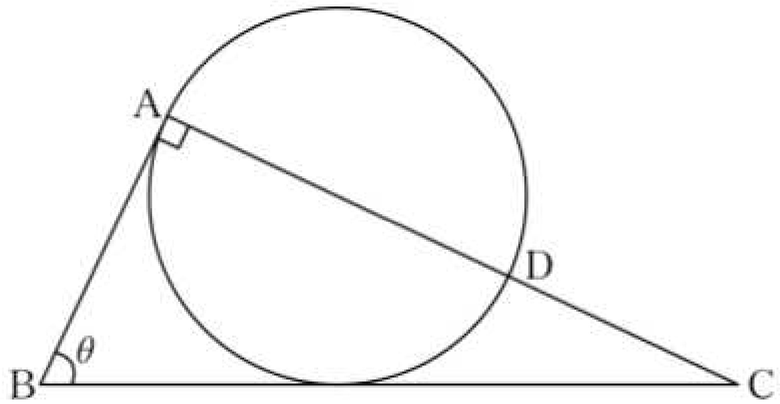
2. 테일러 급수와 삼각함수 도형 극한

1편에서는 테일러 급수가 무엇인지에 대하여 알아보았다. 이번 편에서는 테일러 급수가 삼각함수 도형 극한(이하 삼도극) 문항에서 어떻게 활용될 수 있는지 알아보도록 하겠다. 다만, 이 글에서는 기본적인 근사에 대해 어느정도 알고 있음을 전제로 한다.

1. 식 정리에서의 테일러 급수와 활용
가끔씩 반각, 배각과 덧셈, 뺄셈이 엮여있어 배각공식 등을 사용해야 계산할 수 있는 문항이 등장한다. (혹은 그렇게 하지 않아도 되는 방법이 있지만 시험장에서 보이지 않을 수 있다.) 이 파트는 1편의 극한식 계산 예제를 조금 더 심화해서 다룬다고 생각해도 좋다.

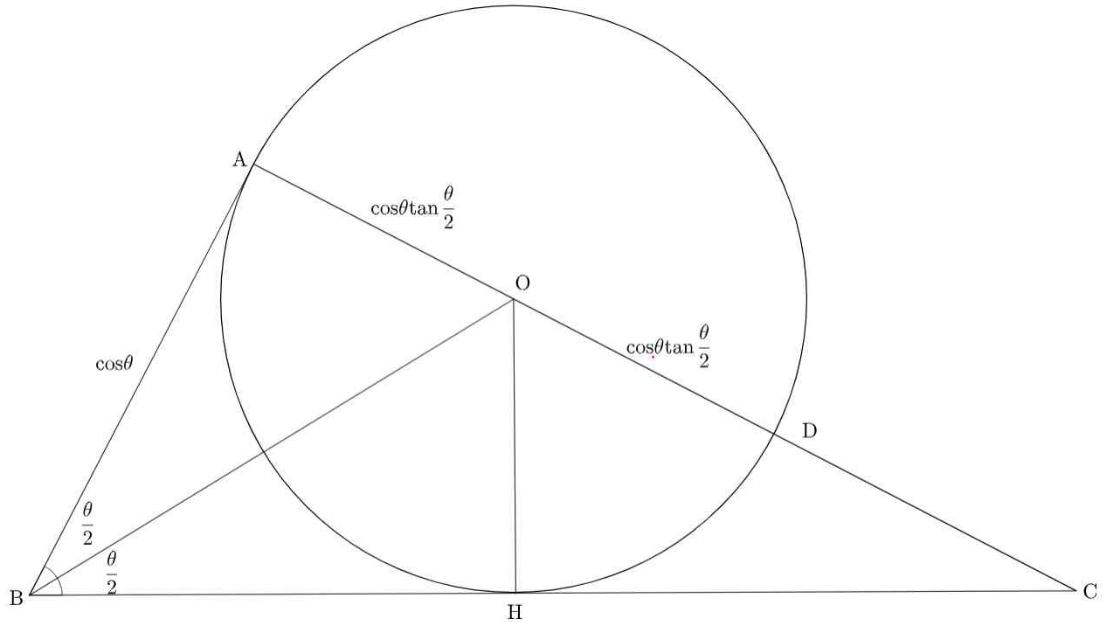
예제 1)

1. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대해여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=k$라 하자. $100k$의 값을 구하시오 [4점]



16학년도 10월 모의고사 28번 문항이다. 한번 풀어보고 아래의 풀이를 보자.

sol)



그림과 같이 표시하면 $\overline{\mathrm{CD}}=\sin\theta-2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$임을 알 수 있다.

