제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{2\sqrt2} \times (3^2)^{1-\sqrt2} = 3^{2\sqrt2} \times 3^{2-2\sqrt2} = 3^{2\sqrt2+2-2\sqrt2} = 3^2 = 9$

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ 일 때, a_5 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$a_n = ar^{n-1}$

$a_2 = ar = \frac12$ $a_3 = ar^2 = \underbrace{ar}_{\frac12} \times r = 1$

$\frac12 r = 1 \Rightarrow r = 2$

$ar = \frac12 \Rightarrow 2a = \frac12 \Rightarrow a = \frac14$

$a_5 = ar^4 = \frac14 \times 16 = 4$

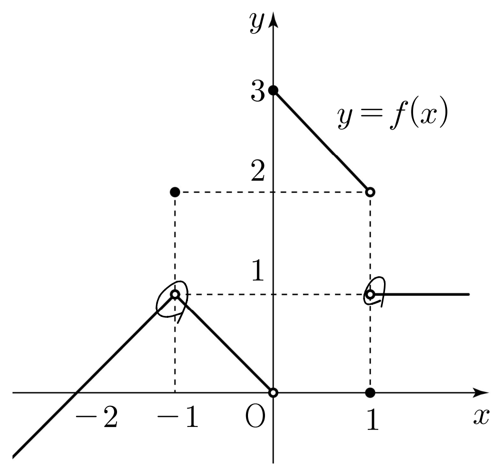
3. 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 7$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$f'(1) = 5$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x\geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x=2$에서 연속

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$7-2a$

$2+$ $2-$

$4-2a+3$ 1

$7-2a$

$7-2a=1$

$2a=6$

$a=3$

6. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{10}$ ② 1 ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{13}{10}$

$\cos\theta - (-\cos\theta) = 2\cos\theta = \frac{6}{5}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta=\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5}$

7. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n<0) \\ -2a_n+1 & (a_n\geq 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10}+a_{20}$의 값은? [3점]

-1 0

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$a_1=\frac{1}{2}$

$$a_2=\begin{cases} a_1+1 & (a_1<0) \\ -2a_1+1 & (a_1\geq 0) \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$

$a_2=0$
$a_3=1$
$a_4=-1$

$a_5=0$
$a_6=1$
$a_7=-1$

$a_8=0$
$a_9=1$
$a_{10}=-1$

$a_{10}=-1$
$a_{13}=-1$
$a_{16}=-1$
$a_{19}=-1$
$a_{20}=0$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

$f(1)=0$
$f'(1)=3$

$f(x)=2x^2+ax+b$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$f(1)=2+a+b=0$

$f'(x)=4x+a$

$f'(1)=4+a=3$

$a=-1$

$2+a+b=0 \Rightarrow 1+b=0 \Rightarrow b=-1$

$\therefore f(x)=2x^2-x-1$

$f(3)=18-3-1=14$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

$f(1)-f(0)=0 \Rightarrow f(1)=f(0)$

$f(2)-f(0)=0 \Rightarrow f(2)=f(0)$

$f(1)-\cancel{f(0)}=f(2)-\cancel{f(0)} \Rightarrow f(1)=f(2)$

$\Rightarrow f(0)=f(1)=f(2)=k$

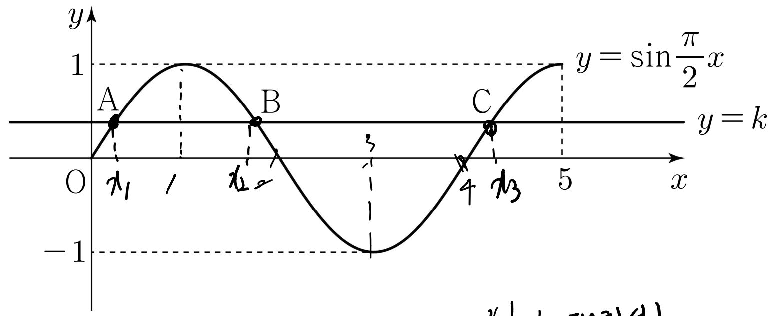
$f(x)-k=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$

$f'(1)=1\times(1-2)=-1$

10. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\ (0\le x\le 5)$가 직선 $y=k\ (0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

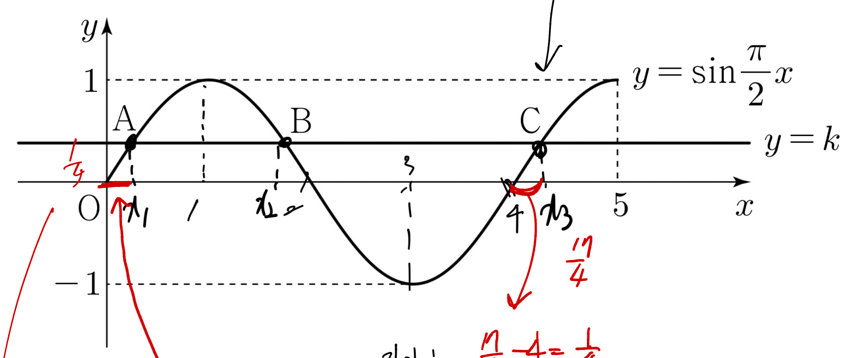
① $\frac{5}{4}$　② $\frac{11}{8}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{13}{8}$　⑤ $\frac{7}{4}$



$x_1+x_2=2\times1=2$ (1 대칭성)

$x_1+x_2+x_3=\frac{25}{4} \Rightarrow x_3+2=\frac{25}{4}$

$\Rightarrow x_3=\frac{17}{4}$



길이: $\frac{17}{4}-4=\frac{1}{4}$

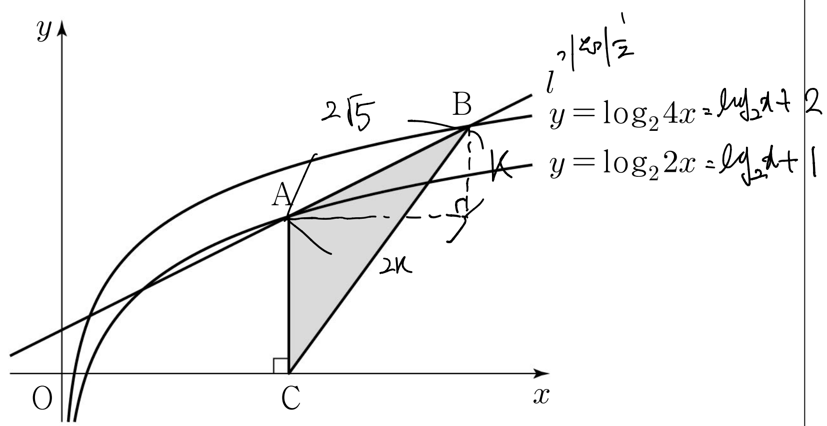
$x_1=\frac{1}{4}$

$x_1+x_2=2 \Rightarrow x_2=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$\therefore x_2-x_1=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

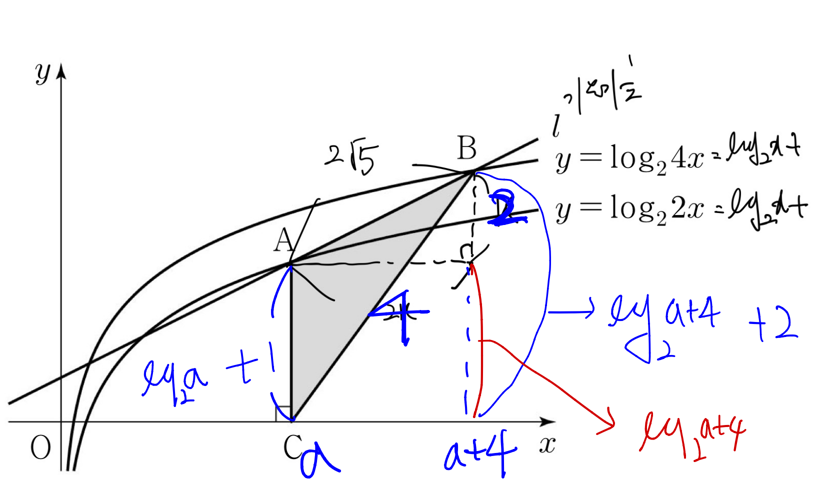
11. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A 라 하고, 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발 C 에 대하여 삼각형 ACB 의 넓이는? [4점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



$(2k)^2+k^2=(2\sqrt5)^2$

$\Rightarrow 4k^2+k^2=20 \Rightarrow 5k^2=20 \Rightarrow k=2$

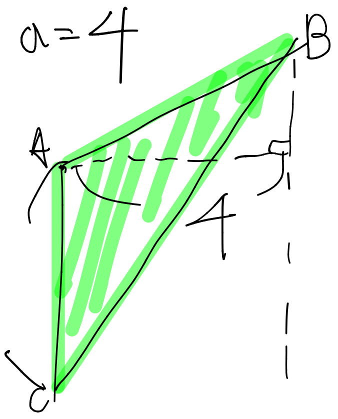


$\log_2 a+1 = \log_2 a+4$

$\Rightarrow \log_2 2a = \log_2 a+4$

$\Rightarrow 2a=a+4$

$\Rightarrow a=4$



$\log_2 4+1=3$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times4=6$

12. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}=S_n$$

이 성립할 때, a_{10} 의 값을 구하는 과정이다.

