8. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

Sol1) $f(x)=2(x-1)(x-\alpha)$

$\rightarrow f'(1)=3$ 이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$

Sol2) $f(x)=2(x-1)^2+3(x-1)$

$\therefore f(3)=\boxed{14}$

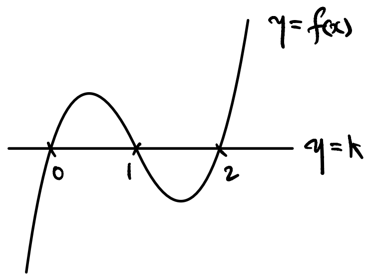
9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

$f(0)=f(1)=f(2)$ 이므로

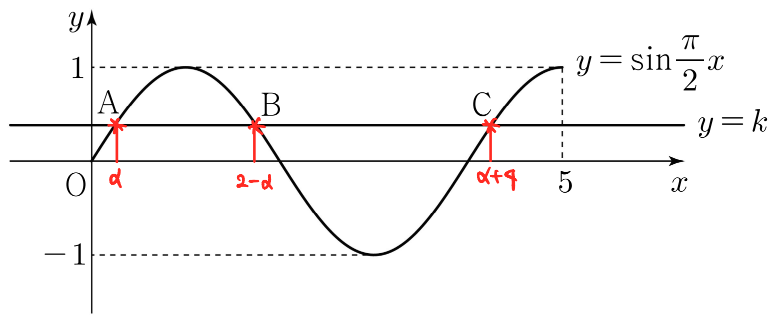


$\rightarrow f(x)-k=x(x-1)(x-2)$

$f'(1)=\boxed{-1}$

10. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\ (0\le x\le 5)$가 직선 $y=k\ (0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



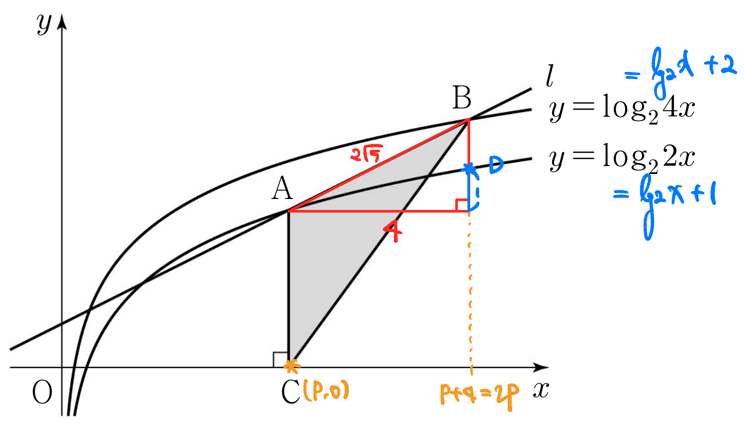
$\alpha+6=\frac{25}{4}$

$\rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{3}{2}$

11. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A 라 하고, 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B 라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발 C 에 대하여 삼각형 ACB 의 넓이는? [4점]

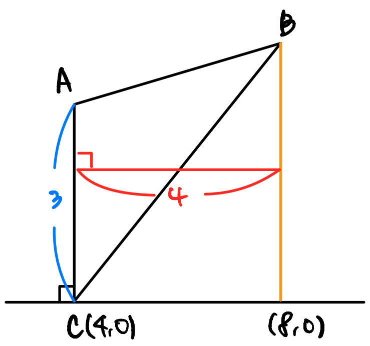
① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



점 A → 점 D : y좌표 1 증가 = x좌표 ×2

→ 점 D x좌표 = p+4 = 2p

→ p=4



∴ △ABC 넓이 = $\frac{1}{2}\times3\times4$ = $\boxed{6}$

12. 첫째항이 2 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}=S_n$$

이 성립할 때, a_{10} 의 값을 구하는 과정이다.