이제 계산을 해보자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta-2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\theta^3}$의 극한식은 그냥 계산하기는 조금 어려워 보인다.

따라서 각 함수를 두 번째 항까지 테일러 급수 전개를 해보자.
왜 두 번째 항까지 전개하냐면, 그 이상의 항까지 전개하면 사차항 이상의 항이 나와서 어차피 사라지기 때문이다.
전개한 식은 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta-2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta-\frac{\theta^3}{6}-2\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta^3}{24}\right)}{\theta^3}$$

삼차항이 나오는 항만 계산하자. 계산을 제대로 했다면 삼차항 이하의 항은 모두 사라질 것이기 때문이다.
정리하면

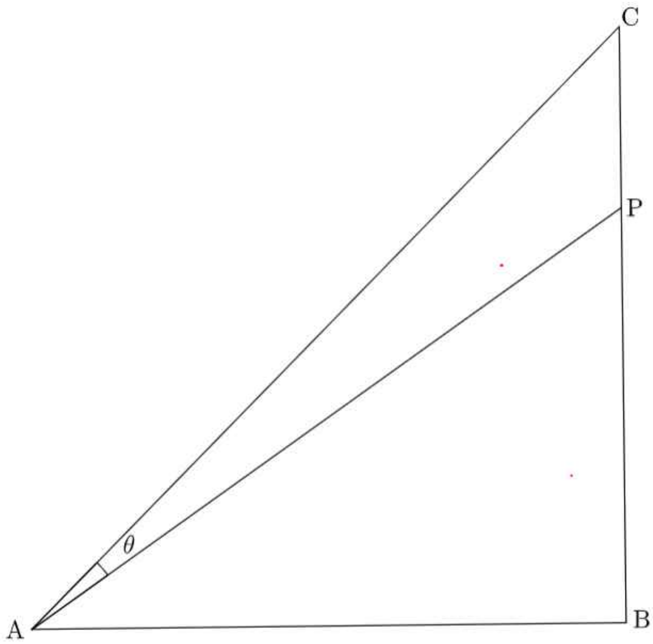
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{-\frac{\theta^3}{6}-2\times-\frac{\theta^2}{2}\times\frac{\theta}{2}-2\times\frac{\theta^3}{24}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^3}{2}-\frac{\theta^3}{12}}{\theta^3}=\frac{1}{4}$$ 이다.

※ 사실 이 문항은 할선정리로 풀면 극한식이 깔끔하게 나온다. 다만 이 글에서는 복잡한 극한식도 테일러 급수를 이용하여 간단히 처리할 수 있음을 보여주기 위해 위와 같은 방식으로 풀이하였다.

2. 변 표시에서의 테일러 급수의 활용

변 표시에 있어 테일러 급수를 활용하여 간단하게 표시할 수 있는 경우가 있다.
다음 문제를 함께 풀어보자.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=1$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각 이등변 삼각형 ABC가 있다. 변 BC위의 한 점 P를 $\angle PAC=\theta$가 되도록 잡자. 이때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{\overline{PC}}{\theta}$의 값을 구하시오.



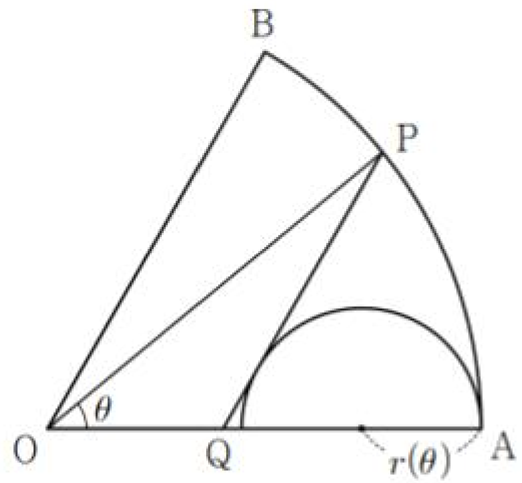
sol) $\overline{PC}=1-\overline{PB}$이고, $\overline{PB}=\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)$이다.

