정적분 100題

著 : 雀 (ver. 20220629)
sukita1729@gmail.com

(1) 각변환

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cot\theta$

(2) 덧셈정리

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\quad(1\mp\tan\alpha\tan\beta\neq 0)$

(3) 배각공식

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\quad(1-\tan^2\alpha\neq 0)$

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\tan 3\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\quad(1-3\tan^2\alpha\neq 0)$

(4) 반각공식

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

(5) 곱을 합 또는 차로 고치는 공식

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

(6) 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(7) 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right),\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}-\alpha$$

(8) 삼각함수 항등식

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta+1 = \sec^2\theta$$

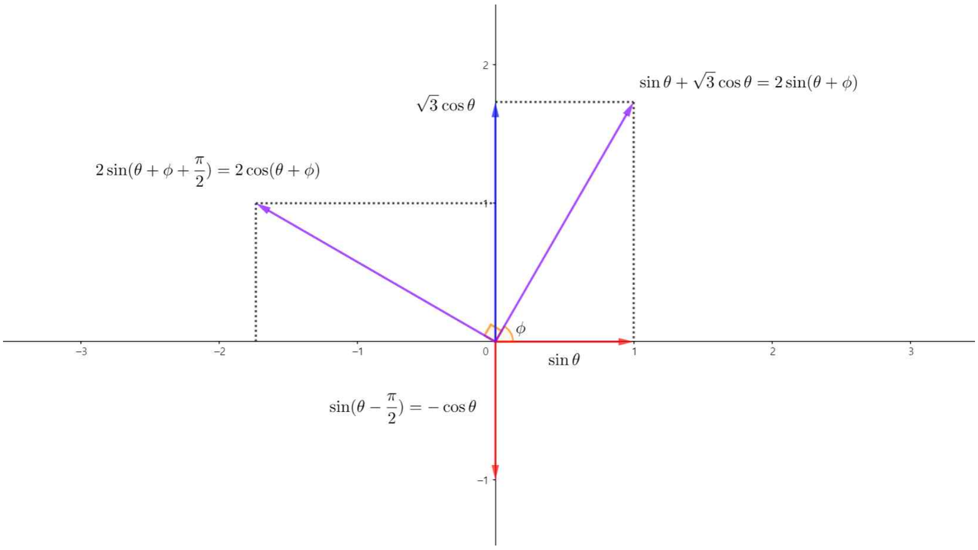
$$\cot^2\theta+1 = \csc^2\theta$$

(9) 부정적분과 미분

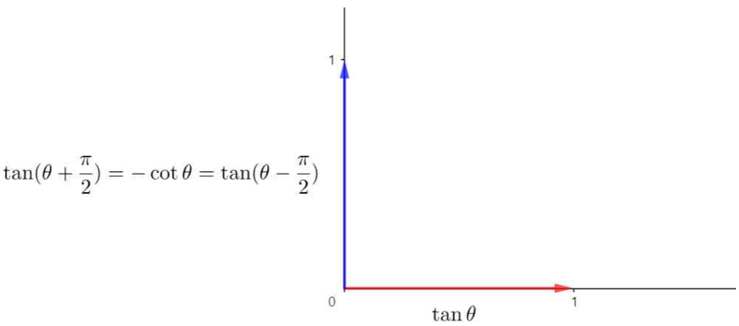
① $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

② $\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x)+C$

(10) 삼각함수 위상자(Phasor)