> $n\ge 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}$
>
> $=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$
>
> 이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n\ (n\ge 2)$
>
> 이다.
>
> $S_1=a_1$ 에서 $3S_1=3a_1$ 이므로
>
> $3S_n=(n+2)\times a_n\ (n\ge 1)$
>
> 이다.
>
> $3a_n=3(S_n-S_{n-1})$
>
> $=(n+2)\times a_n-(\boxed{(가)})\times a_{n-1}\ (n\ge 2)$ → (n+1)
>
> $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{(나)}\ (n\ge 2)$ → $\frac{n+1}{n-1}$
>
> 따라서
>
> $a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}$
>
> $=\boxed{(다)}$ → 110

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$ 의 값은? [4점]

① 109 ② 112 ③ 115 ④ 118 ⑤ 121

$f(n)\times\frac{1}{g(n)}=n-1$

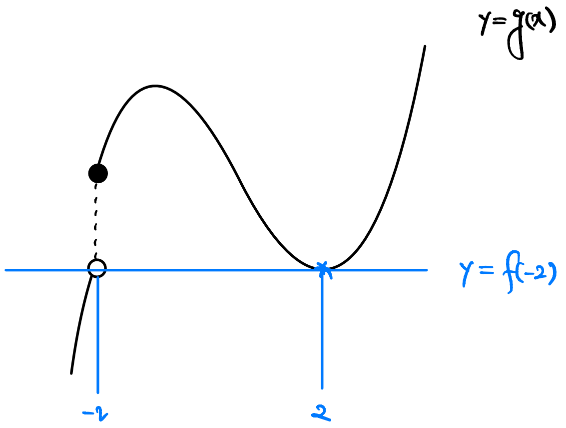
∴ $\frac{f(110)}{g(110)}=\boxed{109}$

13. 최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x \ge -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 2 뿐일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5



→ $f(x)+8=(x-2)^2(x-\alpha)+f(-2)$

① $x=-2$ 대입

$f(-2)+8=-16(\alpha+2)+f(-2)$

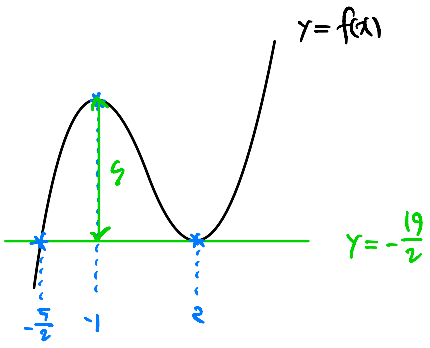
→ $\alpha=-\frac{5}{2}$

② $x=0$ 대입

$f(x)=(x-2)^2(x+\frac{5}{2})+f(-2)-8$

$f(0)=2+f(-2)=\frac{1}{2}$

→ $f(-2)=-\frac{3}{2}$



$S=\frac{3}{6}\times(2+1)^3=\frac{27}{2}$

∴ $f(x)$의 극댓값 $=\boxed{4}$

14. 길이가 14 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C 를 $\overline{BC}=6$ 이 되도록 잡는다. 점 D 가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D 는 점 A 와 점 C 가 아닌 점이다.) [4점]

<보 기>

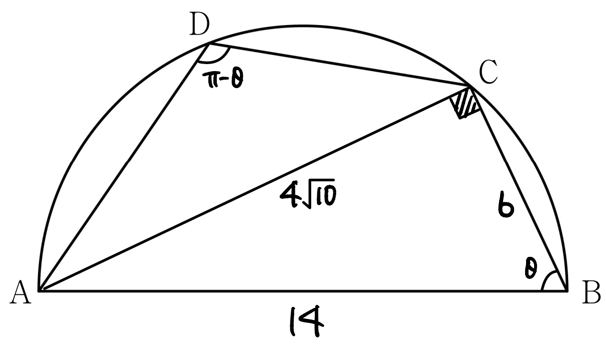
ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$ 일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD 의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\sin\theta=\frac{4\sqrt{10}}{14}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$ 일때 $\overline{AD}=x$ 가 하자.

