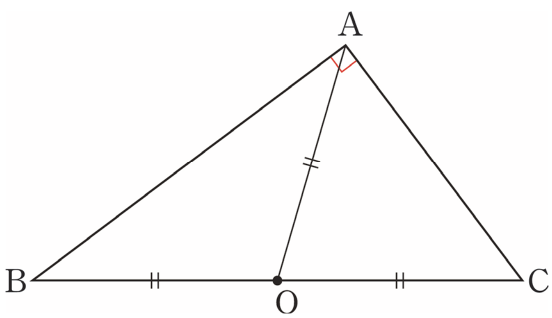


삼각형의 내심은 '새 부리를 닮은 내접원 꼴'을 다루면서 필요한 부분을 모두 다루었다. 삼각형 외심을 살펴보자.
삼각형에서 각 변의 수직이등분선의 교점을 외심이라 한다. 따라서 외심은 곧 삼각형의 외접원의 중심이다.
위 그림의 외심인 점 O에서 삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리는 같다.



직각삼각형의 외심의 위치는 일반적인 삼각형과 달리 특이하다.
$\overline{\mathrm{BC}}$**가 외접원의 지름이므로 직각삼각형** $\triangle \mathrm{ABC}$**의 외심은 빗변의 중점** O**이다.**

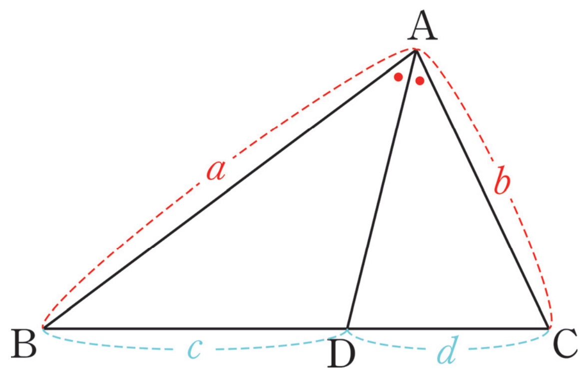




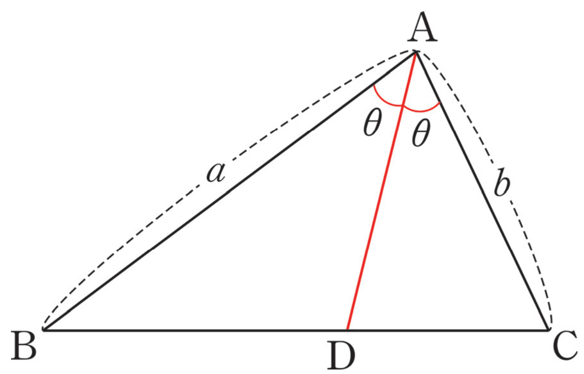
따라서 왼쪽과 같은 그림을 보면 **점** O**가 외심임을 인지하고 외접원을 떠올리며** $\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{2}$**임을 알아야 한다.**
이후 오른쪽 그림처럼 직각 표시를 해주자. 숨겨진 직각을 찾는 것은 중요한 과제이다.
평가원에 기출을 풀기 위한 외심의 성질의 끝이다. 까먹지 말자.

3. 각의 이등분선

각의 이등분선의 성질을 정리해보겠다.



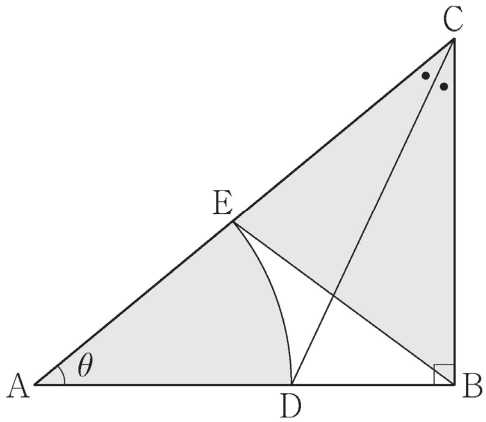
직선 AD**가** $\angle \mathrm{BAC}$**를 이등분하면** $a : b = c : d$**이다.**
평가원에 기출을 풀기 위한 각의 이등분선의 성질의 끝이다. 까먹지 말자.



$\overline{\mathrm{AD}}$ **길이를** a**,** b**,** θ**로 표현하면?** 각 이등분선의 성질을 쓰라고 낸 것 같은가? 사실 아니다.
이걸 각의 이등분선의 성질을 이용해 풀려면 코사인법칙을 이용해도 복잡하다.
넓이에서 $\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{ADC}$**를 이용**하면 어떨까? $\triangle \mathrm{ABD}, \triangle \mathrm{ADC}$**의 공통변이** $\overline{\mathrm{AD}}$**이므로** $\overline{\mathrm{AD}}$ 길이를 a, b, θ로 표현할 수 있을 것 같다.
$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin 2\theta$, $\triangle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2}a\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta$, $\triangle \mathrm{ADC} = \frac{1}{2}b\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta$이고
$\frac{1}{2}ab\sin 2\theta = \frac{1}{2}a\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta + \frac{1}{2}b\overline{\mathrm{AD}}\sin\theta$이므로 정리하면 $\overline{\mathrm{AD}} = \frac{ab\sin 2\theta}{(a+b)\sin\theta}$이다.

예제(15) 19학년도 수능 18번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle \mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle$C를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle \mathrm{A}=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{4}$　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{3}{4}$　　④ 1　　⑤ $\dfrac{5}{4}$

1. 각 이등분선 성질을 이용하는 데 필요한 길이를 표시하자.

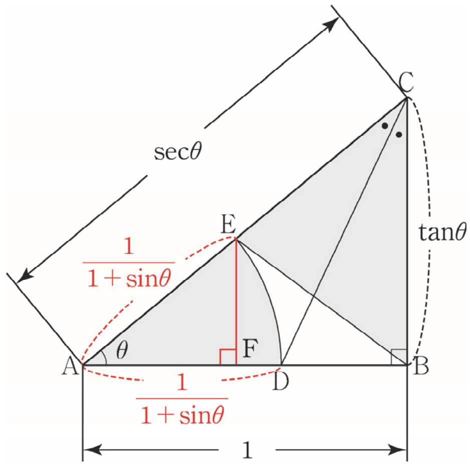
$\overline{AB}=1$임을 알고 있으므로 삼각비를 이용해

$\overline{BC}=\tan\theta$, $\overline{AC}=\sec\theta$임을 쉽게 구할 수 있다.