여기서 $\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)$를 일차항까지 테일러 급수 전개해주면, $\overline{PB}=1-2\theta$이므로 $\overline{PC}=2\theta$로 쓸 수 있다. 따라서 $\lim_{\theta \to 0+}\frac{\overline{PC}}{\theta}=2$이다.

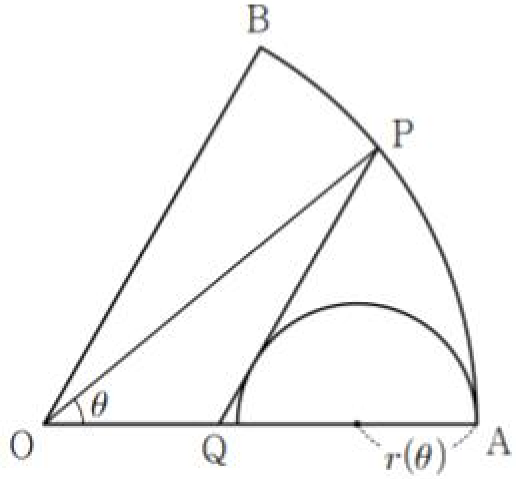
위와 같은 방식으로 테일러 급수 전개를 적절히 활용해 변의 길이를 더 간단하게 표시할 수 있는 경우가 있다. 예제를 보며 적용해보자.

예제 2)

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle AOP = \theta$라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$이고, a, b는 유리수이다.) [4점]



17학년도 사관학교 가형 29번 문항이다. 풀어보고 밑의 해설을 보자.



sol) $\overline{\mathrm{BO}}//\overline{\mathrm{PQ}}$이므로, $\angle\mathrm{PQO}=\dfrac{2\pi}{3}$이다. 그럼 $\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$가 된다.

사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}$에서, $\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$를 $\theta=0$에서 1차항까지 테일러 급수 전개해주면 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\theta$

대입하면 $\overline{\mathrm{OQ}}=1-\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}$이므로, $\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}$이다.

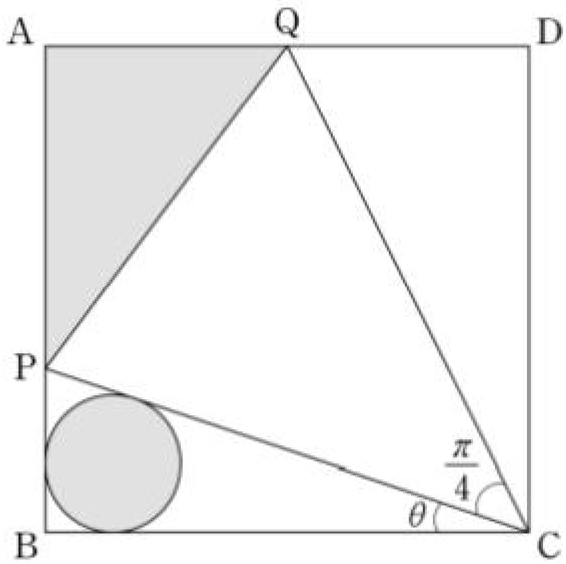
그런데 $\overline{\mathrm{AQ}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1\right)r(\theta)=\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}$이므로,

$$r(\theta)=\dfrac{\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1}=\dfrac{\theta}{2+\sqrt{3}}=\theta(2-\sqrt{3})$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{r(\theta)}{\theta}=2-\sqrt{3}$$

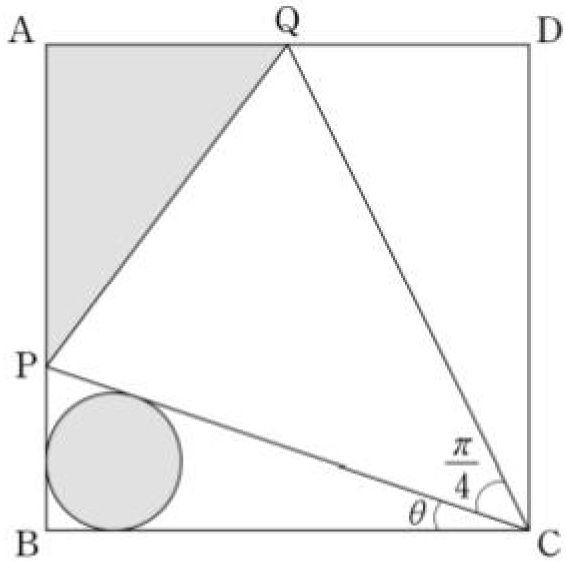
예제 3)

3. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BCP} = \theta$라 하고, 변 AD위의 점 Q를 $\angle \mathrm{PCQ} = \dfrac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



14학년도 예비시행 B형 29번 문항이다. 풀어보고 해설을 보자.

sol)



$f(\theta)$부터 구해보자.

$\angle \mathrm{QCD} = \frac{\pi}{4} - \theta$이므로, $\overline{\mathrm{QD}} = \tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$이다.

그런데, 여기까지만 보고는 어느 항까지 전개할지 판단하기는 조금 어렵다.

그래서 $g(\theta)$의 차수를 판단할 필요가 있는데, 간단한 근사를 통해 $g(\theta) = \frac{\theta^2}{4}\pi$임을 알 수 있다. 따라서 $\theta \times f(\theta)$도 이차식이여야 하므로, $f(\theta)$는 일차식이면 충분하다.

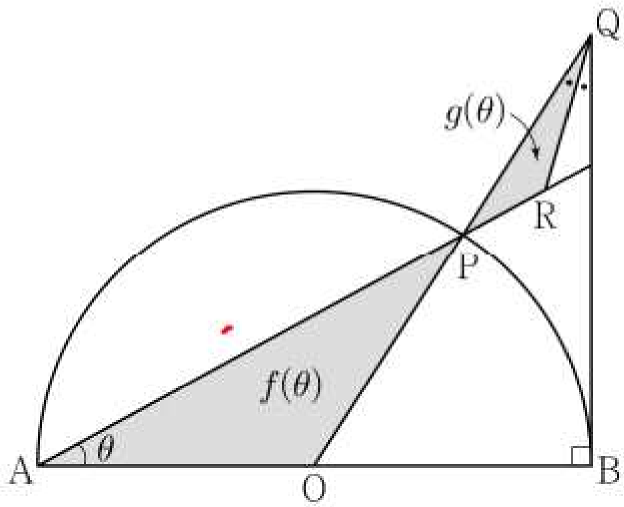
따라서, $\tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$를 일차항까지 테일러 급수 전개해주면, $\overline{\mathrm{QD}} = 1 - 2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}} = 2\theta$이다. $\overline{\mathrm{AP}} = 1 - \tan\theta$인데, 최저차항만 따지면 되므로 그냥 1로 취급해도 된다.

따라서 정리하면 $f(\theta) = \theta$이므로 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{1}{4}\pi$이다.

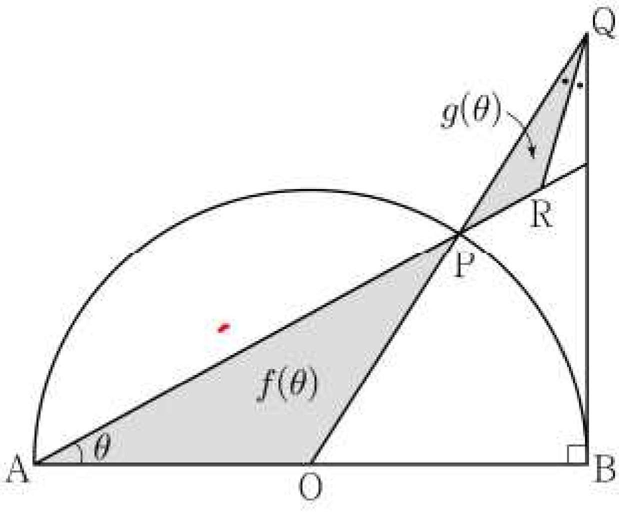
예제 4)

4. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{OAP} = \theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$) [4점]



22학년도 6월 평가원 모의고사 미적분 28번 문항이다. 풀어보고 해설을 보자.

sol)