△ACD 에서 코사인법칙을 쓰면

→ $160=x^2+49-14x\cdot-\frac{3}{7}$

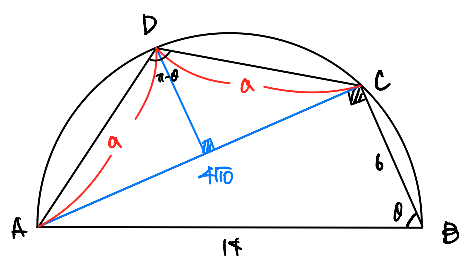
→ $x^2+6x-111=0$

→ $x=-3+2\sqrt{30}$ $(x>0)$

ㄷ. △ABC의 넓이는 $12\sqrt{10}$ 으로 고정되어 있으므로,

△ACD의 넓이가 최대가 되는 상황을 보아야 한다.

이 상황은 다음과 같다.



→ $160=2a^2-2a^2\times-\frac{3}{7}$

→ $a^2=56$

→ △ACD 넓이의 최대 $=\frac{1}{2}\times56\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=8\sqrt{10}$

∴ □ABCD 넓이의 최대 $=\boxed{20\sqrt{10}}$

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x tf(t)dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

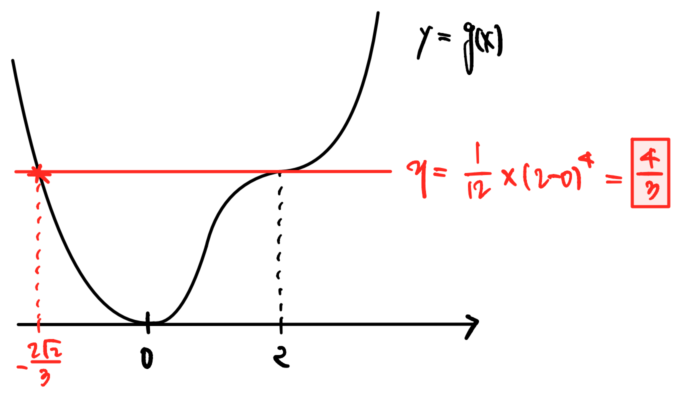
라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$g(x)$가 미분가능하므로 $f(x+2)=x^2$ 이다.

$$\rightarrow g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \ge 0) \end{cases}$$



$\therefore$ 모든 a값의 곱 $=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

단답형

16. $\log_3 7 \times \log_7 9$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\,(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$ 에서의 점 P 의 위치가 6 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

19. $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $2n^2-9n$ 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 최고차항의 계수가 3 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

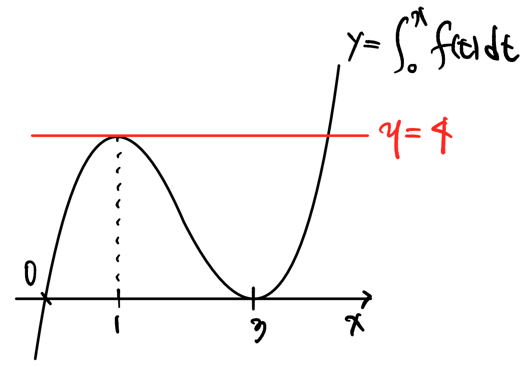
(가) 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다. → $g'(x)$ 부호변화 ×
(나) 방정식 $g'(x)=0$ 의 모든 실근은 0, 3 이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

8

$$g'(x) = 2x \times \boxed{\int_0^x f(t)\,dt}$$

$$= x(x-3)^2$$



$f(x)$를 속도함수로, $\int_0^x f(t)dt$ 를 위치함수로 두면

$\int_0^3 |f(x)|\,dx$ = $x=0 \sim 3$ 까지 이동거리

$\therefore \int_0^3 |f(x)|\,dx = 4+4 = \boxed{8}$

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$
>
> (나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