각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{BC}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$이다.



2. $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\times\theta$이고 $T(\theta)$는 $\triangle$BCE 넓이이므로 $\triangle$ABC 넓이에서 $\triangle$ABE 넓이를 빼서 구할 수 있다. $\triangle$ABC 넓이는 $\dfrac{1}{2}\tan\theta$이다.

$\triangle$ABE 넓이는 **밑변을 $\overline{AB}$로 두고 높이를** $\overline{EF}$로 두면 구할 수 있다. $\overline{EF}$의 길이는

$\overline{AE}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$이므로 삼각비를 이용하면 $\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$이다.

따라서 $\triangle$ABE 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$이고, $T(\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\tan\theta-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)$이다.

0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)^4\theta^2}{\dfrac{1}{2}\dfrac{\tan\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)}{1+\sin\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2}{2\tan\theta(1+\sin\theta)^3(1+\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\theta}{2\tan\theta}\times\frac{1}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}\right\}$$

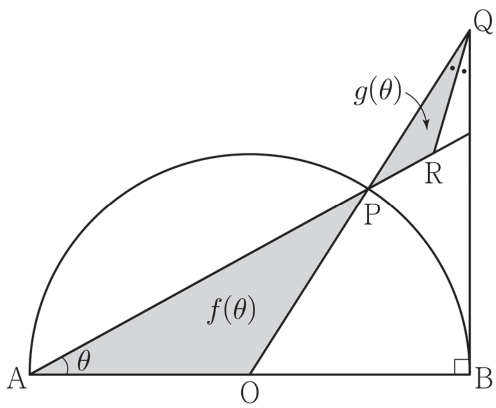
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\theta}{2\tan\theta}\times\frac{1}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\theta}{2\tan\theta}\times\frac{1}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\theta\times\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}}\right\}$$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{1+0\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$이므로 **답은** ②!!

예제(16) 22학년도 6월 평가원 미적분 28번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{OAP} = \theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$)[4점]



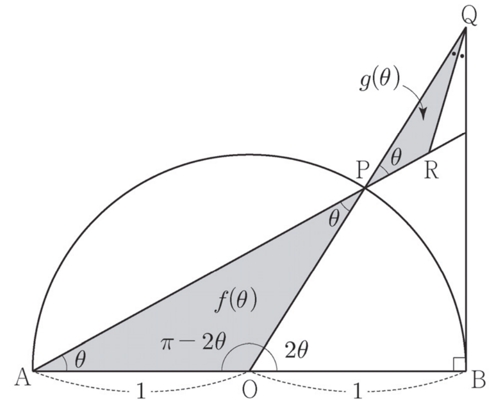
① 2　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3　④ $\dfrac{7}{2}$　⑤ 4

1. $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}=1$,

$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\theta$,

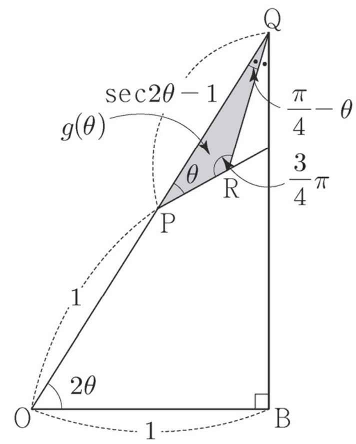
$\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\theta$ 이므로

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin(\pi-2\theta)=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$ 이다.



2. $\angle\mathrm{POB}=2\theta$ 에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sec2\theta$ 이고,

$\overline{\mathrm{OP}}=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sec2\theta-1$ 이다.



이때, $\angle\mathrm{PQB}=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$ 에서 $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ 이므로

$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{3}{4}\pi$ 이다.

삼각형 PRQ 에서 사인법칙을 활용하자.

$\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\times\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}=(\sec2\theta-1)(\cos\theta-\sin\theta)$ 이다.

따라서 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}(\sec2\theta-1)^2\times(\cos\theta-\sin\theta)\times\sin\theta$ 이다.

3. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리해가며 계산식을 정리하겠다.

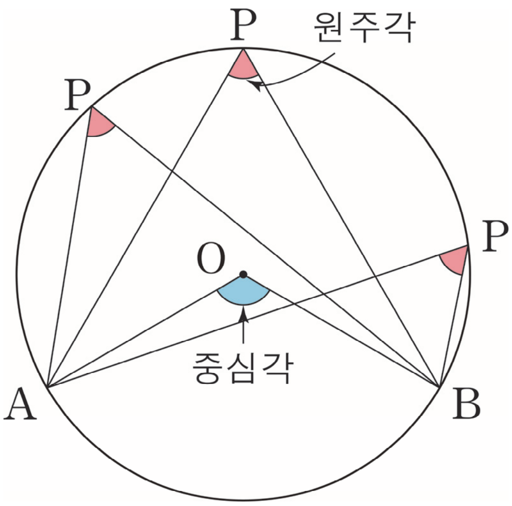
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}(\sec2\theta-1)^2\times(\cos\theta-\sin\theta)\times\sin\theta}{\theta^4\times\frac{1}{2}\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{(\sec2\theta-1)^2}{\theta^4}\times\frac{(\cos\theta-\sin\theta)\times\sin\theta}{\sin2\theta}\right\}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sec2\theta-1}{\theta^2}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

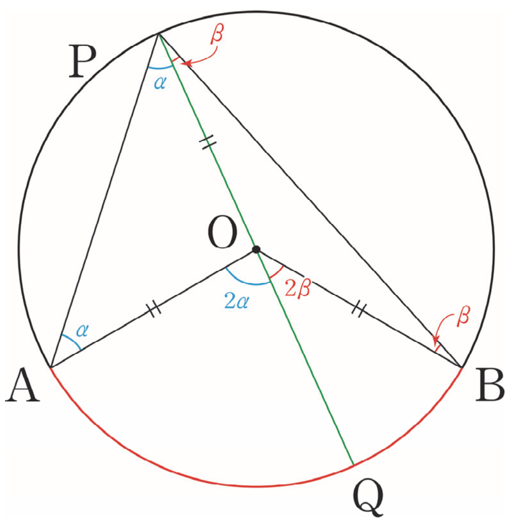
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta\times\theta^2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\times2^2\right)^2\times\frac{1}{2}=2$$ 이다.

답은 ①!!