> $n\geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}$
>
> $=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$
>
> 이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n \quad (n\geq 2)$
>
> 이다.
>
> $S_1=a_1$ 에서 $3S_1=3a_1$ 이므로
>
> $3S_n=(n+2)\times a_n \quad (n\geq 1)$
>
> 이다.
>
> $3S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}$
>
> $3a_n=3(S_n-S_{n-1})$
>
> $n+2-1=n+1$
>
> $=(n+2)\times a_n-(\boxed{\text{(가)}})\times a_{n-1} \quad (n\geq 2)$
>
> $(n+1)a_{n-1}=(n-1)a_n$
>
> $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{\text{(나)}} \quad (n\geq 2)$
>
> $\frac{n+1}{n-1}$
>
> $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$
>
> 따라서
>
> $a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}=2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{10}{8}\times\frac{11}{9}$
>
> $=\boxed{\text{(다)}}$ 110
>
> $=2\times\frac{10\times11}{2}=110$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$ 의 값은? [4점]

① 109 ② 112 ③ 115 ④ 118 ⑤ 121

$f(n)=n+1$

$g(n)=\frac{n+1}{n-1}$

$p=110$

$\dfrac{111}{\frac{111}{109}}=109$

13. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

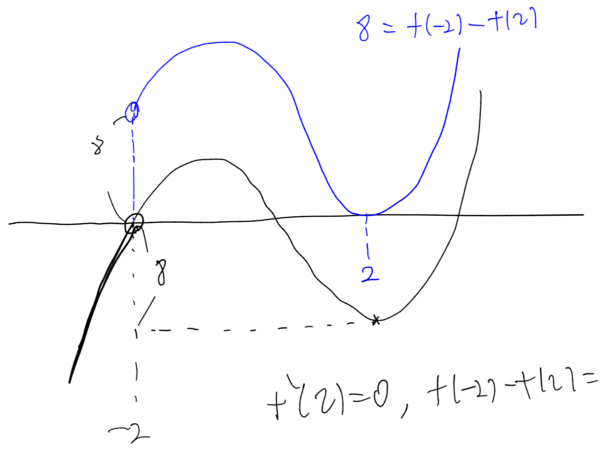
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x \ge -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

$g(2)=f(-2) \Rightarrow f(2)+8=f(-2)$

$8=f(-2)-f(2)$



$f'(2)=0,\ f(-2)-f(2)=8,\ f(0)=\frac{1}{2}$ (3점)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2)=12+4a+b=0 \Rightarrow 4a+b=-12 \cdots ①$

$f(2)=8+4a+2b+\frac{1}{2}$

$f(-2)=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

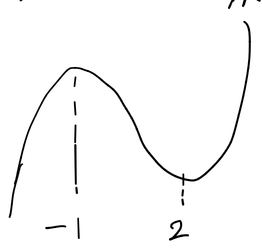
$-8+\cancel{4a}-2b-8-\cancel{4a}-2b=8$

$-4b=24 \Rightarrow b=-6$

①에서 $4a-6=-12 \Rightarrow 4a=-6 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)=3(x-2)(x+1)$



$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+\frac{1}{2}$

$=5-\frac{2}{2}=5-1=4$

14. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle \mathrm{CBA})=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{CD}}=7$ 일 때, $\overline{\mathrm{AD}}=-3+2\sqrt{30}$

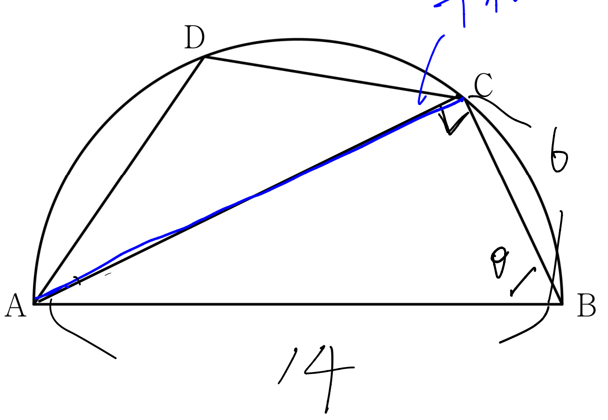
ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$14 \times 14 = 56\ 14 \quad 196-36$

ㄱ.

수직보조선★



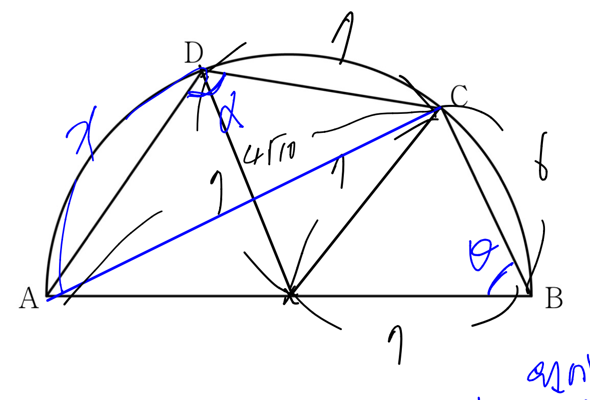
$\overline{AC}=\sqrt{14^2-6^2}$

$=\sqrt{160}$

$=4\sqrt{10}$

$\angle CBA=\theta$ 라하면 $\sin\theta=\frac{4\sqrt{10}}{14}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ.



$\angle ADC=\alpha$라하면 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로

$\alpha+\theta=\pi \Rightarrow \alpha=\pi-\theta$

$\cos\alpha=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{6}{14}=-\frac{3}{7}$

△ADC에서 cos법칙을 사용하면 ($\overline{AD}=x$)

$\cos\alpha=\frac{x^2+49-160}{14x} \Rightarrow -\frac{3}{7}=\frac{x^2-111}{14x} \Rightarrow -6x=x^2-111 \Rightarrow x^2+6x-111=0$

$x=-3\pm\sqrt{9+111}$

$x=-3\pm\sqrt{120}$

$x=-3\pm2\sqrt{30}$

$\overline{AD}=x=-3+2\sqrt{30}$ ($\because x>0$)

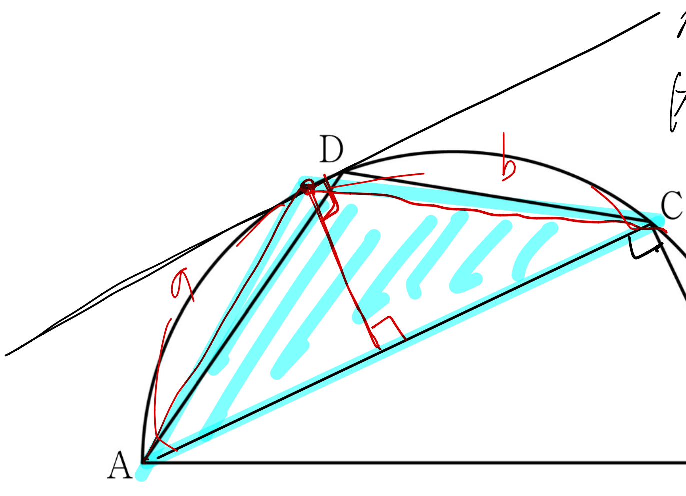
13. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

a=b 일때 최대.



접선 (직선AC와 평행)

14. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]

<보 기>

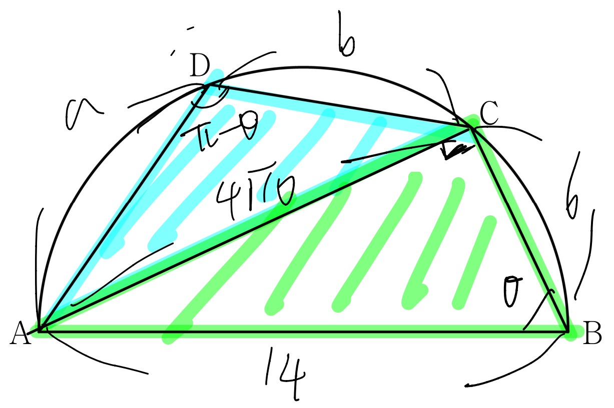
ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ



$\sin\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times 6=12\sqrt{10}$.

$\triangle ADC=\frac{1}{2}ab\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{7}ab$

△ADC에서 cos 법칙을 사용하면

$\cos(\pi-\theta)=-\frac{3}{7}$

$-\frac{3}{7}=\frac{a^2+b^2-160}{2ab}$ $\Rightarrow a=b$ $\Rightarrow -\frac{3}{7}=\frac{2a^2-160}{2a^2}$ $\Rightarrow -\frac{3}{7}a^2=a^2-80$ $\Rightarrow a^2+\frac{3}{7}a^2=80$ $\Rightarrow \frac{10}{7}a^2=80$ $\Rightarrow a^2=56$

△ADC의 최댓값 $\frac{\sqrt{10}}{7}a^2=\frac{\sqrt{10}}{7}\times 56=8\sqrt{10}$

∴ 사각형 ACBD의 넓이 최댓값은

$8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

<3점분석.>

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

$J(0)=0$, $J'(x)=xf(x)$ ⇒ $J'(0)=0$.

최고차항의 계수 $\frac{1}{4}$인 4차함수 ↳ $J(x)$

$J(0)=J'(0)=0$ ⇒ x^2을 인수로.

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

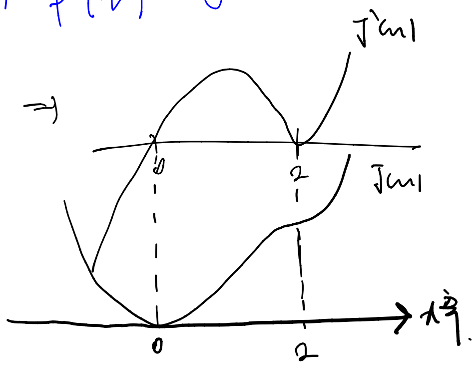
$x=0$에서 연속 ⇒ $f(2)=0$.

$x=0$에서 미분가능 ⇒ $f'(2)=0$

⇒ $f(x)=(x-2)^2$

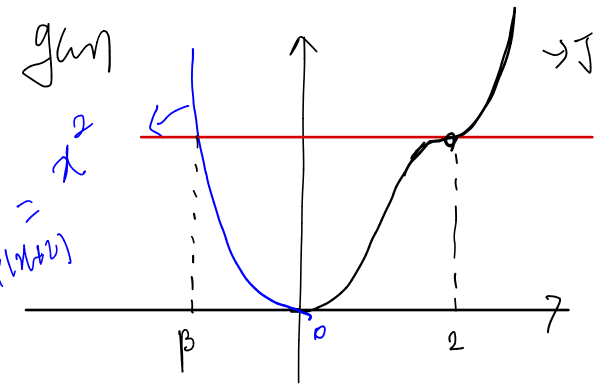
∴ $J'(x)=x(x-2)^2$
$=x(x^2-4x+4)$
$=x^3-4x^2+4x$

$J(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4x^3}{3}+2x^2$



g(x)

$x^2 = f(x+2)$



→ J(x)

$g(a)=J(2)$

모든 $a=\beta$ or 2

$J(2)=\frac{1}{4}\times 16-\frac{4\times 8}{3}+8=4-\frac{32}{3}+8=12-\frac{32}{3}=\frac{4}{3}$

$\beta^2=\frac{4}{3}$ ⇒ $\beta=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (∵ $\beta<0$)

∴ 모든 a의 값의 곱은

$2\times\beta=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

단답형

16. $\log_3 7\times\log_7 9$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{\cancel{\log 7}}{\log 3}\times\frac{2\log 3}{\cancel{\log 7}}=2$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-x^2-x+C$

$f(1)=2-1-1+C=3$ ⇒ $C=3$

$f(x)=2x^3-x^2-x+3$

∴ $f(2)=16-4-2+3=13$

18. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$x(t)=t^3+3t^2-at$

$x(3)=27+27-3a=6 \Rightarrow 54-3a=6$

$\Rightarrow 54-6=3a$

$\Rightarrow 3a=48$

$\Rightarrow a=16$

16

a의 n제곱근 $=x$ $(x^n=a)$

19. $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

① n이 홀수면 무조건 1개

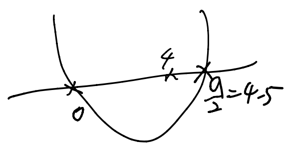
② n이 짝수이면

$2n^2-9n>0 \Rightarrow 2$개

$2n^2-9n=0 \Rightarrow 1$개

$2n^2-9n<0 \Rightarrow 0$개.