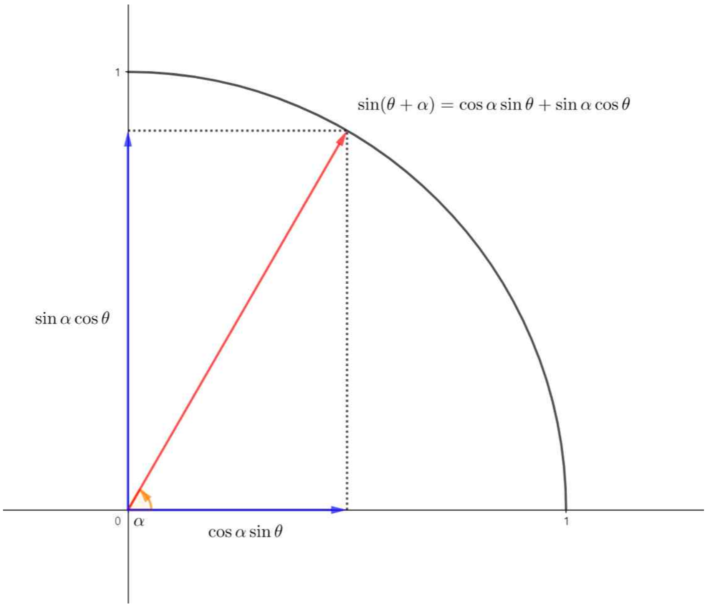
- x축의 양의 방향을 sin축, y축의 양의 방향을 cos축으로 설정하여 삼각함수의 위상을 벡터로 표현한다.
- 각이 더해질 경우 위상자는 길이는 유지된 채 반시계방향으로 회전한다.
- 위상자가 표현하는 삼각함수의 계수는 그 위상자의 길이로 표현된다.
- 서로 다른 두 위상자를 벡터합하면 이는 각 위상자가 표현하는 삼각함수의 합성과 같다. 가령, 위 사진에서 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta+\phi)$이고 $\phi = \frac{\pi}{3}$이다.
- $\sin\theta$ 위상자를 시계방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전시키면 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$이며, 이는 $-\cos$축이므로 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$이다.
- sin을 csc로, cos을 sec로 바꾸면 csc와 sec에 대한 각변환이 가능하나 덧셈정리와 합성은 성립하지 않는다. 즉, $\csc\theta + \sqrt{3}\sec\theta = 2\csc(\theta+\phi)$는 성립하지 않는다.



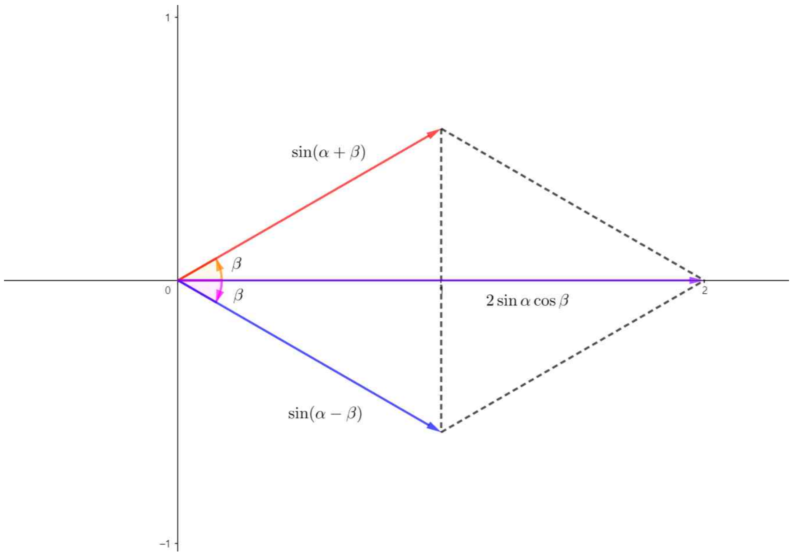
- tan와 $-\cot$의 경우 위와 같이 xy평면의 제 1사분면만을 이용하여 도시할 수 있다. 이 경우 주기가 π이므로 시계방향으로 회전하는 경우 돌아간 각도를 $\frac{3}{2}\pi$가 아닌 $\frac{\pi}{2}$로 본다.

(11) 삼각함수 위상자의 활용

- 삼각함수 위상자를 사용하면 (1), (2), (5), (6), (7)의 공식들은 모두 증명 가능하다. 이에 대한 예시로 (2)와 (5)의 첫 번째 공식의 증명을 제시해 놓는다.