◆ 4. 원주각



호 AB에 대한 중심각은 $\angle$AOB이고 호 AB에 대한 원주각은 $\angle$APB이다. 점 P가 원 위에 어디에 있든 **호 AB에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배**이다. 증명은 아래와 같다.



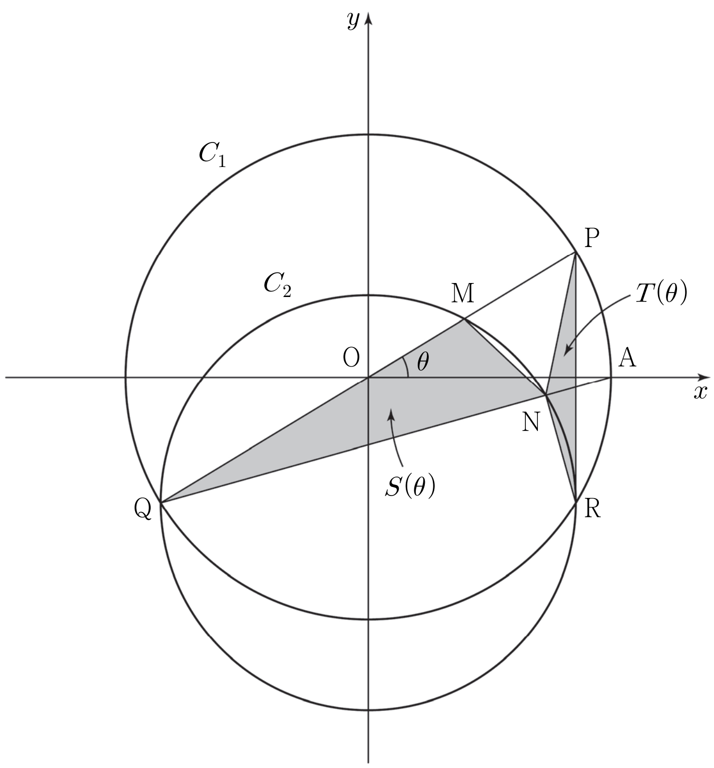
원의 반지름 길이는 모두 같으므로 $\triangle$OAP, $\triangle$OBP는 이등변삼각형이다. $\angle$OPA의 크기를 α로 두고 $\angle$OPB의 크기를 β로 두자. 호 AB에 대한 원주각 $\angle$APB의 크기는 $\alpha+\beta$이다.
$\triangle$OAP의 외각 $\angle$AOQ의 크기는 2α이고 $\triangle$OBP의 외각 $\angle$BOQ의 크기는 2β이다.
호 AB에 대한 중심각 $\angle$AOB의 크기는 $2\alpha+2\beta$이므로 호 AB에 대한 원주각 $\angle$APB의 크기의 2배이다.

원주각이 기억 안 난다면 원의 중심과 원 위의 서로 다른 두 점을 이어 만든 이등변삼각형을 이용해도 되지만 긋는 반지름의 수가 너무 많아지면 그림을 알아보기가 힘들다. **웬만하면 원주각을 바로 알아보고 필요한 각을 구하자.**

예제(17) 18년 7월 교육청 21번

그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O$(0,\ 0)$이고 점 A$(1,\ 0)$을 지나는 원 C_1 위의 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 선분 QR를 지름으로 하는 원 C_2와 두 선분 PQ, AQ와의 교점을 각각 M, N이라 하자. $\angle$POA$=\theta$라 할 때, 두 삼각형 MQN, PNR의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\theta^2 \times S(\theta)}{T(\theta)}$ 의 값은? [4점]



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

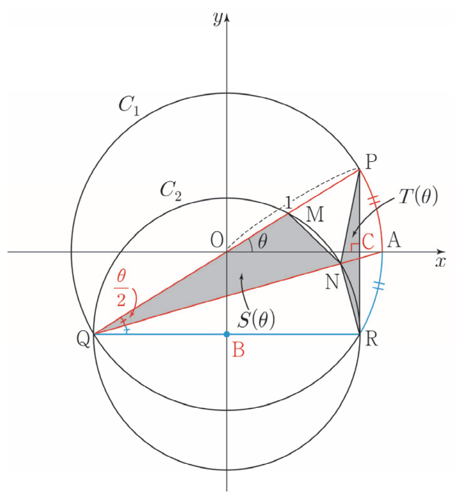
1. 점 P 의 x축 위로의 수선의 발을 점 C라고 하자. 점 P를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이 R이므로

$\angle\mathrm{PCO}=\frac{\pi}{2}$이다.

$\angle\mathrm{PCO}$**에 직각 표시**를 하자. **원 C_2의 지름 $\overline{\mathrm{QR}}$을 그어주고 원의 중심 B를 꼭 찍어주자.**

원 C_1의 반지름을 알고 있으니 $\overline{\mathrm{PR}}=2\sin\theta$임이 바로 보인다. $T(\theta)$를 구하기 위해서는 밑변 $\overline{\mathrm{PR}}$에 대한 높이만을 알아내면 된다.

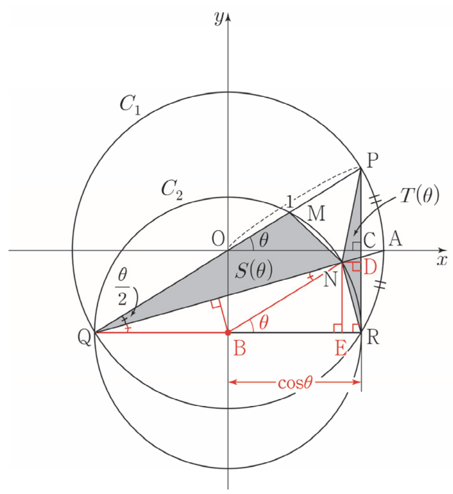
점 P를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이 R이므로 $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=\overset{\frown}{\mathrm{AR}}$ 이고 $\angle\mathrm{PQA}$는 중심각 $\angle\mathrm{POA}$의 원주각이므로 $\angle\mathrm{PQA}=\angle\mathrm{AQR}=\frac{\theta}{2}$ 이다.



2. $\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle\mathrm{PRQ}$**에도 직각 표시**를 하자.

