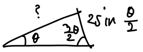
삼도극 정리

· '변'을 '각'으로 표시하여 넓이 / 길이 등등을 구하는 문제.

- 각을 잘 표시해야 한다.

이등변, 맞꼭지각, 엇각, 원주각, 원 안에서 마주보는 각 등등을 염두에 두어야 한다. 각이 최우선!!!

- 사인 법칙은 기본.



$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = \frac{?}{\sin\frac{3}{2}\theta}.$$

θ가 0으로 갈 때는 ?는 $\frac{3}{2}\theta$로 수렴하겠지?

- 근사? 최저차항?

〈 $\theta \to 0$으로 수렴할 경우 〉

$\sin\theta \approx \theta$, $\tan\theta \approx \theta$, $1-\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$

이는 사실 그렇게 '애매'는 아니다. 테일러 전개라고 들어봤는지 모르겠는데, $\cos x$, $\sin x$ $\tan x$, e^x 등등을 '무한차' 다항함수로 표현할 수 있다.

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{x^5}{5!} \cdots\cdots$ 이런 식으로 말이지.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{x^5}{5!}\cdots}{x} = 1.$ $x \to 0$으로 갈 때는 최저차항 계수를 보는 것 알고 있지? 대충 이런 배경으로 근사가 통한다구.

- 근사를 쓸 땐 두 가지만 조심.

'□ − □' 꼴, 그리고 θ가 0으로 가지 않는 경우. 그냥 계속 써 봐. 그리고 틀려봐야 언제 쓰고 안 쓸지 스스로 깨달음.

- 때로는 cos 법칙, 피타고라스가 들어오기도 한다.

어쨌든 각을 통해 변을 표현하기만 하면 되니, 필요할 때 '혹시?' 라고 생각이라도 하게 염두에 둘 것.

- 중등 기하가 중요함. (나중에 따로 정리)

- 같은 값이 다양하게 표현된다. 그래도 괜찮음

ex) $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$. 어차피 둘 다 2θ로 근사.

- 그냥 0이 아니라 값으로 수렴하는 애들은 미리 계산해도 괜찮음.

(원래는) $\lim_{\theta\to 0} f(\theta)g(\theta) \neq \lim_{\theta\to 0} f(\theta) \cdot \lim_{\theta\to 0} g(\theta)$ 지만, $\lim_{\theta\to 0} f(\theta)g(\theta)$ 가 수렴한다는 걸 안다는 전제 하엔 $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$ 가 수렴하면 쪼개도 되니깐

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \cdot \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1\cdot 1 = 1$ 처럼? 그냥 $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta\sin\theta \approx \theta$로 봐도 괜찮다는 얘기.

$\theta \to 0$이 아닐 땐?

일단 변을 싹 다 근사없이 표현해봐. 그 다음 $S(\theta)$를 '온전한' (근사없이) 식으로 쓰고,

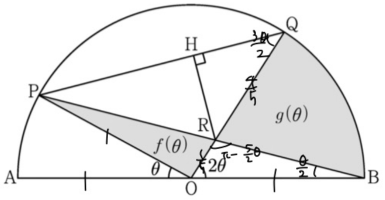
① 치환 ← $(\theta - \frac{\pi}{3})$을 α로 놓으면, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} (\theta - \frac{\pi}{3})$을 $\lim_{\alpha\to 0} \alpha$로 표현 가능하겠지? 여기서 근사.

그러나 삼각함수의 덧셈정리가 들어오는 것은 좀 귀찮음.

②. 미분

어차피 $\lim \frac{0}{0}$ 꼴이라 미분 (로피탈도 가능) 계수의 정의로 풀면 됨.

30. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q의 교점을 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.30) (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



근사. $\sin\theta \simeq \theta$

$\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{?}{\sin(\pi-\theta)}$ θ→0일때 ?은 어디로수렴?

$\rightarrow 2 \approx \overline{PB}$

Q O B : $\frac{1}{2}\cdot 2\theta\cdot 1 = \boxed{\theta}$

$\triangle POB$: $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta \simeq \boxed{\frac{\theta}{2}}$

$\triangle ROB$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot\sin 2\theta \simeq \boxed{\frac{\theta}{5}}$

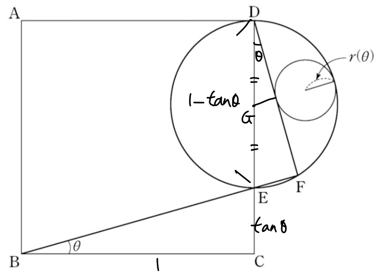
$f(\theta)+g(\theta) = \frac{4}{5}\theta + \frac{3}{10}\theta = \frac{11}{10}\theta$

$\overline{RH} \simeq \frac{12}{10}\theta$

답: $\frac{11}{12} \longrightarrow \boxed{23}$

[2017학년도 9월 20번]

3. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은?3) (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$ ④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

$\overline{DG} = \frac{1-\tan\theta}{2}$

$2r(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{2} - \frac{1-\tan\theta}{2}\sin\theta$

$r(\theta) = \frac{1}{4}\cdot(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)$