그림과 같은 단위원에서 $\sin(\theta+\alpha)$는 $\sin\theta$축에서 길이 1인 위상자가 각도 α만큼 회전한 것이다. 따라서 위상자의 종점에서 sin축, cos축에 각각 수선의 발을 내리면 원점을 시점으로 하고 두 수선의 발을 종점으로 하는 두 위상자의 길이는 각각 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$이다. 즉 처음의 $\sin(\theta+\alpha)$ 위상자(빨간색)를 sin축 성분과 cos축 성분의 두 위상자(파란색)로 분해할 수 있고 이들의 길이는 각각 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$이므로, $\sin(\theta+\alpha)=\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta$가 성립한다.



그림과 같이 기준각이 α인 위상 평면에서 $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$는 길이가 1인 $\sin\alpha$축 위상자가 각각 β, $-\beta$만큼 회전한 것이다. 따라서 이들을 합성한 보라색 위상자는 $\sin\alpha$축으로 길이가 $2\cos\beta$인 위상자이므로 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$이고 증명이 완료되었다.

이와 비슷한 방법으로 (1), (2), (5), (6), (7)의 공식들을 모두 증명할 수 있다.

(12) 부정적분의 기본 성질

① $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$

② $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (복부호동순)

(13) 치환적분법

① $g(x) = t$일 때, $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

② $\int f(x)dx = F(x) + C$일 때, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

③ $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

④ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

(14) 바이어슈트라스 치환 (Weierstrass Substitution)

- 바이어슈트라스 치환은 삼각함수의 유리 적분을 유리식의 적분으로 바꿔주는 치환법이다.

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(15) 오일러 치환 (Euler's Substitution)

- 오일러 치환은 유리 이변수 함수 R에 대하여 다음과 같은 부정적분을 계산하기 위한 치환법이다.

$$\int R(x, \ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

[1] 제 1종 오일러 치환

$a > 0$일 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$

$$x = \frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a} - b}$$

와 같이 치환한다.

[2] 제 2종 오일러 치환
$c>0$일 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$

$$x = \frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$$

와 같이 치환한다.

[3] 제 3종 오일러 치환
방정식 $ax^2+bx+c=0$이 두 실근 α, β를 가질 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$

$$x = \frac{\alpha\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$$

와 같이 치환한다.

(16) 부정적분 공식 ($C\in\mathbb{R}$)

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a dx = ax + C$ $(a\in\mathbb{R})$
3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $(-1\neq n\in\mathbb{R})$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(0<a\neq 1)$
7. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
11. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
12. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

13. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

14. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

15. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

16. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

17. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

18. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

21. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

22. $\int \sin^{-1} dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$

23. $\int \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$

24. $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

(17) 헤비사이드 법 (부분분수 분해)

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x-a_i} = \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{x-a_n}$ 일 때

$\frac{f(x)}{(x-a_i)} = h_i(x)$라 하면 $b_i = \frac{g(a_i)}{h_i(a_i)}$가 성립한다. $(1 \leq i \leq n)$

(18) 부분적분법

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(19) 삼각함수의 거듭제곱의 부정적분 공식 (Reduction Formula)

$n \in \mathbb{N} - \{1\}$,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

(20) 이상적분 (Improper Integration)

- 이상적분은 적분구간의 끝 값이 특정 실수값 또는 $\pm\infty$로 접근할 때의 정적분이다. (양끝값이 모두 극한으로써 작용할 수도 있다.)

- 즉,

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,\quad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx,\quad \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$$

등과 같은 정적분이다. (Apostol, T (1967), Calculus, Vol. 1 (2nd ed.), Jon Wiley & Sons.) 또한 기호의 남용(abuse of notation)에 의해 적분구간에 $\pm\infty$ 등을 포함하여 쓰기도 한다.

- 예를 들어, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1$이다.

- 또한, $\frac{1}{\sqrt{x}}$의 경우 $x=0$에서 정의되지 않지만 구간 $[0,1]$에서의 이상적분은 정의 가능하다. 즉,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0+}(2-2\sqrt{a})=2$$

이다. 이상적분을 극한으로 변환하여 계산할 때 극한이 발산하면 이상적분이 발산한다고 하고, 대표적인 예시로 $\frac{1}{x}$를 0부터 1까지 적분한 이상적분은 발산한다. 이상적분의 정의에 따른 극한이 수렴할 경우 그 수렴값을 이상적분의 값으로 한다.