$T(\theta)$를 구하기 위해 **밑변 $\overline{\mathrm{PR}}$에 대한 높이가 필요하므로 점 N에서 $\overline{\mathrm{PR}}$로 수선의 발 D를 떨어뜨리고** 직각 표시를 한다. $S(\theta)$를 구하기 위해서 $\overline{\mathrm{QN}}$ **의 길이도 필요하므로 이등변삼각형 BQN을 만들고 수직이등분선**을 그어준다.

원 C_2의 반지름의 길이를 구해보자. $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 삼각비를 이용하면 $\overline{\mathrm{OC}}=\cos\theta$이다. $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{BR}}$이므로 원 C_2의 반지름은 $\cos\theta$이다. $\overline{\mathrm{BQ}}=\cos\theta$이므로 삼각비를 이용하면 $\overline{\mathrm{QN}}=2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}$ 이다. 이제 $S(\theta)$를 위해서 $\overline{\mathrm{QM}}$의 길이만 알아내면 된다.



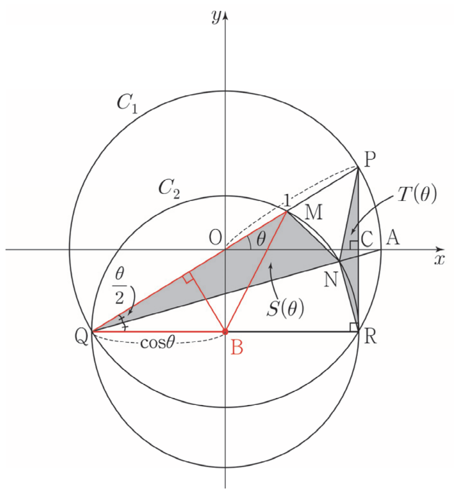
한편 $\overline{\mathrm{ND}}$를 위해 **점 N에서 $\overline{\mathrm{QR}}$로 수선의 발 E를 떨어뜨렸다.** $\overline{\mathrm{BN}}=\cos\theta$이므로 삼각비를 이용하면 $\overline{\mathrm{BE}}=\cos^2\theta$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{ER}}$의 길이는 $\cos\theta-\cos^2\theta$이고 $\overline{\mathrm{ND}}=\overline{\mathrm{ER}}$이므로

$\overline{\mathrm{ND}}=\cos\theta-\cos^2\theta=2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$이다.

따라서 $T(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$ 이다.

※ 삼각함수 2배각 공식에서 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$이므로 $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$이다.

3. $\overline{\mathrm{QM}}$의 길이를 구하기 위해 이등변삼각형 BQM을 만들고 수직이등분선을 그어준다.



$\overline{\mathrm{BQ}}=\cos\theta$이므로 삼각비를 이용하면 $\overline{\mathrm{QM}}=2\cos^2\theta$이다.

따라서 $S(\theta)$는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QM}}\times\overline{\mathrm{QN}}\times\sin\frac{\theta}{2}$ 이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\cos^2\theta\times 2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}=2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\cos^3\theta\sin\theta$이다.

※ 삼각함수 2배각 공식에서 $\sin 2x=2\cos x\sin x$이므로 $2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\theta$이다.

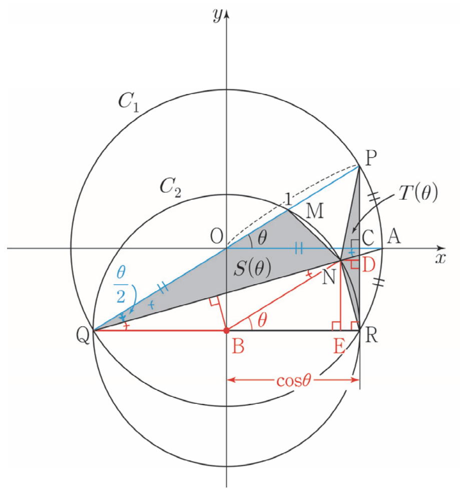
4. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)}$는 $\frac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 **반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 3이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리**해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times\cos^3\theta\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\cos^2\theta\times\frac{\theta^2\sin\theta}{2\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$=1\times 2=2$이다.

답은 ②!!

※ 원주각을 이용하지 않고 $\angle\mathrm{PQA} = \angle\mathrm{AQR} = \dfrac{\theta}{2}$ 을 구하는 방법은 다음과 같다.



$\triangle\mathrm{OAQ}$는 **이등변삼각형**이고 외각 $\angle\mathrm{POA}$이 θ이므로 $\angle\mathrm{PQA} = \dfrac{\theta}{2}$ 이다.

직선 OA**와 직선** QR**이 평행**이므로 $\angle\mathrm{POA} = \angle\mathrm{PQR} = \theta$이다. 따라서 $\angle\mathrm{AQR} = \dfrac{\theta}{2}$ 이다.

그래도 **웬만하면 원주각을 바로 알아보고 필요한 각을 구하자.**

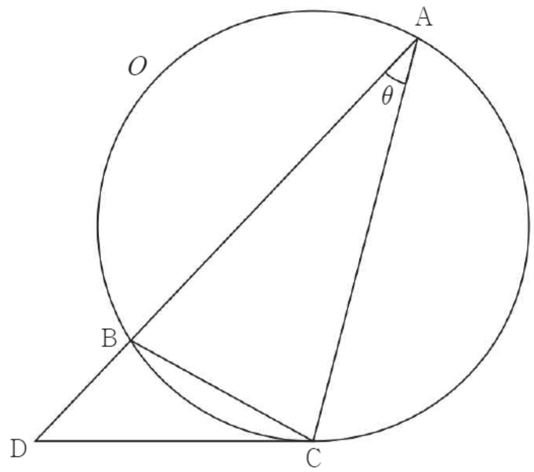
comment

그림이 불가피하게 복잡해질 때는 그림을 필요한 만큼 새로 그려주자. 새로 그리지 않고 같은 그림을 계속 이용하면 실수가 자주 나온다.

$\dfrac{0}{0}$ **꼴의 극한 계산 전에 분모, 분자의 0의 차수를 꼭 확인**하자. 극한 계산을 할 때 **0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 먼저 분리**하여 계산하면 편하다.