$x^n=2n^2-9n=2n(n-\frac{9}{2})$



$f(3)=1$

$f(4)=0$ $(\because 2n^2-9n<0)$

$f(5)=1$

$f(6)=2$ $(\because 2n^2-9n>0)$

$\therefore f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

20. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

g(x)는 최고차항의 계수가 2인 사차함수.

$2x \times (x^3 \cdots)$

$2x \int 3x^2 \cdots$

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
> (나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

↳ $x=0$, $x=3$ $y=f(x)$, x축과 둘러싸인 넓이

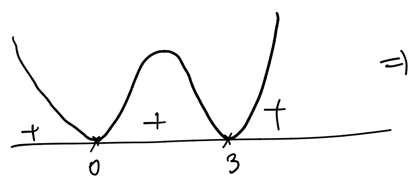
<조건분석>

$g(0)=0$, $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+\cancel{x^2f(x)}-\cancel{x^2f(x)}$ $=2x\int_0^x f(t)dt$ $=2x\,h(x)$

$\int_0^x f(t)dt=h(x) \Rightarrow h(0)=0,\ h'(x)=f(x)$

$g'(x)=2x\,h(x)$

$g'(x)$는 0, 3을 근으로 가져야 하고 ($x=0$에서 부호변화X, $x=3$에서 부호변화X)

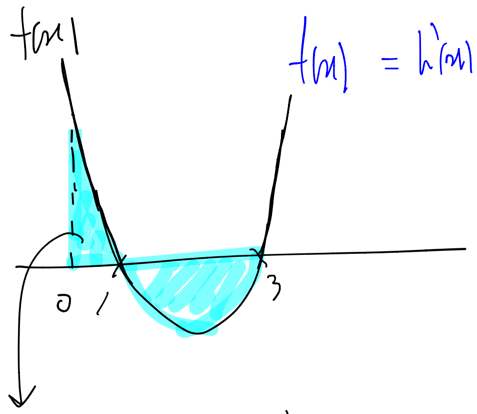


$\Rightarrow h(x)=x(x-3)^2=x(x^2-6x+9)$

$=x^3-6x^2+9x$

$f(x)=h'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$=3(x-3)(x-1)$



$\frac{1}{2}\times 8$

$\therefore \int_0^3 |f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx+\frac{|3|}{6}(3-1)^3$

$=\int_0^1 3x^2-12x+9\,dx+4$

$=\left[x^3-6x^2+9x\right]_0^1$

$=1-6+9+4$

$=8$

$g(x) = f'(0)x$ $f(0)=0$

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$
>
> (나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = 17n$

$- \; a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-2} = 17(n-1) = 17n - 17$

$a_{2n-1} + a_{2n} = 17 \quad (n \ge 2)$ $\qquad$ $n=1$일 때 $a_1 + a_2 = 17$

$a_{2n-1} + a_{2n} = 17 \; (n \ge 1)$

$a_1 + a_2 = 17$
$a_3 + a_4 = 17$
$a_5 + a_6 = 17$
$\vdots$

$|a_2 - a_1| = 1 \Rightarrow a_2 = 9 \Rightarrow a_1 = 8 \quad (\because a_1 + a_2 = 17)$

$|a_3 - a_2| = 3 \Rightarrow a_3 = 6$ or 12

$|a_4 - a_3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 6 \Rightarrow a_4 = 11 \quad (\because a_5 + a_6 = 17) \\ a_3 = 12 \Rightarrow a_4 = 5 \; (\times) \end{cases}$

$|a_5 - a_4| = 7 \Rightarrow a_5 = 4$ or 18

$|a_6 - a_5| = 9 \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 4 & a_6 = 13 \\ a_5 = 18 & a_6 = -1 \; (\times) \end{cases}$

규칙 발견 ⇒ 확인 가능.

(가), (나) 조건 모두 만족!

$a_1 = 8$, $a_2 = 9$, $a_3 = 6$, $a_4 = 11$, $a_5 = 4$, $a_6 = 13$, $a_7 = 2$, $a_8 = 15$, $a_9 = 0$, $a_{10} = 17$, $a_{11} = -2$, $a_{12} = 19$, $a_{13} = -4$, $a_{14} = 21$, $a_{15} = -6$, $a_{16} = 23$, $a_{17} = -8$, $a_{18} = 25$, $a_{19} = -10$, $a_{20} = 27$

$\because \sum_{k=1}^{10} a_{2n} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$

$= 9 + 11 + \cdots + 27$

$= \dfrac{10(9+27)}{2} = 10 \times 18$

$= 180$

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x) = |f(x)| + g(x)$$

$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x) + xf'(0) & (f(x) \ge 0) \\ -f(x) + xf'(0) & (f(x) < 0) \end{cases}$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$h(x)$는 $(x-k)^2$ 인수.

> (가) 곡선 $y = h(x)$ 위의 점 $(k, 0)$ $(k \ne 0)$에서의 접선의 방정식은 $y = 0$이다. $\Rightarrow h(k) = 0, \; h'(k) = 0$.
>
> (나) 방정식 $h(x) = 0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3) = -\dfrac{9}{2}$일 때, $k \times \{h(6) - h(11)\}$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.) [4점]

$-ax^3 - bx^2 + \cancel{cx} \; \cancel{-cx}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ $\qquad f'(0) = c$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$h(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + 2cx & (f(x) \ge 0) \\ x(ax^2 + bx + 2c) & \\ -ax^3 - bx^2 & (f(x) < 0) \end{cases}$

(가) 조건에 의해 $f(k) \ge 0$ 이어야겠다.

(만약 $f(k) < 0$이면 $-ax^2 - bx^2$은 $(x-k)^2$을 인수로 가져야 하는데 $k \ne 0$이므로 모순이다.)

즉, $h(x) = ax(x-k)^2 \quad (f(x) \ge 0)$ 이다.

$ax(x^2 - 2kx + k^2) = ax^3 - 2akx^2 + ak^2x$ 에서

$2c = ak^2$이므로

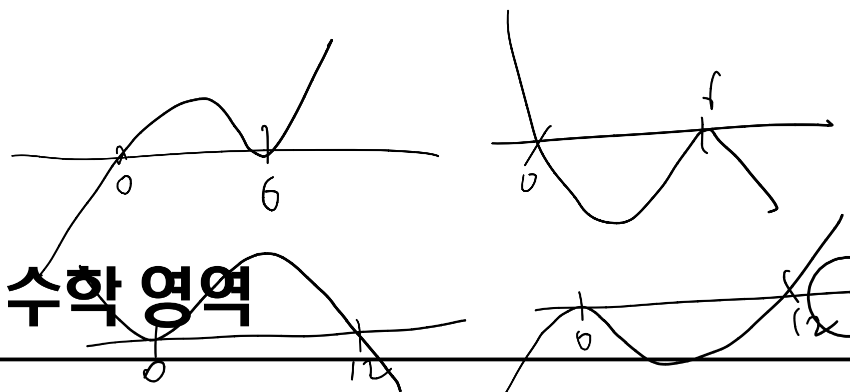
$c = \dfrac{ak^2}{2}$

$-2ak = b$

$\therefore h(x) = \begin{cases} ax(x-k)^2 & (f(x) \ge 0) \\ -ax^3 + 2akx^2 & (f(x) < 0) \\ = -ax^2(x - 2k) & \end{cases}$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

다음 페이지에 계속



$$h(x)=\begin{cases} ax(x-k)^2 & (f(x)\geq 0) \\ -ax^2(x-2k) & (f(x)<0)\end{cases}$$

(나) 조건에 의해서

$k=6$ or $k=12$.

① $k=6$일 때

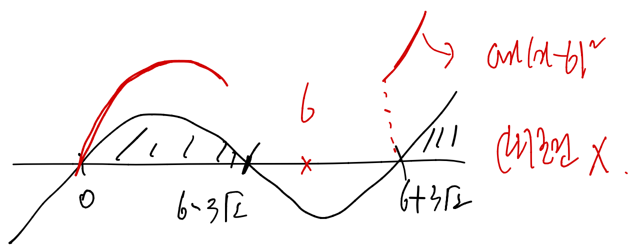
$$h(x)\begin{cases} ax(x-6)^2 & (f(x)\geq 0) \\ -ax^2(x-12) & (f(x)<0)\end{cases}$$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 이고 $ax(x-6)^2=ax^3+bx^2+cx$ 이므로 ↑ why?

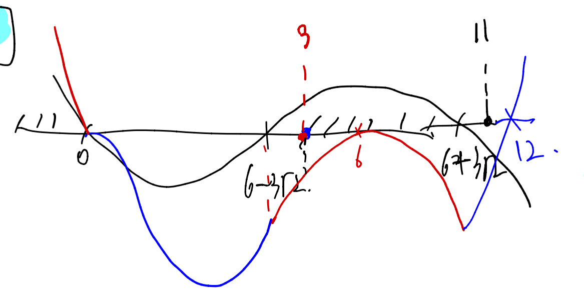
$ax(x-6)^2=ax(x^2-12x+36) \Rightarrow f(x)=ax(x^2-12x+18)$

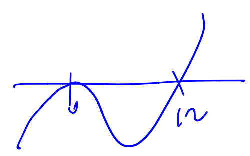
$6\pm\sqrt{36-18}$, $6\pm\sqrt{18}$, $6\pm3\sqrt{2}$

$a>0$



$a<0$





(나)조건 o. $h(3)=-\frac{9}{2}$ 가능.