- 적분구간의 내점에서 함수가 무한대로 발산하는 등 유계가 아닌 구간이 존재하면, 그 점을 기점으로 적분구간을 쪼갠 후 적분을 진행해야 한다. 예를 들어,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{s\to 0-}\int_{-1}^s \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \lim_{t\to\infty}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$= \lim_{s\to 0-}3(1-\sqrt[3]{s}) + \lim_{t\to 0+}3(1-\sqrt[3]{t}) = 3+3=6.$$

- 그러나 이와 비슷한 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$는 0을 기점으로 한 각각의 적분이 모두 발산하므로 동일한

논리로 계산할 수 없다. (기함수의 적분을 생각하면 직관적으로 0이겠지만 값이 정의되지 않는다.)

(21) 코시 주요값 (Cauchy Principal Value)

- 오귀스탱 루이 코시가 도입한 코시 주요값은 일반적인 정적분으로 값을 구할 수 없는 일부 이상적분의 값을 구하는 방법 중 하나이다.

[def] 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $x = x_0$ 근처에서 발산한다고 하자. 그러면 $a < x_0 < b$에서의 적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

는 리만 적분 또는 르벡 적분으로서 그 값이 존재하지 않을 수 있다. 그러나 만약 다음과 같은 극한이 수렴한다면, 이를 코시 주요값으로 정의한다.

$$P\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0+}\left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)dx\right]$$

앞서 언급된 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$는 코시 주요값을 적용하면

$$\lim_{a \to 0+}\left(\int_{-1}^{-a}\frac{1}{x}dx + \int_a^1 \frac{1}{x}dx\right) = 0$$

과 같이 계산할 수 있다. 코시 주요값은

$$PV\int f(x)dx, \quad \text{p.v.}\int f(x)dx, \quad \int_L^* f(z)dz$$

등으로 표기한다.

(22) Cauchy-Schlömilch Transformation

- Cauchy-Schlömilch Substitution 또는 Cauchy-Schlömilch Transformation은

$$u = x - \frac{1}{x}$$

일 때

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = PV\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$$

임을 이용하는 치환이다. ($F(u)du$가 아니라 $F(u)dx$임에 유의하라.)

pf) $u = x - \frac{1}{x}$, $x^2 - ux - 1 = 0$에서

$$x_{\pm} = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4}}{2} \quad \text{(복부호동순)}$$

이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = \int_{-\infty}^{0-} F(u)dx_{-} + \int_{0+}^{\infty} F(u)dx_{+} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_{-}' + x_{+}')du$$

이다. 한편

$$x_{\pm}' = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)$$

이므로 $x_{-}' + x_{+}' = 1$이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_{-}' + x_{+}')du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)du$$

이다. (Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.)

(23) Glasser's Master Theorem

- (22)번의 $u = x - \frac{1}{x}$를

$$u = x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{x - C_j} \quad \cdots \quad [1]$$

로 대체해도

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = PV\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx \quad \cdots \quad [2]$$

가 성립한다는 것이 알려져 있다. (여기서 $\{a_j\}$는 양의 실수열, C_j는 양의 실수이다.)

pf) 일반성을 잃지 않고 $C_1 < C_2 < C_3 \cdots$라 하자. 이때 식 [1]은 x에 대하여 다음과 같은 n차식으로 환원된다.

$$x^n - \left(u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j\right)x^{n-1} + \cdots = 0$$

대수학의 기본정리에 의해 이 방정식은 복소 범위에서 (중복을 포함하여) n개의 근을 가지고, n개의 근 $x_i \in \mathbb{C}$ $(1 \le i \le n)$에 대하여 근과 계수의 관계에 의해

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j$$

가 성립한다. 따라서

$$x_1{}' + x_2{}' + \cdots + x_n{}' = 1$$

이고,

$$I = \left(\int_{-\infty}^{C_1^-} dx_1 + \int_{C_1^+}^{C_2^-} dx_2 + \cdots + \int_{C_{n-1}^+}^{\infty} dx_n\right) F(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_1{}' + x_2{}' + \cdots + x_n{}')du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)du$$