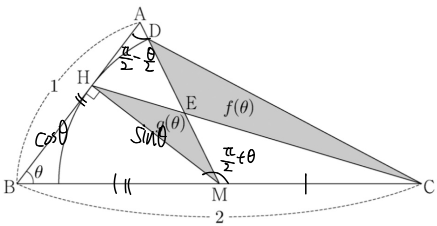
$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\tan\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$= \frac{1}{4}\cdot(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot \sec^2\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

[2021학년도 6월 28번]

31. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하여라.[31] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



$\angle AMC = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$

$\triangle DMC$: $\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$\boxed{15}$

$\triangle HMC$: $\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$\frac{f-g}{\theta^3} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{\theta^3}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta-\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}$$

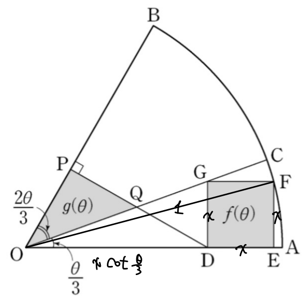
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{8}\theta^2}{\theta^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

[2018학년도 6월 28번] (피타?)

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하여라.[18]

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD}<\overline{OE}$이다.)



$$x^2 + x^2\left(1+\cot\frac{\theta}{3}\right)^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2+2\cot\frac{\theta}{3}+\cot^2\frac{\theta}{3}} = f(\theta)$$

$$g(\theta) = \left(x\cot\frac{\theta}{3}\cdot\cos\theta\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{2}{3}\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta\cdot\cot^2\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{2}{3}\theta} =$$

$$\frac{\frac{1}{\theta\cdot\frac{2}{3}\theta}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\theta}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{\cancel{\theta^2}}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cancel{\theta^2}} = \frac{2\cdot 3}{18} = \frac{1}{3}$$

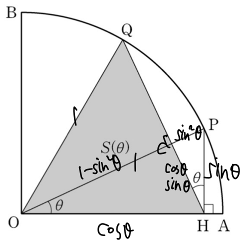
$\boxed{20}$

이 문제에선

* x 가 지워지기에 $x^2 = h(\theta)$ 를 구할 필요는 없지만 x를 θ에 대해 표현하려면 피타를 써야함을 알 수 있음이 핵심.

[2019학년도 6월 16번] 티타

34. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{POH} = \angle \mathrm{PHQ}$가 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?34) (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)



① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

$\overline{QC} = \sqrt{1 - 1 + 2\sin^2\theta - \sin^4\theta}$

$\left(\sqrt{2\sin^2\theta - \sin^4\theta} + \cos\theta\sin\theta\right) \cdot (1-\sin^2\theta) \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{\sin\theta\left(\sqrt{2-\sin^2\theta} + \cos\theta\right)}{\theta} \cdot \frac{1}{2}$

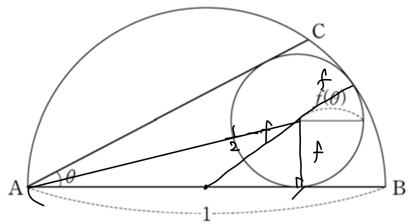
$= \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

[2016학년도 6월 29번] 중등 기하 + 티타

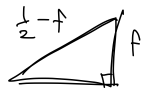
4. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α의 값을 구하여라.4) (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



$\frac{f}{\tan\frac{\theta}{2}}$



$\frac{f}{\tan\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$

$\boxed{25}$

$\frac{f^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}} - \frac{f}{\tan\frac{\theta}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{f^2} = \cancel{f^2} - f + \cancel{\frac{1}{4}}$

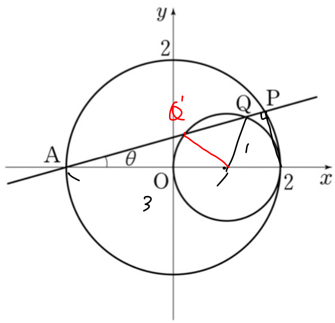
$\frac{f^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}} - \frac{f}{\tan\frac{\theta}{2}} + f = 0$

$f^2 - f\tan\frac{\theta}{2} + f\tan^2\frac{\theta}{2} = 0$

$\boxed{f = -\tan^2\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}}$

[2013학년도 9월 20번] 코사인 법칙

7. 그림과 같이 점 $A(-2, 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle OAP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은?[7)]



① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$

④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

$\overline{AP} = 4\cos\theta$

$1 = \overline{AQ}^2 + 9 - 6\overline{AQ}\cos\theta$

$\overline{AQ}^2 - 6\overline{AQ}\cos\theta + 8 = 0$

$\overline{AQ} = 3\cos\theta + \sqrt{9\cos^2\theta - 8}$　(* $3\cos\theta - \sqrt{9\cos^2\theta-8}$ 은 AQ'의 길이)

$\dfrac{\overline{QP}}{\theta} = \dfrac{\cos\theta - \sqrt{9\cos^2\theta - 8}}{\theta^2} = \dfrac{8 - 8\cos^2\theta}{\theta^2(\cos\theta + \sqrt{9\cos^2\theta-8})}$

$= \dfrac{8}{2} = \boxed{4}$