예제(18) 21학년도 사관 28번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$) [4점]

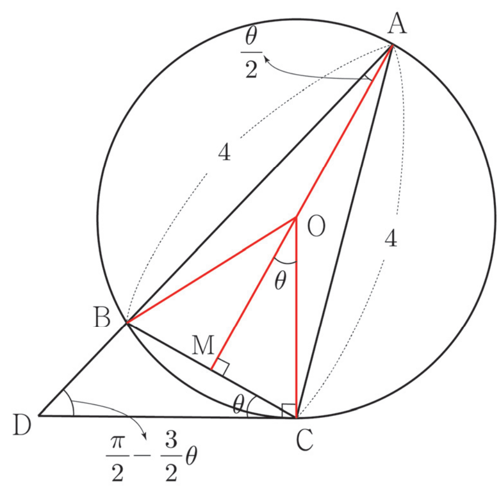


1. 원에 내접하는 삼각형이다. **원의 중심 O를 표시하자.**

$\overline{\mathrm{CD}}$**와 원이 접하므로** $\overline{\mathrm{OC}}$**를 긋고 직각 표시를 하자.**

$\triangle\mathrm{ABC}$**가 이등변삼각형이므로 점 A에서** $\overline{\mathrm{BC}}$**위로의 수선을 긋고 그 수선의 발을 M이라 하자.**

$\triangle\mathrm{OBC}$**도 이등변삼각형이므로** $\overline{\mathrm{OB}}$**를 그어주자.** 이후 알아낼 수 있는 각과 길이를 표시하자.



$\triangle\mathrm{AOB}$에서 $\overline{\mathrm{OB}}=2\sec\frac{\theta}{2}$이다.

중심각의 크기는 원주각의 크기의 두 배이므로 $\angle\mathrm{BOM}=\theta$, $\overline{\mathrm{BM}}=2\sec\frac{\theta}{2}\sin\theta$,

$\overline{\mathrm{BC}}=4\sec\frac{\theta}{2}\sin\theta$이다.

$\angle\mathrm{BOM}=\angle\mathrm{COM}=\theta$에서 $\angle\mathrm{OCM}=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\angle\mathrm{BCD}=\theta$이고,

$\angle\mathrm{CBD}=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$이다.

2. 사인법칙을 활용하여 $\overline{\mathrm{CD}}$를 구하자.

$\triangle\mathrm{ACD}$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)}=\dfrac{4}{\cos\frac{3}{2}\theta}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=4\sin\theta\sec\frac{3}{2}\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=8\sin^3\theta\sec\frac{\theta}{2}\sec\frac{3}{2}\theta$이다.

3. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$는 $\dfrac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 **반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 3이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리**해가며 계산식을 정리하겠다.

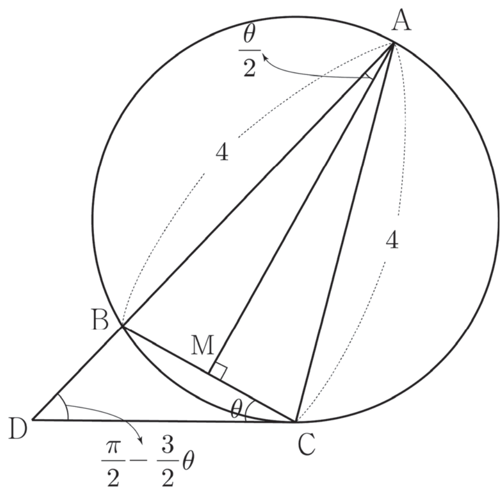
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^3\theta\sec\frac{\theta}{2}\sec\frac{3}{2}\theta}{\theta^3}=8\text{이다.}$$

답은 8!!

※ 다른 풀이

1. $S(\theta)$를 구하기 위해 $\triangle\mathrm{BCD}$의 넓이를 구하자.

점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\angle\mathrm{BAM}=\dfrac{\theta}{2}$이다.



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BM}}=4\sin\dfrac{\theta}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=8\sin\dfrac{\theta}{2}$이다.

원에서 접선과 현이 이루는 각의 크기는 원주각의 크기와 같으므로 $\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BAC}=\theta$**이다.**

$\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta$이다.

2. 사인법칙을 활용하여 $\overline{\mathrm{CD}}$를 구하자.

$\triangle\mathrm{BCD}$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta\right)}$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{8\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}$,

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{8\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}=4\sin\theta\sec\dfrac{3}{2}\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=16\sin\dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta\sec\dfrac{3}{2}\theta$이다.

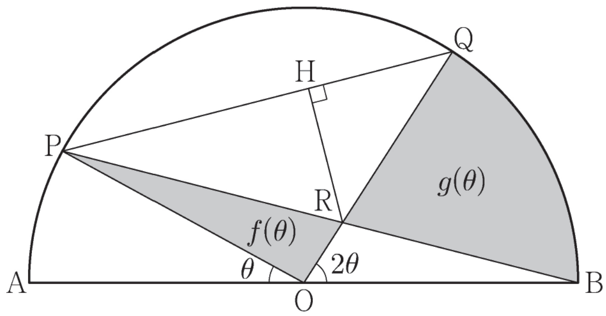
3. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$는 $\dfrac{0}{0}$ 꼴이므로 계산하기 전에 **반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 3이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리**해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{16\sin\dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta\sec\dfrac{3}{2}\theta}{\theta^3}=8\text{이다.}$$

답은 8!!

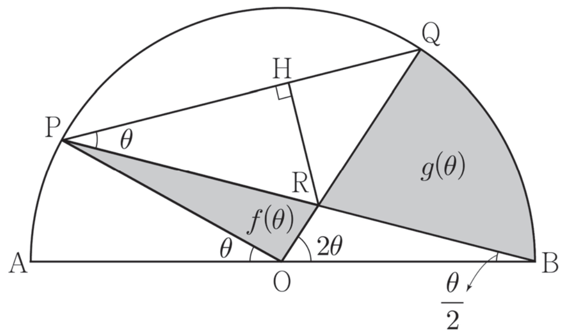
예제(19) 21학년도 9월 평가원 28번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{POA}=\theta$, $\angle \mathrm{QOB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. $\triangle\mathrm{POB}$ 는 이등변삼각형이다. $\angle\mathrm{POB}=\pi-\theta$ 에서 $\angle\mathrm{OPB}=\angle\mathrm{OBP}=\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

$\triangle\mathrm{POQ}$ 는 이등변삼각형이다. **원주각의 성질에 의하여** $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOQ}=\theta$ **이다.**



2. $\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{PR}}\sin\theta$ 에서 $\overline{\mathrm{PR}}$ 를 구하자. $\triangle\mathrm{POR}$ 에서 사인법칙을 활용하자.