---

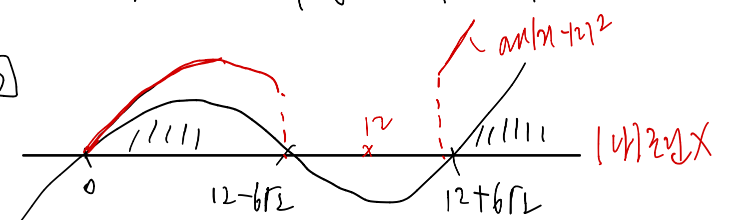
② $k=12$일 때

$$h(x)\begin{cases} ax(x-12)^2 & (f(x)\geq 0) \\ -ax^2(x-24) & (f(x)<0)\end{cases}$$

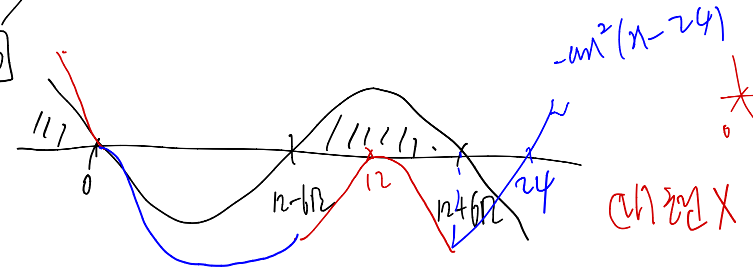
$ax(x-12)^2=ax(x^2-24x+144) \Rightarrow f(x)=ax(x^2-24x+72)$

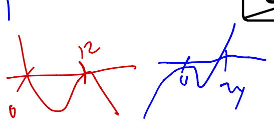
$12\pm\sqrt{144-72}$, $12\pm6\sqrt{2}$.

$a>0$



$a<0$





22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)\ (k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
>
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\frac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

$a(3)(3-6)^2=-\frac{9}{2}$

$\Rightarrow a\times3\times9=-\frac{9}{2}$

$a=-\frac{1}{6}$

$$\therefore h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (f(x)\geq 0) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (f(x)<0)\end{cases}$$

$h(6)=0$, $h(11)=\frac{1}{6}\times(11)^2(11-12)$

$=\frac{1}{6}121\times(-1)=-\frac{121}{6}$

$\therefore k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times(0-(-\frac{121}{6}))=121$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(4x+1)^6$의 전개식에서 x의 계수는? [2점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

$_6C_1 (4x)^1 (1)^5 = 6\times 4 = 24$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(3X-1)=17$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

$E(X) = \frac{n}{3}$

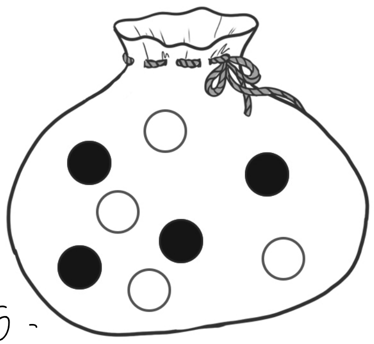
$E(3X-1) = 3E(X) - 1 = n-1 = 17$

$\therefore n=18$

$V(X) = n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}n = \frac{2}{\cancel{9}}\times\cancel{18}^{2} = 4$

25. 흰 공 4개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{51}{70}$ ③ $\frac{53}{70}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{57}{70}$



여사건의 확률이용.

$\frac{17}{{}_8C_4}$

검은 공 0개 ⇒ ${}_4C_4=1$
검은 공 1개 ⇒ ${}_4C_1 \times {}_4C_3=16$

$\frac{\cancel{8}\cancel{7}\cancel{6}5}{\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}}$

$1-\frac{17}{70}=\frac{53}{70}$

26. 세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 135 ② 140 ③ 145 ④ 150 ⑤ 155

a. b. c

(2. 2. 1)
aabbc ⇒ $\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\cancel{4}321}{\cancel{4}}=30$
2개씩 가지는 문자 고르기 ${}_3C_2 \Rightarrow 3$
$30\times3=90$.

(1 1 3)
abccc ⇒ $\frac{5!}{3!}=\frac{54\cancel{321}}{\cancel{321}}=20$
3개을 가지는 문자 고르기 ${}_3C_1 \Rightarrow 3$
$20\times3=60$

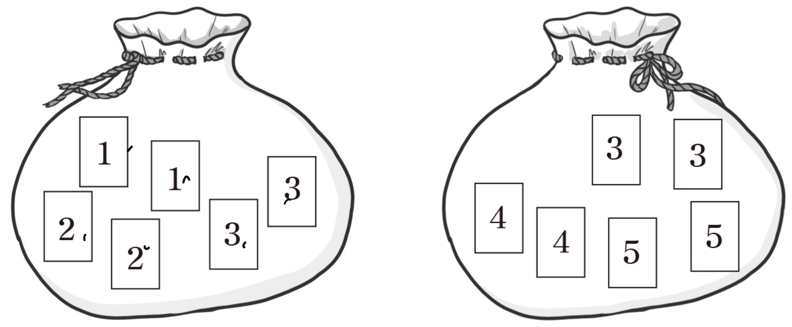
150

27. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 3, 3, 4, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 3개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 3개의 동전을 동시에 던져 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
> 앞면이 나오는 동전의 개수가 3이면
> 주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고,
> 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하이면 $\frac{7}{8}$
> 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{31}{120}$ ④ $\frac{17}{60}$ ⑤ $\frac{37}{120}$



A B

① A에서 2장뽑아 합이 소수

(1, 1) (1, 2), (2, 3)

$\frac{1}{8} \times \frac{{}_2C_2 + {}_2C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{8} \times \frac{9}{15} = \frac{3}{40}$

4+4+1

② B에서 2장뽑아 합이 소수

(3, 4)

$\frac{7}{8} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$

$\frac{3}{40} + \frac{7}{30} = \frac{9+28}{120} = \frac{37}{120}$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

> (가) $\sqrt{f(1) \times f(2) \times f(3)}$ 의 값은 자연수이다.
> (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

① 84 ② 87 ③ 90 ④ 93 ⑤ 96

f(1) f(2) f(3)

1, 1, 1 ⇒ $1 \le f(4) \le f(5) \le f(6)$ ⇒ ${}_5H_3 = 35$

1 1 4 ⇒ $4 \le$ 〃 ⇒ ${}_2H_3 = 4$

1, 2, 2 ⇒ $2 \le$ 〃 ⇒ ${}_4H_3 = 20$

1, 3, 3 ⇒ $3 \le$ 〃 ⇒ ${}_3H_3 = 10$

1, 4, 4 ⇒ $4 \le$ 〃 ⇒ ${}_2H_3 = 4$

1, 5, 5 ⇒ $5 \le$ 〃 ⇒ 1

2 2 4 ⇒ $4 \le$ 〃 ⇒ ${}_2H_3 = 4$

3 3 4 ⇒ $4 \le$ 〃 ⇒ ${}_2H_3 = 4$

4 4 4 ⇒ $4 \le$ 〃 ⇒ ${}_2H_3 = 4$

4 5 5 ⇒ $5 \le$ 〃 ⇒ 1

35 + 4(5) + 1 × 2 + 30

35 + 20 + 2 + 30

55 32

87

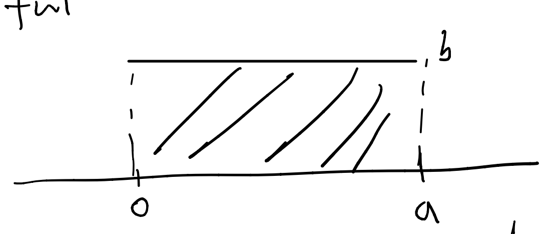
단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0 \le X \le a$, $0 \le Y \le a$이고, X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $0 \le x \le a$인 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x) = b,\ g(x) = \mathrm{P}(0 \le X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

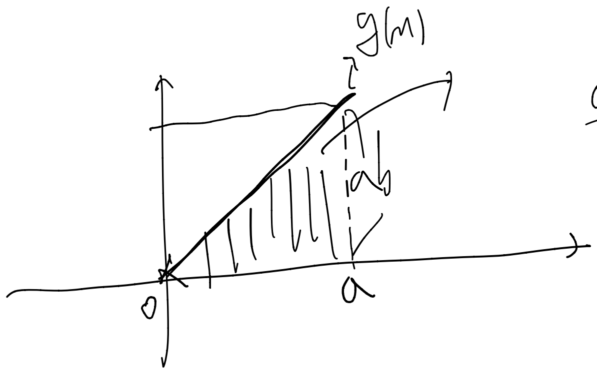
이다. $\mathrm{P}(0 \le Y \le c) = \frac{1}{2}$일 때, $(a+b) \times c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

$f(x)$



$ab = 1$

$g(x) = P(0 \le X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt = bx$



$\frac{a^2 b}{2} = 1$

$\frac{ab}{2} \times a = 1$

$a = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}x$

$\int_0^c \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^c = \frac{c^2}{4} = \frac{1}{2}$

$c^2 = 2$

$\therefore (a+b) \times c^2 = (2 + \frac{1}{2}) \times 2 = 4 + 1 = 5$

30. 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, $n\,(1 \le n \le 6)$번째에 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때, A

B $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1이 나올 확률: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2가 나올 확률: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

a_1	a_2	a_3		a_4	a_5	a_6	
2	2	2	>	2	2	1	$\Rightarrow (\frac{2}{3})^3 \times {}_3C_2 \times (\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}) = \frac{96}{3^6}$
2	2	2	>	2	1	1	$\Rightarrow (\frac{2}{3})^3 \times {}_3C_1 \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{48}{3^6}$
2	2	2	>	1	1	1	$\Rightarrow (\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{8}{3^6}$
2	2	1	>	2	1	1	$\Rightarrow {}_3C_2 \times (\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}) \times {}_3C_1 \times (\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^2 = \frac{12}{3^6}$
2	2	1	>	1	1	1	$\Rightarrow {}_3C_2 \times (\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{12}{3^6}$
2	1	1	>	1	1	1	$\Rightarrow {}_3C_1 \times (\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{6}{3^6}$

$96 + 48 + 8 + 12 + 12 + 6$

$144 + 80 + 18$

224

242

$P(A) = \frac{242}{3^6}$

a_1	a_2	a_3	>	a_4	a_5	a_6	
1	2	2	>	1	2	1	$\Rightarrow (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2 \times {}_2C_1 \times (\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) = \frac{16}{3^6}$
1	2	2	>	1	1	1	$\Rightarrow (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{4}{3^6}$
1	2	1	>	1	1	1	$\Rightarrow {}_2C_1 \times (\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{4}{3^6}$