이다. 이와 같은 논리를 그대로 적용하면 다음과 같은 치환을 적용해도 식 [2]가 성립한다.

$$u = x - \sum_j a_j \cot\left[(x - C_j)^{-1}\right]$$

위 정리를 이용하면 특정한 값으로 수렴하는 아주 복잡한 적분식을 만들어낼 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du = \left[\tan^{-1} u\right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

이므로

$$u = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

를 대입하여 Glasser's Master Theorem을 적용하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 + 1} dx = \pi$$

이고, 식을 전개하여 짝수차항만 추출하면 다음의 정적분을 얻는다.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{14} - 15x^{12} + 82x^{10} - 190x^8 + 184x^6 - 60x^4 + 16x^2}{x^{16} - 20x^{14} + 156x^{12} - 616x^{10} + 1388x^8 - 1792x^6 + 1152x^4 - 224x^2 + 16} dx = \frac{\pi}{2}$$

이와 같이 복잡한 정적분이 주어졌을 때 Glasser's Master Theorem을 이용하기 위해 식을 변형하여 역추적을 하는 것도 하나의 방법이다. (이를 이용하지 않는다면 복소적분과 매우 복잡한 계산과정을 거쳐야할 것이다.)

예제) Glasser's Master Theorem을 이용하여 다음 식이 성립함을 증명하시오.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^8 - 4x^6 + 9x^4 - 5x^2 + 1}{x^{12} - 10x^{10} + 37x^8 - 42x^6 + 26x^4 - 8x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.

(24) 정적분 테크닉

① 적분 구간을 이용한 치환 ($x \mapsto a+b-x$)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)(-dx) = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

- $f(x)+f(a+b-x)$의 정적분이 쉽게 계산되는 경우

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} dx$$

를 이용하여 정적분을 계산할 수 있다.

② 대칭 치환 ($x \mapsto -x$)

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = \int_{c}^{-c} f(-x)(-dx) = \int_{-c}^{c} f(-x)dx$$

- 이는 ①에서 $a+b=0$인 특수한 경우이지만, 마찬가지로 자주 등장한다.

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = \int_{-c}^{c} \frac{f(x)+f(-x)}{2} dx$$

(25) 파인만 적분 테크닉 (The Feynman Integration Technique)

- 다음과 같은 적분을 생각하자.

$$I = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

여기서 x는 적분변수이고, a는 상수이다. 따라서 x에 대해 미분 또는 적분을 할 때 a는 관여하지 않는다. 하지만 관점을 조금 바꿔 보면 피적분함수인 e^{ax}를

$$f(x,\, a) = e^{ax}$$

인 이변수함수로 볼 수도 있을 것이다. 이 관점에 따라 위 적분의 양변을 a에 대하여 미분(즉, 편미분) 해보면,

$$\frac{d}{da} \int e^{ax} dx = \frac{\partial}{\partial\, a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} + C \right] = -\frac{1}{a^2} e^{ax} + \frac{x}{a} e^{ax} = \frac{(ax-1)e^{ax}}{a^2} \quad \cdots \quad [3]$$

이다. 한편

$$\frac{d}{da} \int e^{ax} dx = \int \left[\frac{\partial}{\partial\, a} e^{ax} \right] dx = \int x e^{ax} dx$$

이고 실제로 이는 [3]의 결과와 일치한다. 리처드 파인만에 의해 유명해진 이 적분법은 다음과 같은 라이프니츠 적분 규칙(Leibniz Integral Rule)의 특수한 경우이다.

$$\frac{\partial}{\partial\, z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x,\, z) dx = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial\, f}{\partial\, z} dx + f(b(z),\, z) \frac{\partial\, b}{\partial\, z} - f(a(z),\, z) \frac{\partial\, a}{\partial\, z}$$

즉, 함수 $f(x, \alpha)$가 α에 대해 미분가능하고 $\frac{\partial\, f}{\partial\, \alpha}$가 연속함수이면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x,\, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\, \alpha} f(x,\, \alpha) dx$$

이 테크닉을 이용하면 다음과 같은 특이한 정적분의 값을 구할 수 있다.

$$\phi(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx = 2\pi\ln|\alpha| \ \ (|\alpha| > 1)$$

이 테크닉을 사용하기 위해서는 피적분함수를 강제적으로 이변수함수로 바꿔야 하므로, 특정 숫자를 α로 바꾸어 매개변수를 강제로 추가하거나 $e^{-\alpha x}$ 등을 곱해 이변수함수로 만들어준 후 $\alpha = 0$일 때의 값을 구하는 식으로 처리한다.