$\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin(\angle\mathrm{POR})}=\dfrac{\overline{\mathrm{PO}}}{\sin(\angle\mathrm{PRO})}=\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin(\angle\mathrm{OPR})}$ 에서

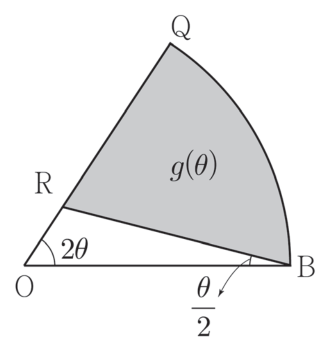
$\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{1}{\sin\frac{5}{2}\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{\sin3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$, $\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{PR}}\sin\theta=\dfrac{\sin3\theta\sin\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$ 이다.

3. $f(\theta)$ 를 구하기 위해 $\triangle\mathrm{POR}$ 의 넓이를 구하자.

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PO}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\sin(\angle\mathrm{OPR})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

4. $g(\theta)$ 를 구하기 위해 도형 QRB 를 살펴보자.



도형 QRB 의 넓이를 직접적으로 구하긴 어려워 보인다.
부채꼴 BOQ 의 넓이에서 삼각형 ORB 의 넓이를 빼서 구하자.

부채꼴 BOQ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$ 이고,

삼각형 ORB 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\angle\mathrm{ROB})$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\times\sin2\theta$ 이므로 $g(\theta)=\theta-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}\sin2\theta}{2\sin\frac{5}{2}\theta}$ 이다.

5. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}$ 는 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 계산하기 전에 **반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 1이다. 0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리**해가며 계산식을 정리하겠다.

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\dfrac{\sin 3\theta \sin \frac{\theta}{2}}{2\sin \frac{5}{2}\theta} + \theta - \dfrac{\sin \frac{\theta}{2} \sin 2\theta}{2\sin \frac{5}{2}\theta}}{\dfrac{\sin 3\theta \sin \theta}{\sin \frac{5}{2}\theta}} = \frac{\dfrac{3 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{5}{2}} + 1 - \dfrac{\frac{1}{2} \times 2}{2 \times \frac{5}{2}}}{\dfrac{3}{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} + 1 - \frac{1}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{3 + 10 - 2}{12} = \frac{11}{12}$$ 이다.

따라서 $p = 12$, $q = 11$ 이므로 $p + q = 23$

답은 23!!

comment

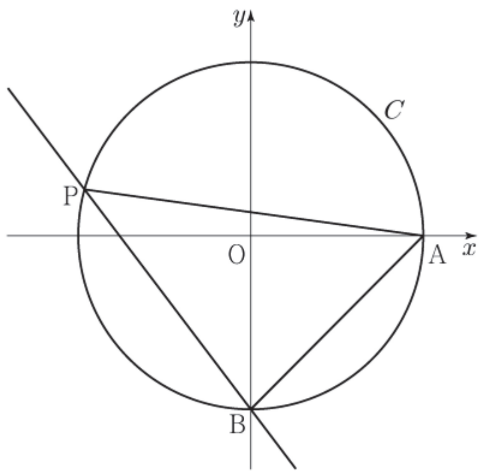
$\triangle \mathrm{OBR}$을 $h(\theta)$로 두어 $f(\theta)+g(\theta)=\{f(\theta)+h(\theta)\}+\{g(\theta)+h(\theta)\}-2h(\theta)$로 풀어도 좋다.

$\triangle \mathrm{OBP}$의 넓이는 $f(\theta)+h(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$이고, 부채꼴 OBQ의 넓이는 $g(\theta)+h(\theta)=\theta$이다.

예제(20) 22학년도 9월 평가원 미적분 28번

좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2 인 원 C 와 두 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, -2)$ 가 있다. 원 C 위의 있고 x 좌표가 음수인 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ 라 하자. 점 $\mathrm{Q}(0, 2\cos\theta)$ 에서 직선 BP 에 내린 수선의 발을 R 라 하고, 두 점 P 와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$ 라 할 때,

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\, d\theta$ 의 값은? [4점]



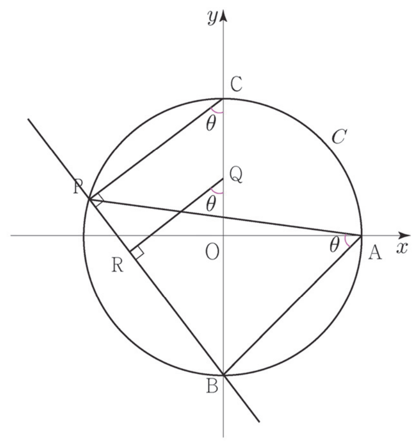
① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$　② $\sqrt{3}-1$　③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$　④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$　⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

1. 원 C가 y축과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자.

호 BP의 원주각 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$ **이고**

$\angle \mathrm{PCB} = \theta$ **역시 호 BP의 원주각이므로**

$\angle \mathrm{PCB} = \theta$ **이다.**



각 CPB가 지름에 대한 원주각이므로 $\angle \mathrm{CPB} = \dfrac{\pi}{2}$ 이고

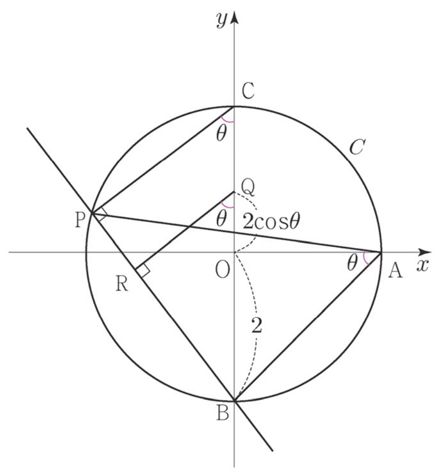
점 Q의 직선 BP 위로의 수선의 발이 R이므로

$\angle \mathrm{QRB} = \dfrac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 $\angle \mathrm{PCB} = \angle \mathrm{RQB}$ ($\because$ 동위각)이다.

$f(\theta) = \overline{\mathrm{PB}} - \overline{\mathrm{RB}}$ 이므로 두 선분 PB, RB의 길이를 구하자.

2. 직각삼각형 PBC에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 4$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = 4\sin\theta$ 이고 직각삼각형 RBQ에서 $\overline{\mathrm{BQ}} = 2 + 2\cos\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{RB}} = (2 + 2\cos\theta)\sin\theta$ 이다.