$P(A \cap B) = \frac{24}{3^6}$

$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{24}{242} = \frac{12}{121}$

133

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$$\lim \frac{\cancel{n^4}+5n^2+5-\cancel{n^4}}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2} \Rightarrow \frac{5}{2}$$

24. $\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx.$$

$$\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx.$$

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$$

$$3\int_0^1 t\,dt$$

$$3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

25. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t\,,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\dfrac{dx}{dt}=2t\ln t+t+3$ ⇒

$\dfrac{dy}{dt}=6e^{t-1}+6te^{t-1}$

$\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{6+6}{4}=\dfrac{12}{4}=3$

26. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{7}{6}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{3}{2}$　④ $\dfrac{5}{3}$　⑤ $\dfrac{11}{6}$

$f(2)=2,\ f'(2)=\frac{1}{3}$ ⇒ $f(g(x))=x$

$g(2)=2$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(2)}=3$

$h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$

$h'(2)=\dfrac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{(f(2))^2}$

$=\dfrac{6-\frac{2}{3}}{4}=\dfrac{18-2}{12}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3}$

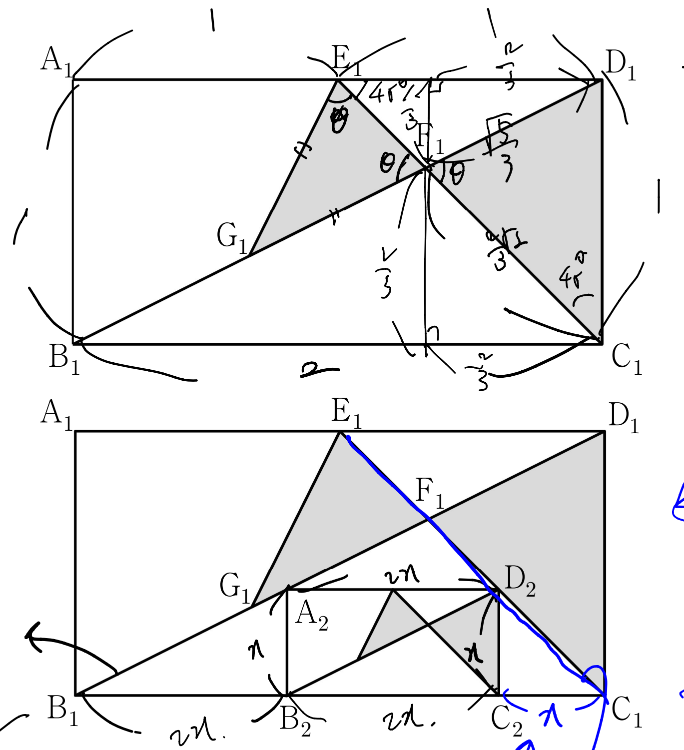
27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1

R_2



$\cos\theta = \dfrac{\frac{5}{9}+\frac{8}{9}-1}{2\times\frac{2\sqrt{10}}{9}} = \dfrac{13-9}{4\sqrt{10}} = \dfrac{4}{4\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\tan\theta = 3$

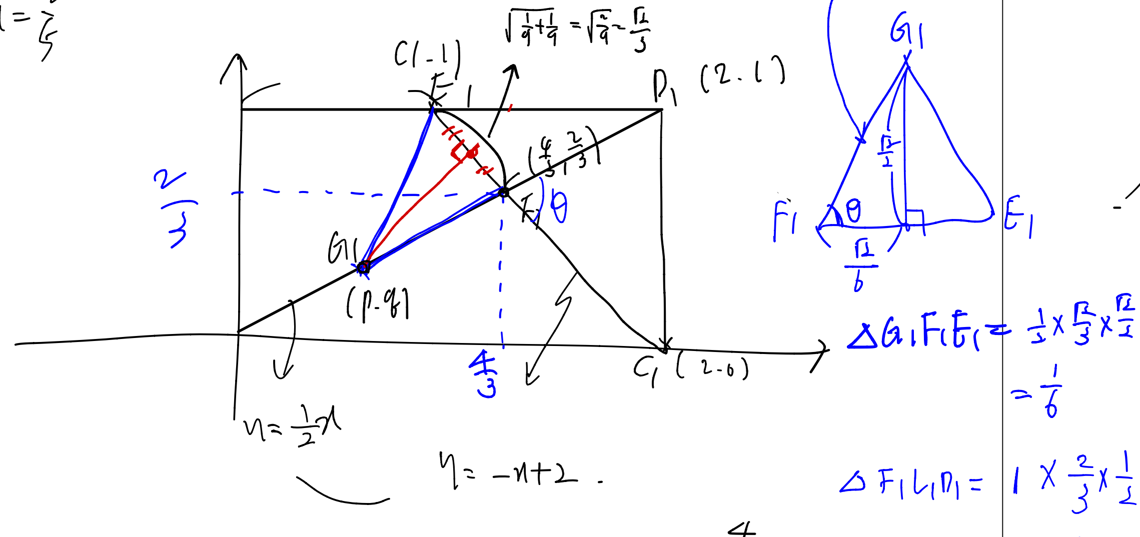
기울기 $\frac{1}{2}$

기울기 -1

$5x=2$

$x=\frac{2}{5}$

① $\dfrac{23}{42}$　② $\dfrac{25}{42}$　③ $\dfrac{9}{14}$　④ $\dfrac{29}{42}$　⑤ $\dfrac{31}{42}$



$y=\frac{1}{2}x$

$y=-x+2$

$\frac{1}{2}x=-x+2 \Rightarrow \frac{3}{2}x=2 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

$\triangle G_1F_1E_1 = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}$

$\triangle F_1C_1D_1 = 1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$S_1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

공비 $r = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{21}{25}} = \dfrac{25}{42}$

28. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$ 우함수
(나) $f(x+2)=f(x)$ 주기 2

$\int_{-1}^{1} + \int_{1}^{3} + \int_{3}^{5}$

$\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx = \frac{47}{2}$, $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2$일 때, $\displaystyle\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{5}{12}\pi$　⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

$\int_{-1}^{1} f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx = \cancel{\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx} + \int_{-1}^{1} f(x)\cos(2\pi x)\,dx$

$= 2\int_{0}^{1} f(x)\cos(2\pi x)\,dx$

$\int_{1}^{3} f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(t+2)(t+2+\cos(2\pi t+4\pi))\,dt$

$x=t+2$

$= \int_{-1}^{1} f(t)(t+2+\cos(2\pi t))\,dt$

$= \int_{-1}^{1} f(t)(t+\cos(2\pi t))\,dt + 2\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$

$= 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi x)\,dx + 4\int_0^1 f(x)\,dx$

$\int_{3}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(t+4)(t+4+\cos(2\pi t+8\pi))\,dt$

$x=t+4$

$= \int_{-1}^{1} f(t)(t+4+\cos(2\pi t))\,dt$

$= 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi x)\,dx + 8\int_0^1 f(x)\,dx$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)\,dx = 6\int_0^1 f(x)\cos(2\pi x)\,dx + 24 = \frac{47}{2}$

$6X+24=\frac{47}{2} \Rightarrow 6X=-\frac{1}{2}$

$X=-\frac{1}{12}$

$\therefore \int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx = \int_0^1 \sin(2\pi x) f'(x)\,dx$

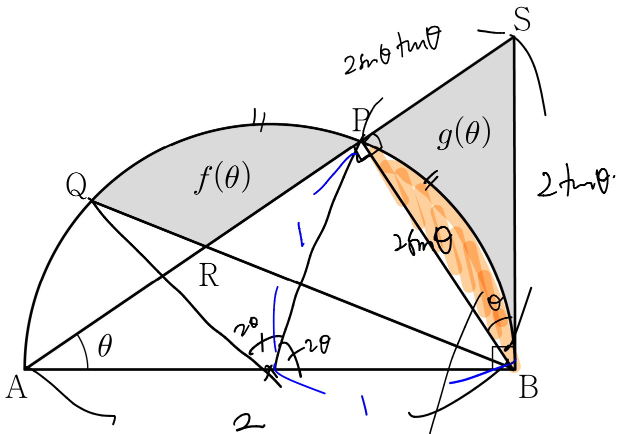
$= \left[\sin(2\pi x) f(x)\right]_0^1 - 2\pi\int_0^1 \cos(2\pi x) f(x)\,dx$

$= 0 - 2\pi\times\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$

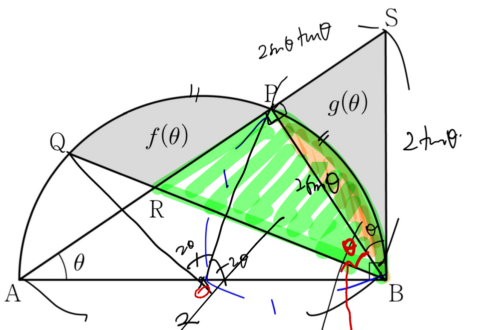
단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP = \theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$S_1 = \frac{1}{2}\times 1^2 \times 2\theta - \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin 2\theta$

$= \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$

$g(\theta) = \triangle BPS - S_1$

$= \frac{1}{2}\times 2\sin\theta\tan\theta \times 2\sin\theta - S_1$

$= 2\sin^2\theta\tan\theta - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}$

$S_2 = \triangle BRP + S_1$

$\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\angle OBQ = \frac{\pi - 4\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$\Rightarrow \angle RBP = \frac{\pi}{2} - \theta - (\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \theta$

$\overline{PR} = 2\sin\theta\tan\theta$

$\therefore S_2 = \frac{1}{2}\times 2\sin\theta\tan\theta \times 2\sin\theta + S_1$

$= 2\sin^2\theta\tan\theta + \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$

$f(\theta) = (\text{부채꼴}) - S_2 = \left(\frac{1}{2}\times 1^2 \times 4\theta - \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin 4\theta\right) - S_2$

$= 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} - 2\sin^2\theta\tan\theta - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2}$

$= \theta - \frac{\sin 4\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2} - 2\sin^2\theta\tan\theta$

$\Rightarrow f(\theta)+g(\theta)$

$= \sin 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2}$

$= \sin 2\theta - \frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta}{2}$