또한 피적분식의 결과를 α에 대하여 미분한 값이 α에 대한 함수로 나오므로 이는 α에 대한 미분방정식을 푸는 것으로 이어진다. (복소적분 외에) 파인만 테크닉을 이용해야 하는 문제들은 그 미분방정식의 해법이 어렵지 않은 것들만 수록하였다.

[1] Feynman, R. P. "A Different Set of Tools." In 'Surely You're Joking, Mr. Feynman!': Adventures of a Curious Character. New York: W. W. Norton, 1997.

[2] Hijab, O. Introduction to Calculus and Classical Analysis. New York: Springer-Verlag, p. 189, 1997.

[3] Woods, F. S. "Differentiation of a Definite Integral." §60 in Advanced Calculus: A Course Arranged with Special Reference to the Needs of Students of Applied Mathematics. Boston, MA: Ginn, pp. 141-144, 1926.

(26) 역함수의 적분 공식

- 실함수 f와 그 역함수 f^{-1}, $F(x) = \int f(x)dx$에 대하여 다음이 성립한다. (양변을 미분한 후 chain rule을 적용하면 쉽게 증명된다.)

$$\int f^{-1}(x)dx = x \cdot f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + C$$

※ 적분구간에 $\pm\infty$ 또는 그 지점에서 함숫값이 정의되지 않는 값이 포함된 경우, 즉 이상적분의 경우 비록 교과 외 과정이긴 하나 (20)의 설명만으로도 충분히 풀 수 있을 것이라 생각하여 따로 표시하지 않았습니다. 간혹 $\exp x$라는 표기가 등장하는데, 이는 e^x와 같으며 x 자리에 복잡한 분수식이 들어갔을 때 식이 너무 작아져 가독성이 떨어지는 것을 방지하기 위한 표기법입니다.

※※ 쌍곡선함수($\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$)와 그 역함수는 등장하지 않으며, 역쌍곡선함수의 경우 $\tanh^{-1}x$라는 표기 대신 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ 등으로 나타내었습니다. 적분 결과 또는 피적분함수에 역삼각함수가 등장하는 경우 고등학교 교육과정을 벗어나는 것이기는 하나, (16)의 19, 21번 공식을 사용하는 수준에서 모두 해결 가능합니다.

※※※ 위에서 언급된 테크닉과 고등학교 미적분 수준을 벗어나는 문제는 없습니다. 즉 모든 문제를 고등학교 미적분 교과 내용과 위에서 언급된 테크닉을 이용하여 해결할 수 있고, 유수 정리(Residue Theorem)와 경로 적분(Contour Integration) 등 복소해석학의 정리가 사용될 일은 없습니다.

※※※※ 해설을 보아도 알 수 있겠지만, 모든 문제는 정확한 수치를 구할 수 있고, 부정적분과 달리 그 값이 단 하나로 특정됩니다.

[1~200] 다음 정적분의 값을 구하시오.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{\sqrt{5}}x}{\sin^{\sqrt{5}}x+\cos^{\sqrt{5}}x}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

5. $\displaystyle\int_0^{8}\frac{x^3-2x+1}{\sqrt[3]{x}}dx$

6. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\frac{2x^2}{2^x+1}dx$

7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^{1/x}+1}dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\cos 4x dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\tan x}\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt[3]{\tan x}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{x^x}dx$ (급수의 형태로 나타내어도 무방함.)

12. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2022}}dx$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

15. $\int_0^{\infty} 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr \quad \left(\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}\right)$

16. $\int_{\frac{a_0}{2}}^{\infty} 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr \quad \left(\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}\right)$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$

18. $\int_0^1 \frac{x^{2022}-1}{\ln x} dx$

19. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$

20. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

22. $\int_0^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - x + 1}\, dx$

23. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$

24. $\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2-x+1} dx$

25. $\int_0^1 \frac{\ln(x^2+1)}{x+1} dx$

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$

27. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2022} x \cos 2022x dx$

29. $\int_0^1 (\ln x)^{2022} dx$

30. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 + \tan^2 x) dx$

32. $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2+4)} dx$

33. $\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{1+\sin x} dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2022x \cdot \sin^{2020} x dx$

36. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4-x^2+1}}dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{2+\cos x}dx$

38. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^9 x dx$

39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{(1+x^3)\ln x}dx$

40. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sec^2 t)\sqrt{\sec t}}{(1+\sec t)^2-2}dt$

41. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin 2x}dx$

42. $\displaystyle\int_0^{\infty} (\ln(e^x+1)-x)dx$

43. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}dx$

44. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan x)}{1-\tan x+\tan^2 x}dx$

45. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}dx$

46. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$

47. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}dx$

48. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(x^2+1)}dx$

49. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u+\sqrt{\pi}\tan u)}{\sin u}du$

50. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2\left(x-\sqrt{\pi^2-x^2}\right)dx$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x dx$

52. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tan x)dx$

53. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}dx$

54. $\int_0^{\pi} \ln(1-2e\cos x+e^2)dx$

55. $\int_0^{\pi} \ln(1+\sin^2 t)dt$

56. $\int_0^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

57. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\pi})}dx$

58. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)(\pi^2+(\ln x)^2)}dx$

59. $\int_0^{\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2^x-1}\ln(2^x-1)}dx$

60. $\int_0^{3\pi} \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

61. $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

62. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^3 x dx$

63. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x\sec^2 x dx$

64. $\int_1^{3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

65. $\int_{\sqrt{3}-1}^{2\sqrt{2}-1} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

66. $\int_0^{\tan^{-1}(\sqrt{6})} \frac{1}{1+\cos^2 x}dx$

67. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$

68. $\int_{\ln(e-1)}^{\ln(e^3-1)} \frac{e^x\ln(e^x+1)}{e^x+1}dx$

69. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$

70. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-3\cos^2 x}dx$

71. $\int_{-1}^{0} \frac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}dx$

72. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx$

73. $\displaystyle\int_5^6 \frac{7x^3-13x^2-24x+24}{x^4-3x^3-10x^2+24x}\,dx$

74. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

75. $\displaystyle\int_1^e \frac{x^4+81}{x(x^2+9)^2}\,dx$

76. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{\frac{4-x}{x}}\,dx$

77. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$

78. $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,dx$

79. $\displaystyle\int_0^{\tan^{-1}(\sqrt[4]{3})} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

80. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\sec^4 x\,dx$

81. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}\,dx$

82. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

83. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

84. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 13e^{2x}\cos 3x\,dx$

85. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin^2 2x\,dx$

86. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\,dx$

87. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\,\sqrt{1-\tan x}\,dx$

88. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{627}}{x^{2022}}\,dx$

89. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \cos^2\left(\tan^{-1}\left(\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right)\right)dx$

90. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2 x}{(\sec x+\tan x)^{5/2}}\,dx$

91. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}\,dx$

92. $\displaystyle\int_{1}^{\frac{25}{73}}\frac{1}{x\sqrt{-x^2+x+2}}\,dx$

93. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{x^2}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx$

94. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3(\theta/2)}{\cos(\theta/2)\cdot\sqrt{\cos^3\theta+\cos^2\theta+\cos\theta}}\,d\theta$

95. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4\theta}{1-\tan^2\theta}\,d\theta$

96. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

97. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\exp\left(-x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

98. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1-x^{99}}{(1+x)(1+x^{100})}\,dx$

99. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x^2-13x-1)^2}{611x^2}\right)dx$

100. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[n]{\tan x}\,dx \quad (2\le n\in\mathbb{N})$