따라서 $f(\theta) = 4\sin\theta - (2 + 2\cos\theta)\sin\theta = 2\sin\theta(1 - \cos\theta)$ 이다.

3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \{2\sin\theta(1-\cos\theta)\}d\theta$ 를 계산하기 위하여 $\cos\theta = t$ 로 치환하면

$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ 이고 $\sin\theta d\theta = -dt$ 이므로

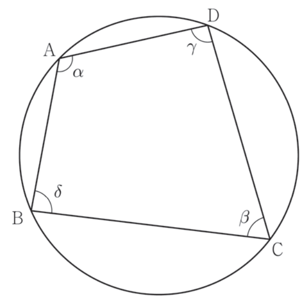
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \{2\sin\theta(1-\cos\theta)\}d\theta = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} 2(1-t)(-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (2-2t)dt$$

$$= \Big[2t - t^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$ 이다.

답은 ①!!

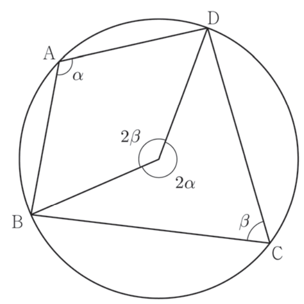
5. 원에 내접하는 사각형

사인법칙, 코사인법칙과 결합하여 종종 기출에 등장하는 도형이 있다. 바로 원에 내접하는 사각형이다.
이와 관련된 문제를 풀기 위해 원에 내접하는 사각형의 성질 하나 정도만 알면 된다.



바로 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 합은 180° **라는 점이다.**
위 그림에서 $\alpha+\beta=180^\circ$, $\gamma+\delta=180^\circ$ 이다.

증명은 다음과 같다.



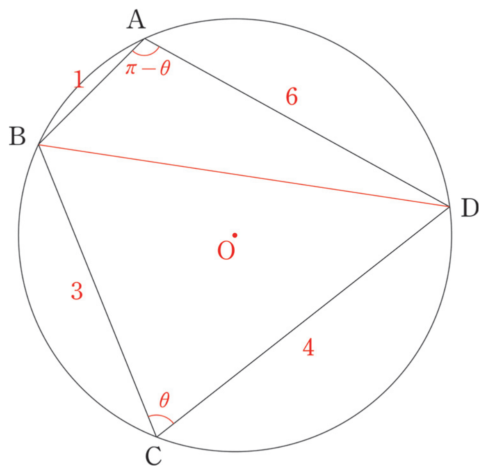
원의 중심 O를 먼저 표시하자. $\angle\mathrm{BAD}$의 크기를 α로 두고 $\angle\mathrm{BCD}$의 크기를 β로 두자.
$\angle\mathrm{BAD}$는 호 BCD에 대한 원주각이므로 호 BCD의 중심각인 $\angle\mathrm{BOD}$의 크기는 2α이다.
$\angle\mathrm{BCD}$는 호 BAD에 대한 원주각이므로 호 BAD의 중심각인 $\angle\mathrm{BCD}$의 크기는 2β이다.
$2\alpha+2\beta=360^\circ$ 이므로 $\alpha+\beta=180^\circ$ 이다.
따라서 **원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각이 합은** 180° **이다.**

예제(21) 15학년도 경찰대 5번

원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DA}=6$이다. 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

1. 조건에 맞는 그림을 그려주자.



원의 중심 O**를 꼭 찍어주자.** 사각형 ABCD의 넓이를 구하기 위해서는 삼각형 BCD와 삼각형 ABD의 넓이를 각각 구한 후 합하면 된다. 이러기 위해서 **선분** BD**를 그어 주자.**

$\angle\mathrm{BCD}$의 크기를 θ로 두면 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이기에
$\angle\mathrm{BCD}$의 대각인 $\angle\mathrm{BAD}$의 크기는 $\pi-\theta$이다.

2. 선분 BD는 삼각형 BCD와 삼각형 ABD의 공통변이다.

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+4^2-24\cos\theta$로 표현할 수 있다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{BD}}^2=1^2+6^2-12\cos(\pi-\theta)$로 표현할 수 있다.

$\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+4^2-24\cos\theta\equiv 1^2+6^2-12\cos(\pi-\theta)$이므로 $25-24\cos\theta=37+12\cos\theta$이다.

이를 정리하면 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$, $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

3. 삼각형 BCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\sin\theta=6\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$이고,

삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times6\times\sin(\pi-\theta)=3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$이므로

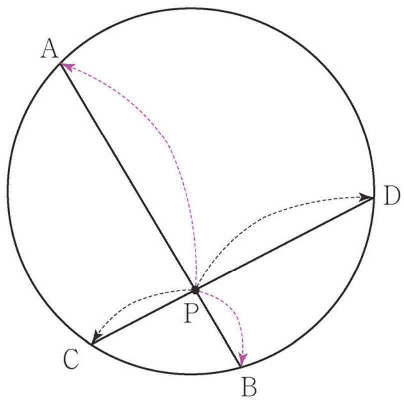
사각형 ABCD의 넓이는 $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$이다.

답은 ②!!

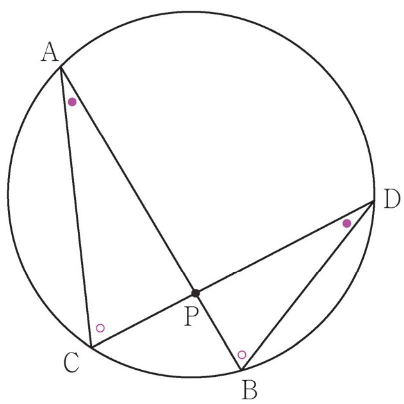
6. 원과 비례

원에서 제일 중요한 것은 다름 아닌 중심과 반지름이다. **원과 직선이 등장할 때는 앞서 설명했던 원의 중심, 수직이등분선, 원과 접점을 잇는 직선 등을 확실히 그어준다**면 문제를 풀어내는 데에 전혀 지장이 없을 것이다. 다만, 원과 비례와 관련된 몇몇 공식을 기억해두면 관련 문항을 풀기에 수월하기에 소개하도록 하겠다.