$= \sin 2\theta - \sin 2\theta\cos 2\theta$

$= \sin 2\theta(1-\cos 2\theta)$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin 2\theta(1-\cos 2\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin 2\theta}{\theta} \times \frac{1-\cos 2\theta}{(2\theta)^2} \times 4$

$2 \times \frac{1}{2} \times 4 = 4$

30. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x) = e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x) = k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
> (나) $\lim_{k\to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x = 0$) [4점]

$f(x) = a(x-p)^2 + q$

$a>3,\ q>0$

$g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = (f(x)+f'(x))e^x$

$= (a(x-p)^2 + q + 2a(x-p))e^x$

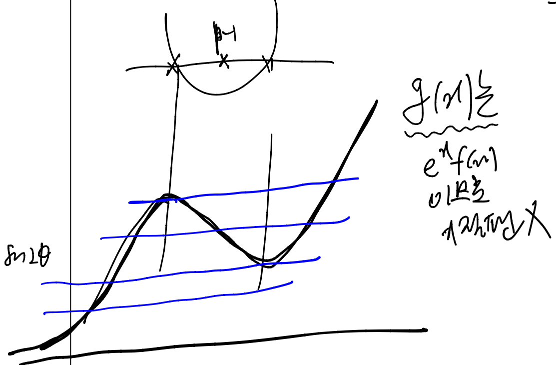
$= (a(x-p)(x-p+2) + q)e^x$

$-a+q<0 \Rightarrow q<a$

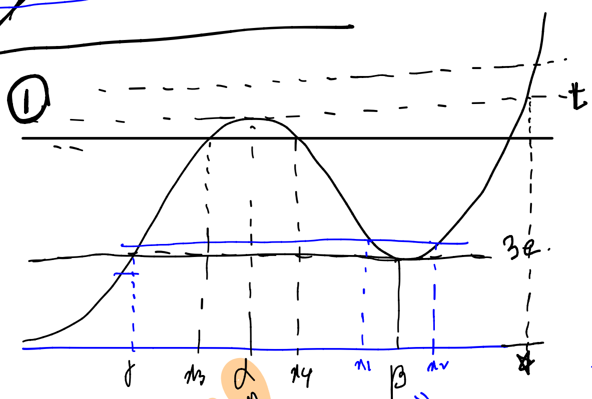
$g(x)$는 $e^x f(x)$ 이므로 극값없X

중근X

중근이면 해결X



①



$\beta = 1$

$\alpha + \beta$

$x_1 \to \beta$

$x_2 \to \beta$

$x_3 \to \alpha = 0$

$x_4 \to \alpha = 0$

$x_3 + x_4 \to 2\alpha = 0$

$3e$ t

$\alpha = 0$, β

$a x(x-1) = f(x) + f'(x)$

$ax^2 - ax$

$ax^2 + bx + c + 2ax + b$

$ax^2 + (2a+b)x + b + c$

$b+c = 0$, $2a+b = -a$

$c = -b$, $b = -3a$

$= 3a$

$\therefore g(x) = e^x f(x)$

$= e^x(ax^2+bx+c)$

$= e^x(ax^2 - 3ax + 3a)$

$= ae^x(x^2 - 3x + 3)$

$g(1) = 3e \Rightarrow ae(1) = ae = 3e \Rightarrow a = 3$

$g(x) = 3e^x(x^2 - 3x + 3)$

$a=3$이므로 모순 ($\because a>3$)

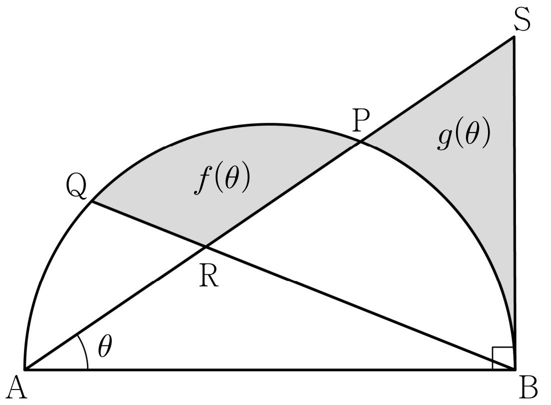
다음페이지 계속

* 확인 사항
  - 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
  - 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle \mathrm{BAP}=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



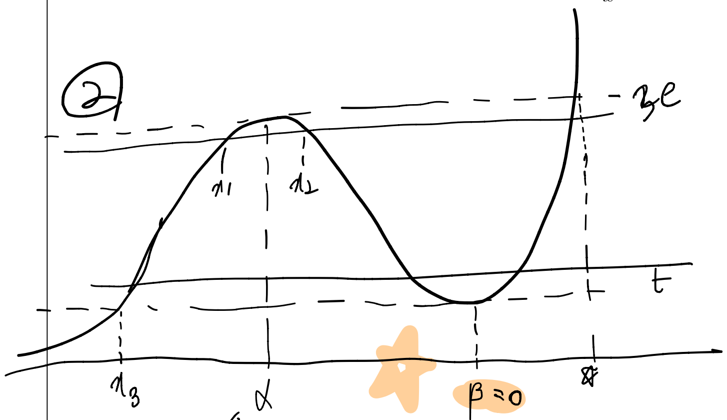
30. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

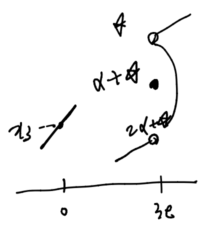
$$g(x)=e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x)=k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6) \times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$) [4점]



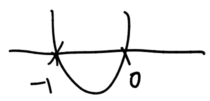


$-2\alpha = 2$

$\alpha = -1$

$-1 = \alpha$

$x_1 \to \alpha$ $x_1 + x_2 \Rightarrow 2\alpha$
$x_2 \to \alpha$



$a x(x+1) = ax^2 + ax = f(x) + f'(x)$
$ax^2+bx+c + 2ax+b$
$= ax^2 + (2a+b)x + b+c$

$b+c=0$ $2a+b=a$
$c=-b$ $b=-a$
$=a$

$\therefore g(x) = e^x f(x) = e^x(ax^2+bx+c)$
$= e^x(ax^2 - ax + a)$
$= ae^x(x^2-x+1)$

$g(-1)=3e \Rightarrow ae^{-1}(1+1+1) = \frac{3a}{e} = 3e \Rightarrow a=e^2$ (a>3) 만족

$\therefore g(x) = e^2 e^x (x^2-x+1)$

$g(-6) = e^{-4}(36+6+1) = 43\cancel{e^{-4}}$
$g(2) = e^4(4-2+1) = 3\cancel{e^4}$
$\Rightarrow$ x 129

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2m-1,\ 3m+1)$, $\vec{b}=(3,\ 12)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2m-1=3k$

$3m+1=12k.$

$8m-4=12k$

$-\ 3m+1=12k$

$5m-5=0$

$m=1$

24. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$x=-1.$

$yy_1=2p(x+x_1)$

$6y=2(x+9)$

$y=\frac{1}{3}(x+9)=\frac{1}{3}x+3$

$-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3}=b$

$-1+\frac{8}{3}=\frac{5}{3}$

25. 좌표평면에서 두 점 A$(-2, 0)$, B$(3, 3)$에 대하여

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 6π ② 7π ③ 8π ④ 9π ⑤ 10π

$P=(x, y)$ $(x, y)+(-6, -6)$

$(x+2, y)\cdot(x-6, y-6)$

$x^2-4x-12+y^2-6y=0$

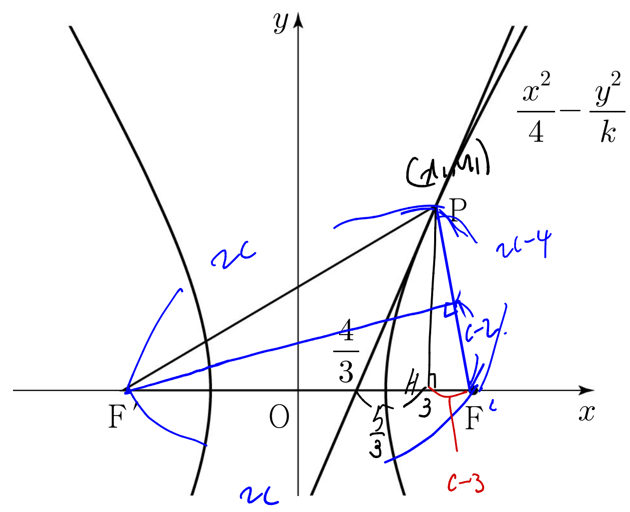
$(x-2)^2+(y-3)^2=12+4+9$

$=25$

10π

26. 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\dfrac{4}{3}$이다. $\overline{PF'}=\overline{FF'}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



$\dfrac{x_1 x}{4}-\dfrac{y_1 y}{k}=1$

$\dfrac{x_1}{3}=1 \Rightarrow x_1=3.$

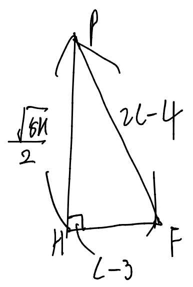
$\dfrac{9}{4}-\dfrac{y_1^2}{k}=1$

$\dfrac{y_1^2}{k}=\dfrac{5}{4}$

$y_1^2=\dfrac{5}{4}k$

$y_1=\dfrac{\sqrt{5k}}{2}$

$4+k=c^2$



$\dfrac{5k}{4}+(c-3)^2=(2c-4)^2$

$\dfrac{5}{4}(c^2-4)+c^2-6c+9=4c^2-16c+16$

$\dfrac{5}{4}c^2-5=3c^2-10c+7$

$\dfrac{7}{4}c^2-10c+12=0$

$7c^2-40c+48=0$

$7c \quad -12$

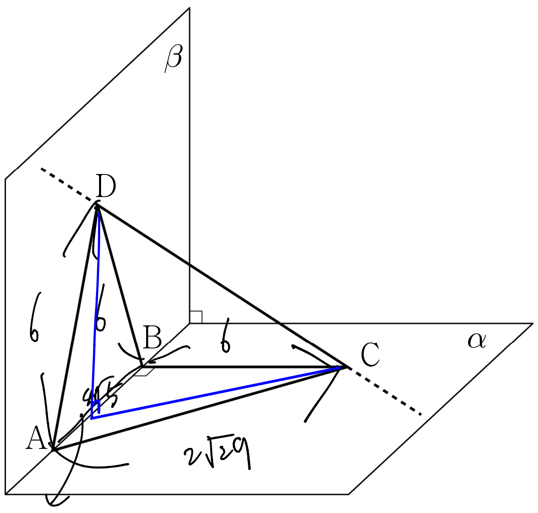
$c \quad -4$

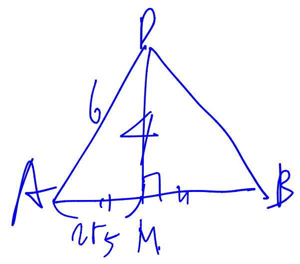
$c=\dfrac{12}{7}$ $c=4$ $(\because c>3)$