먼저, AP와 BQ의 교점을 H라 하자.
그리고 $f(\theta)$부터 구해보자. $\angle \mathrm{POA} = \pi - 2\theta$이므로, $f(\theta) = \theta$
$\angle \mathrm{QOB} = 2\theta$임을 이용하면, $\overline{\mathrm{OQ}} = \sec 2\theta - 1$이고 테일러 급수 전개해주면, $\overline{\mathrm{OQ}} = 2\theta^2$
$\overline{\mathrm{QB}} = \tan 2\theta$이고, $\overline{\mathrm{HB}} = 2\tan\theta$이므로, $\overline{\mathrm{QH}} = \tan 2\theta - 2\tan\theta$

역시 테일러 급수 전개해주면, $2\theta + \dfrac{8\theta^3}{3} - 2(\theta + \dfrac{\theta^3}{3}) = 2\theta^3$이다.

또한, $\overline{\mathrm{PH}} = \sin^2\theta = \theta^2$이다. 이는 보조선 $\overline{\mathrm{PB}}$를 그어주면 쉽게 알 수 있다.
이므로, 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PR}} : \overline{\mathrm{RH}} = \theta^2 : \theta^3$이다. 비례배분 해주면

$\overline{\mathrm{PR}} = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + \theta^3} \times \theta^2 = \theta^2$이다. ($\theta^3$항은 어차피 지워지므로 미리 지웠다)

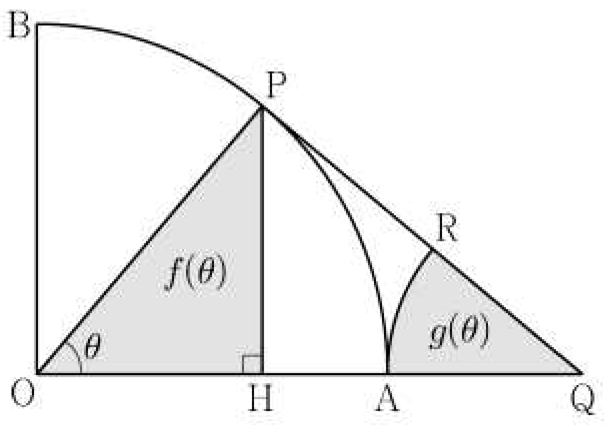
마지막으로 $\angle \mathrm{QPR} = \theta$이므로, $g(\theta) = 2\theta^2 \times 2\theta^2 \times \theta \times \dfrac{1}{2} = 2\theta^5$이다.

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)} = 2$$

※ 이 문제 역시 각 표시를 하여 특수각을 발견한 뒤 사인법칙으로 마무리하는 것이 최선의 풀이로 알려져 있다. 다만 이 글에서는 테일러 급수를 이용한 변 표시를 통해 각의 이등분선의 성질을 활용할 수도 있음을 보여주고 싶었다.

추가로 풀어보면 좋을 연습문제를 몇 개 덧붙인다.
직접 해설하지 않은 이유는 귀찮아서....가 아니고 $\cos\theta$의 간단한 전개를 통해 해결할 수 있는 문제들이기 때문이다.

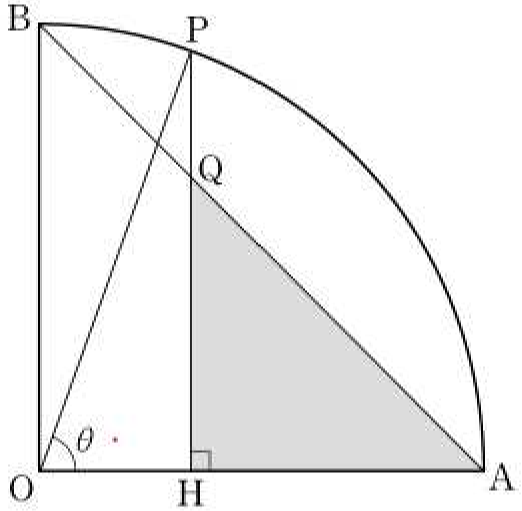
20. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{QA}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle POA = \theta$일 때, 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{\sqrt{\pi}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ⑤ $\sqrt{\pi}$

20학년도 9월 모의평가 가형 20번 문항이다.

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle POH = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

17학년도 수능 가형 14번 문항이다.