(1) 두 현과 교점

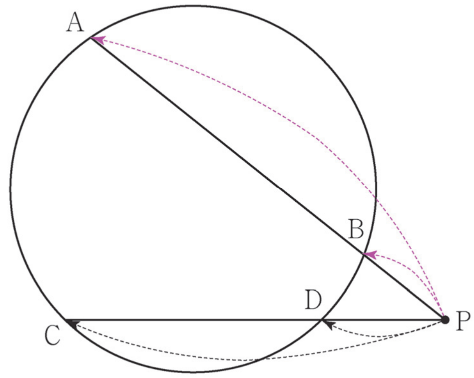


두 현 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$의 교점을 점 P라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{PD}}$가 성립한다. 증명은 다음과 같다.

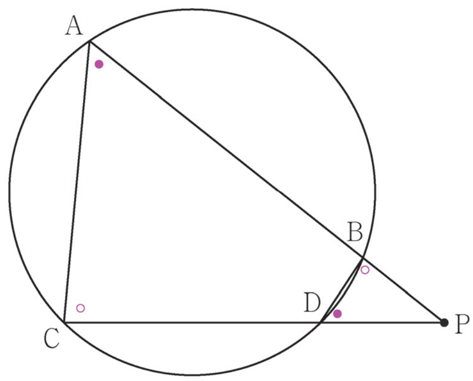


$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$ ($\because$ 호 BC의 원주각), $\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$ ($\because$ 호 BC의 원주각)이므로
$\triangle\mathrm{PAC}$, $\triangle\mathrm{PDB}$는 AA 닮음이다. $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{PD}}$이다.

(2) 두 할선과 교점



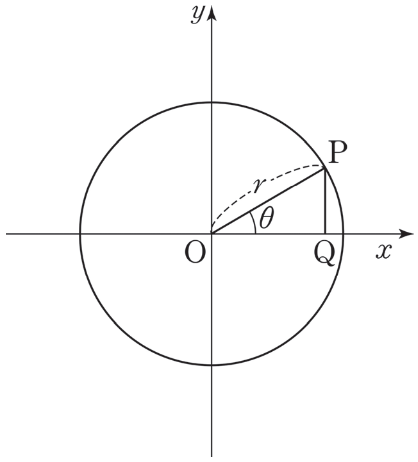
두 할선 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 교점을 점 P라 하자. $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$가 성립한다. 증명은 다음과 같다.



사각형 ABCD는 원에 내접하므로 $\angle CAB+\angle CDB=\pi$, $\angle ACD+\angle ABD=\pi$이다.
$\angle PAC=\angle PDB$, $\angle PAC=\angle PDB$이므로 $\triangle PAC$, $\triangle PDB$는 AA 닮음이다.
$\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PC}:\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이다.

7. 원 위의 점 좌표 잡기

문제에서 도형적 요소를 발견하기 힘들거나 많은 생각 없이 마무리하고 싶을 때 좌표를 이용하면 좋다.

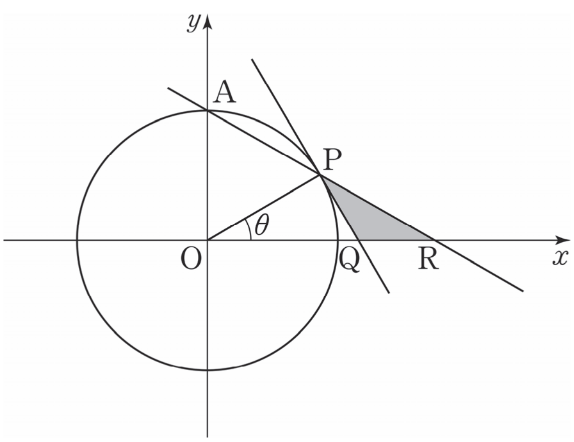


$\triangle$ OPQ에서 $\overline{\mathrm{OP}}=r$이므로 삼각비를 이용해 점 P의 좌표를 나타낼 수 있다.

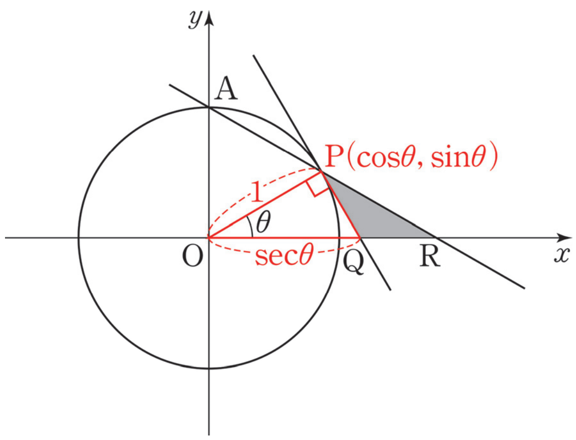
원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 **점 P의 좌표는 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$**이다. θ의 값에 상관없이 항상 성립한다.

예제(22) 11학년도 6월 평가원 30번

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A$(0, 1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle$QOP $=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



1. 직선 PQ는 **원의 접선**이므로 $\angle \mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{2}$이다. 다른 걸 다 제쳐두고 **직각 표시**부터 하자. 평가원에서 친절히 원을 좌표축 위에 올려놓았으므로 점 P의 좌표도 잡아주자.



점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다. $\triangle \mathrm{OPQ}$는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로 삼각비를 이용하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sec\theta$인 것을 쉽게 찾아낼 수 있다. 점 Q의 좌표는 $(\sec\theta, 0)$이다.

삼각형 PQR의 넓이 $S(\theta)$를 구하기 위해서는 **밑변을 $\overline{\mathrm{QR}}$로 둘 때 높이가** $\sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이만 구하면 된다. 점 Q의 좌표는 이미 아니까 점 R의 좌표만 구하면 된다.

직선 AP의 방정식은 $y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$ 이므로 x 절편은 $x=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ 이다.

따라서 점 R의 좌표는 $\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}, 0\right)$ 이다.

2. $S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)\sin\theta=\frac{1}{2}\tan\theta\sin\theta$ 이다.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$는 $\frac{0}{0}$꼴이므로 계산하기 전에 **반드시 0의 차수를 확인하자. 분모, 분자의 0의 차수가 2** 이다. **0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 분리**해가며 계산식을 정리하겠다.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta\sin\theta}{2\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{1}{2}$ 이므로 $100\alpha=50$이다.

답은 50!!

comment

원 위의 점의 좌표를 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$로 잡아 쉽게 풀자. $\frac{0}{0}$**꼴의 극한 계산 전에 분모, 분자의 0의 차수를 꼭 확인**하자. 극한 계산을 할 때 **0이 아닌 상수로 수렴하는 부분을 먼저 분리**하여 계산하면 편하다.