$4+k=16 \Rightarrow k=12$

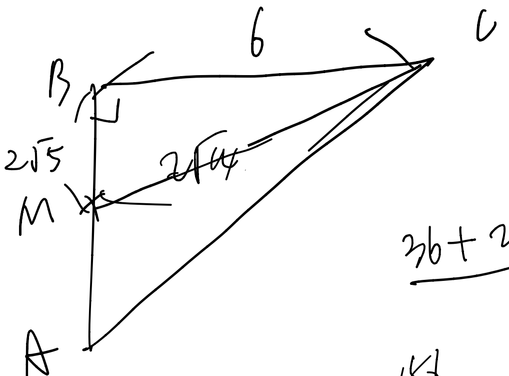
27. 공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에 $\overline{AC}=2\sqrt{29}$, $\overline{BC}=6$인 점 C와 평면 β 위에 $\overline{AD}=\overline{BD}=6$인 점 D가 있다. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{29}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{31}}{6}$

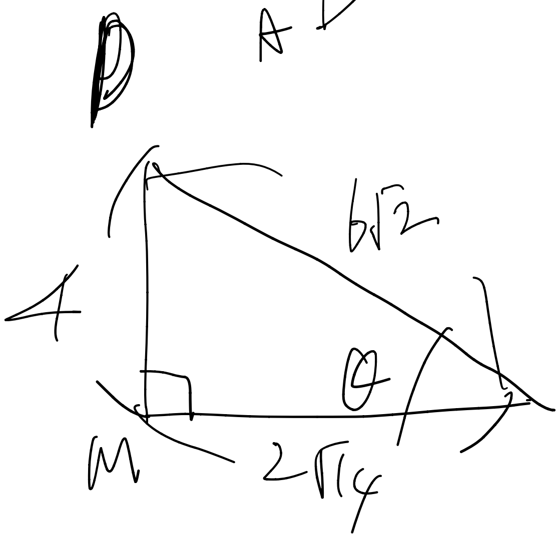




36 − 20 = 16.



36 + 20.



$\cos\theta = \frac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

16 + 56 ⇒ 72

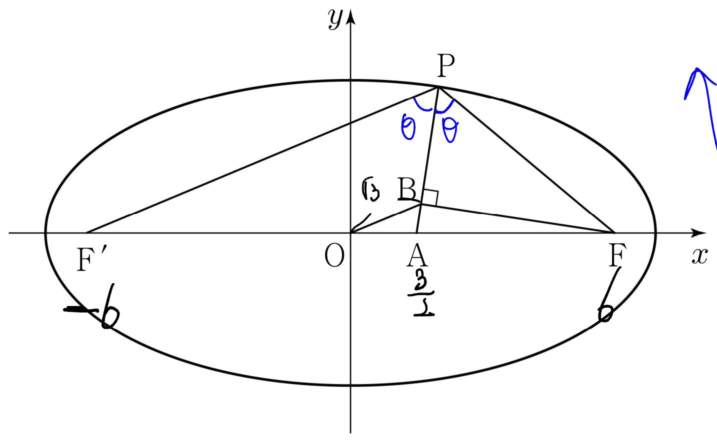
28. 그림과 같이 F(6, 0), F′(−6, 0)을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 $\angle FPA=\angle F'PA$를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{OB}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.) [4점]

$a^2-b^2=36$

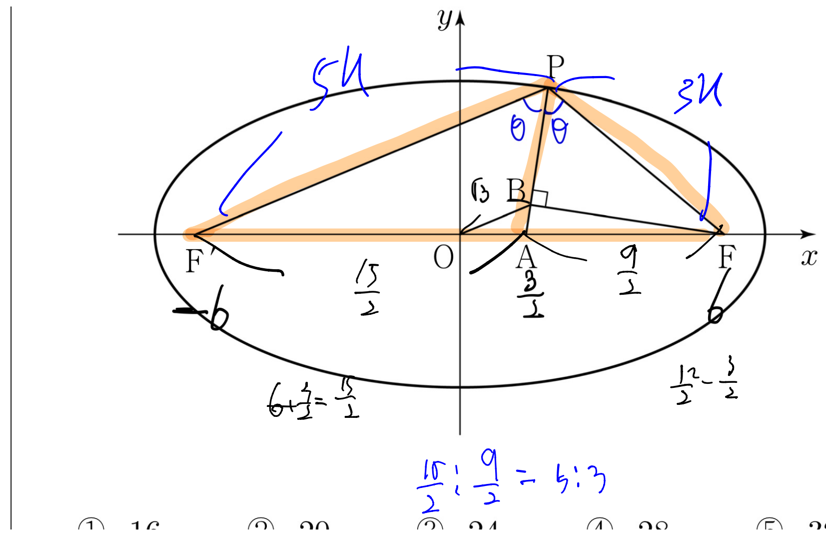
$16k^2-b^2=36$

$b^2=16k^2-36$

$b=\sqrt{16k^2-36}$

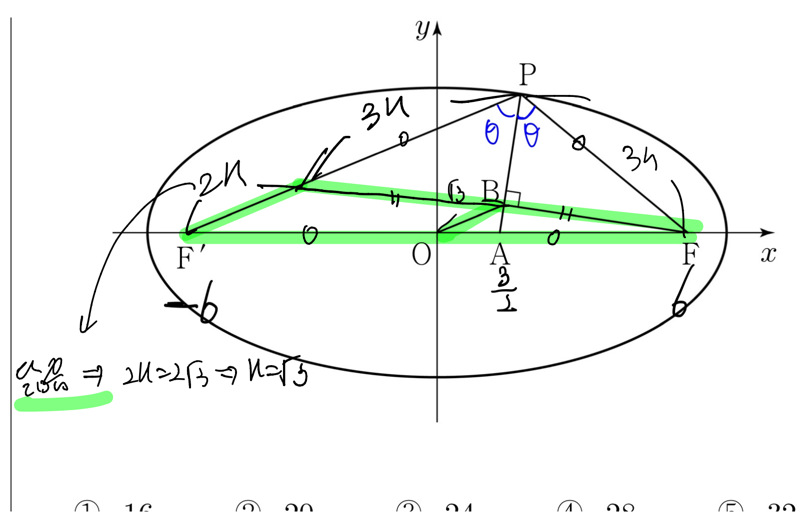


① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32



$\frac{15}{2} : \frac{9}{2} = 5:3$

$5k+3k=8k=2a \Rightarrow 4k=a$



$a\times b = 4k\times\sqrt{16k^2-36}$

$= 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3} = 24$

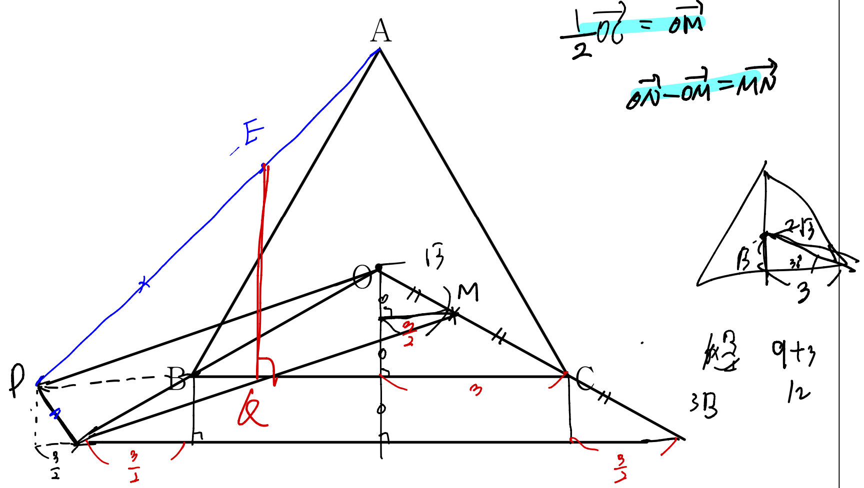
단답형

29. 평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{OA}|$를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

$\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MN}$

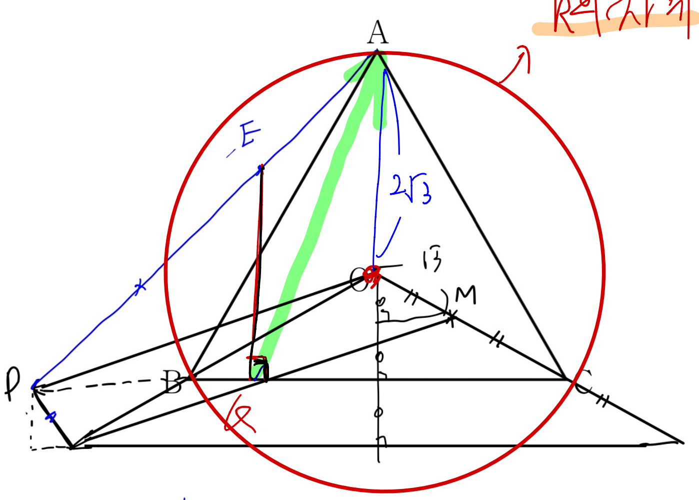


$3\left|\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}}{3}\right|=3|\overrightarrow{PE}|$

선분 AD 1:2 내분점

$|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{OA}|$

R의 자취



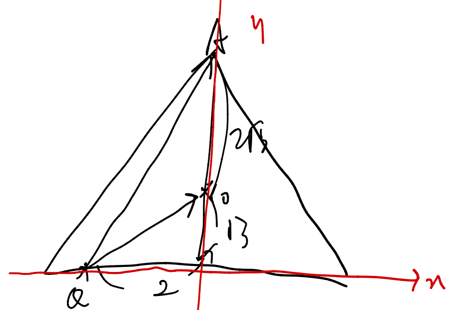
$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})=\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR}$