180

Sol1) 점화식 조작

(가) $a_{2n-1} + a_{2n} = 17$

(나) $|a_{2n} - a_{2n-1}| = 4n-3$

$a_{2n} - a_{2n-1} = 4n-3$ $(a_{2n} \geq a_{2n-1})$: $n > \frac{3}{4}$ (모든자연수)

$\rightarrow a_{2n} = 2n+7$

$a_{2n} - a_{2n-1} = -4n+3$ $(a_{2n} < a_{2n-1})$: $n > \frac{3}{4}$ (모든자연수)

$\rightarrow a_{2n} = -2n+10$

$\rightarrow a_2 = 9$ 이므로 $a_{2n} = 2n+7$

$\therefore a_{2n} = 2n+7$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \boxed{180}$

Sol2) 귀납적 추론

합 17 17 17 17 17

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} …

차 1 3 5 7 9 11 13 15 17

(8, 9) (6, 11) (4, 13) (2, 15) (0, 17) …

$\rightarrow a_{2n} = 2n+7$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \boxed{180}$

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x) = |f(x)| + g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y = h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)\ (k \neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y = 0$이다.
>
> (나) 방정식 $h(x) = 0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3) = -\dfrac{9}{2}$일 때, $k \times \{h(6) - h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

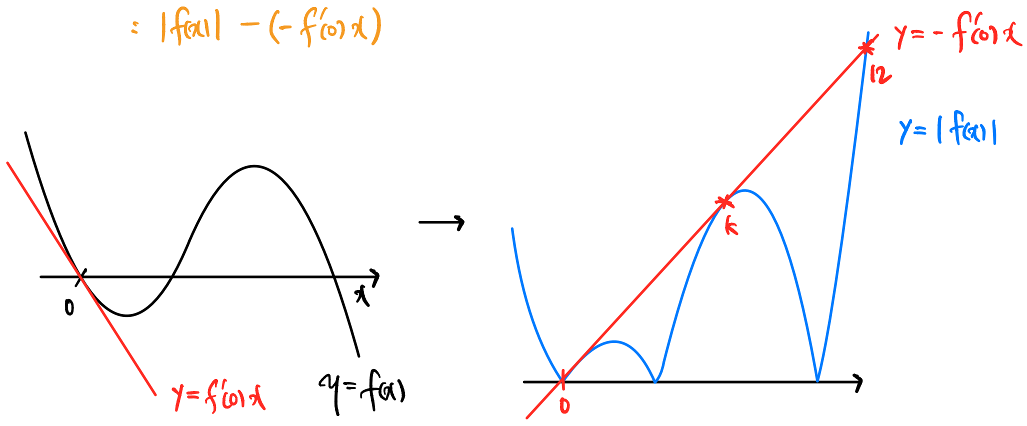
121

$f(0) = 0$, $g(x) = f'(0)x$

$\rightarrow h(x) = |f(x)| + f'(0)x$

방정식 $|f(x)| + f'(0)x = 0$ 의 실근은 $x = 0, k, 12$ .. 이다.

: $|f(x)| - (-f'(0)x)$



$f(x) - f'(0)x = px^2(x-12)$

$f(x) + f'(0)x = px(x-k)^2$

삼차식 근의 합

$0+0+12 = 0+k+k$

$\rightarrow \boxed{k=6}$

$2f'(0)x = px\{(x-k)^2 - x(x-12)\}$

: $k^2 - (2k-12)x$

$\rightarrow k=6$, $f'(0) = 18p$

$h(3) = |f(3)| + g(3)$

$f(3) > 0$ 이므로, $f(3) + g(3) = 27p = -\frac{9}{2}$

$\rightarrow p = -\frac{1}{6}$

$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2(x-12) - 3x$, $g(x) = -3x$

$\therefore k \times \{h(6) - h(11)\} = \boxed{121}$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.