최댓값

$|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{OR}|$

$\sqrt{31}\times2\sqrt{3}$

$2\sqrt{93}$



좌표설정 $\overrightarrow{QO}=(2,\sqrt{3})$ $\overrightarrow{QA}=(2,3\sqrt{3})$

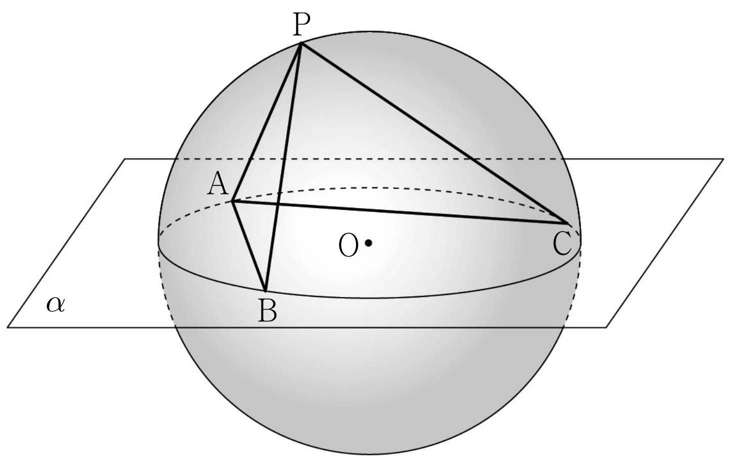
$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=4+9=13$

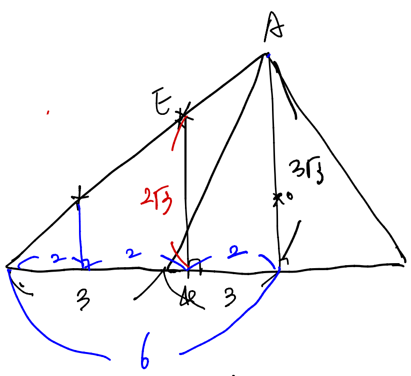
∴ $13+2\sqrt{93}$ ⇒ 15

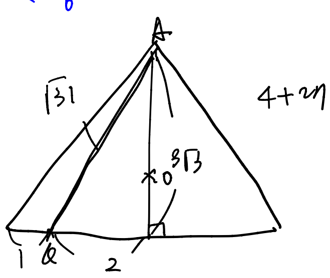
30. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\angle PAO=\frac{\pi}{3}$
>
> (나) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle PAB)=\frac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30\times S^2$의 값을 구하시오.
(단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]







* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

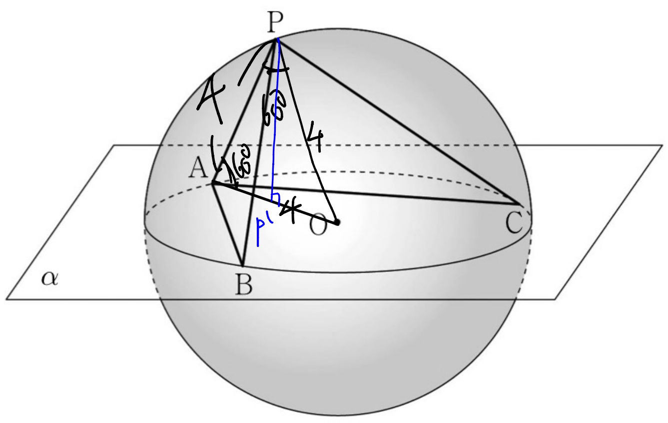
단답형

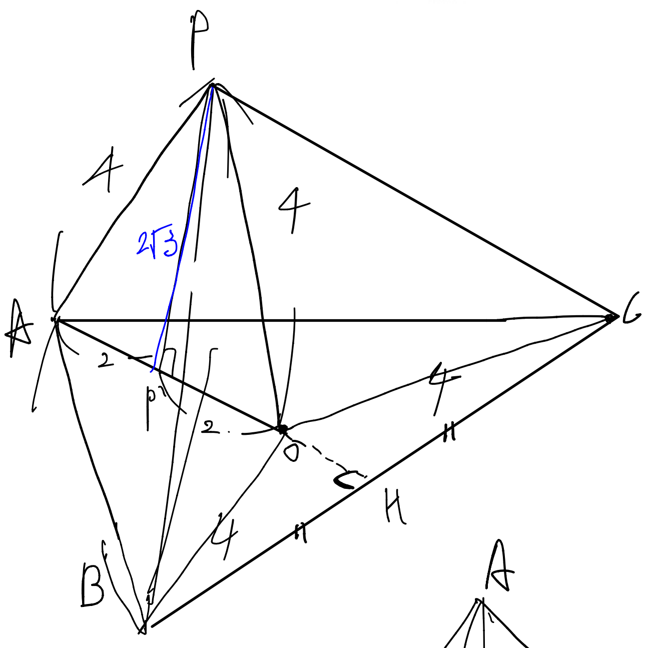
30. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

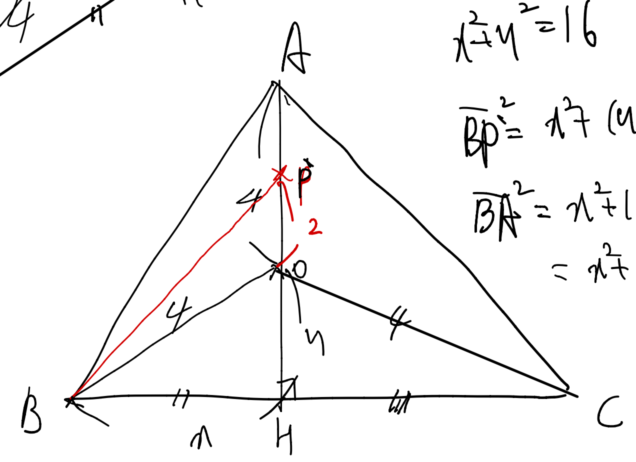
(가) $\angle PAO = \frac{\pi}{3}$ → △AOP 정삼각형 → $\overline{AP}=4$.

(나) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle PAB) = \frac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30\times S^2$의 값을 구하시오. (단, $0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}$) [4점]







$x^2 = 16 - y^2$

$x^2+y^2=16$

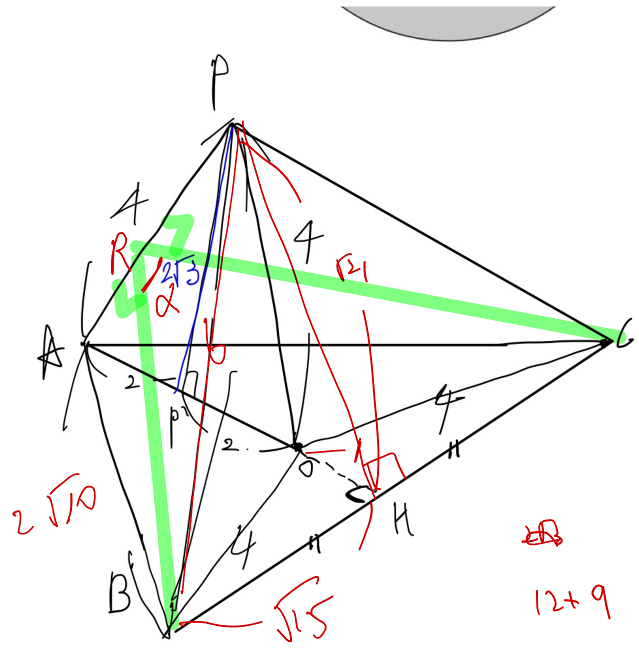
$\overline{BP}^2 = x^2+(y+2)^2 \Rightarrow \overline{BP}^2 = x^2+(y+2)^2+12$

$= 16+4y+16 = 4y+32 = 36.$

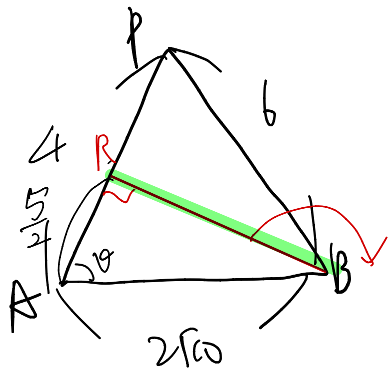
$\overline{BA}^2 = x^2+(y+4)^2$

$= x^2+y^2+8y+16 = 8y+32$

40

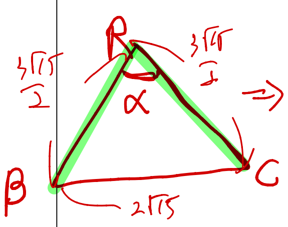


12+9



$\overline{AR} = \overline{AB}\cos\theta = 2\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{10}}{8} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\sqrt{40-\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{160-25}{4}} = \sqrt{\frac{135}{4}} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$



$\cos\alpha = \frac{\frac{135}{4}+\frac{135}{4}-60}{2\times\frac{135}{4}} = \frac{\frac{135}{2}-60}{\frac{135}{2}} = \frac{135-120}{135} = \frac{15}{135} = \frac{1}{9}$

$\therefore S = \triangle ABP \times \cos\alpha = 3\sqrt{15}\times\frac{1}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore 30\times S^2 = 30\times\frac{15}{9} = 50$

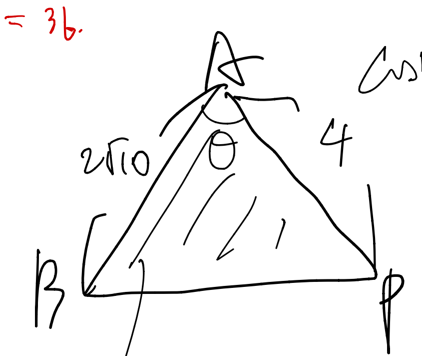
$\cos(\angle PAB) = \frac{\overline{BA}^2+16-\overline{BP}^2}{2\times4\,\overline{BA}} = \frac{4y+16}{2\times4\sqrt{x^2+y^2+8y+16}} = \frac{y+4}{\sqrt{8y+32}} = \frac{\sqrt{10}}{8}$

$4(y+4) = \sqrt{10}\sqrt{y+4}$

$16(y+4)^2 = \frac{80(y+4)}{5}$

$(y+9)(y+4-5)=0$

$(y-1)^2=0 \quad \therefore y=1$



$\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{8}$

$\sin\theta = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

$64-10$

$\sqrt{54}$

$3\sqrt{6}$

$\triangle ABP = \frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times4\times\frac{3\sqrt{6}}{8}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{60} = 3\sqrt{15}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.