지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00037927032

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/8588

입니다. 감사합니다!

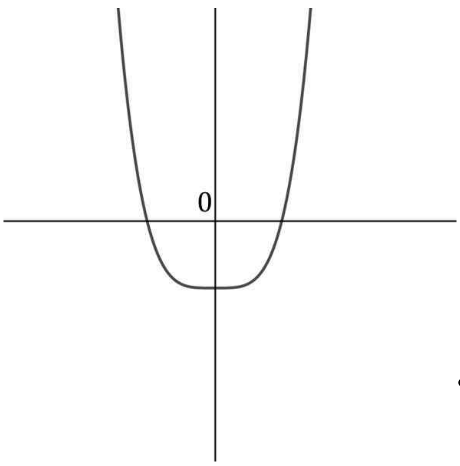
도파민 해설

1. 정답 ⑤

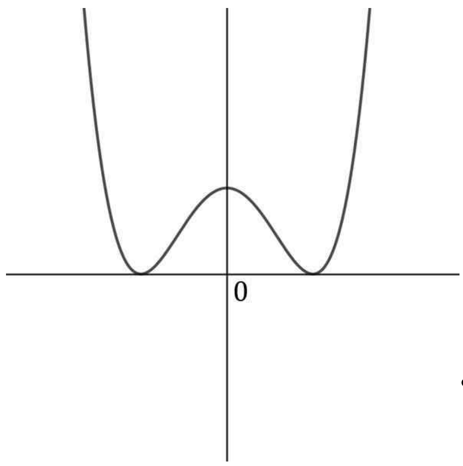
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 조건해석

$f(x)=ax^4+bx^2+c$가 있는데 최고차항의 계수가 양수라고 합니다. 일단 $a>0$이구요. 그리고 함수를 잘 관찰해보면 지금 짝수차항만 있네요? 우함수입니다. y축 대칭이에요. 대칭 팍 떠오르죠?

(가)조건에서 $f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3개라고 합니다. 그 x좌표가 α, β, γ라고 하네요.
어? $f(x)$의 개형을 생각해보세요.

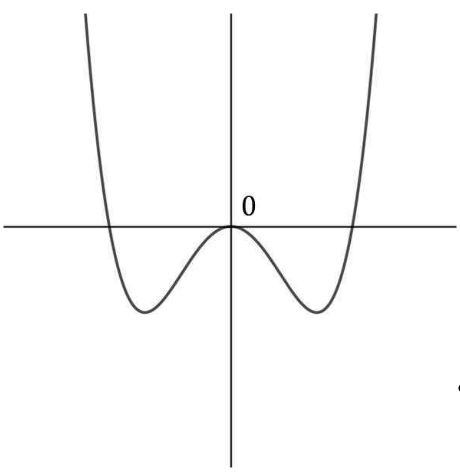


아니면



이래야 하잖아요.

그런데 왼쪽의 개형은 애초에 3개의 점에서 x축과 만날 수가 없는 개형이에요. 최대가 2개인데요.
오른쪽의 개형은 3개의 점에서 만나는 것이 가능하죠!



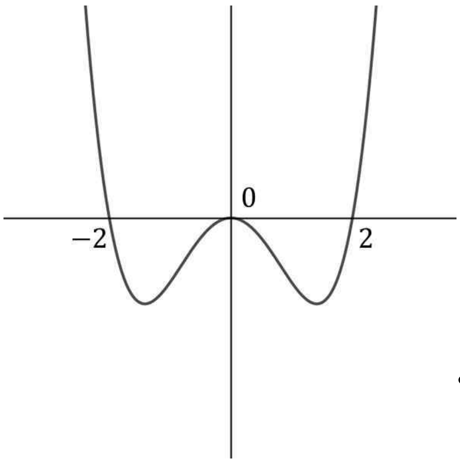
이렇게 x축과 $x=0$에서 접하면 되잖아요. 따라서 $f(0)=0$이고 $c=0$입니다. $f(x)=ax^4+bx^2$이네요.

(나)조건에서 $f(1)=-\dfrac{3}{4}$, $f'(-1)=1$이라고 합니다. 이건 그냥 계산하면 될 것 같은데요?

$f(1)=a+b=-\dfrac{3}{4}$이구요, $f'(x)=4ax^3+2bx$이니까 $f'(-1)=-4a-2b=1$입니다. 연립하면

$a=\dfrac{1}{4}$, $b=-1$이고 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2=\dfrac{1}{4}x^2(x^2-4)=\dfrac{1}{4}x^2(x-2)(x+2)$이네요. x축과 $x=2$, -2에서

그냥 만나고 $x=0$에서 접하는 그래프입니다.



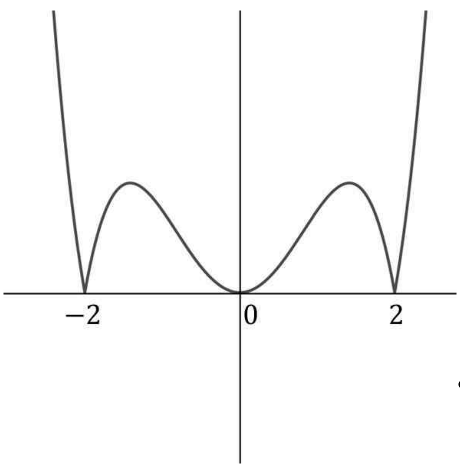
이렇게 되는 거죠.

아까 $f(x)$와 x축이 만나는 x좌표를 작은 순서대로 α, β, γ라고 했잖아요? 따라서
$\alpha=-2$, $\beta=0$, $\gamma=2$입니다.
ㄱ에서 $f(0)=0$이냐고 묻네요. 맞죠? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $f'(\alpha)=-4$냐고 묻습니다. 아까 $\alpha=-2$라고 했었죠? 이건 미분하고 넣어봐야 알 것 같아요.
$f'(x)=x^3-2x$입니다. 따라서 $f'(\alpha)=f'(-2)=-4$이네요. 맞죠? ㄴ도 맞습니다.

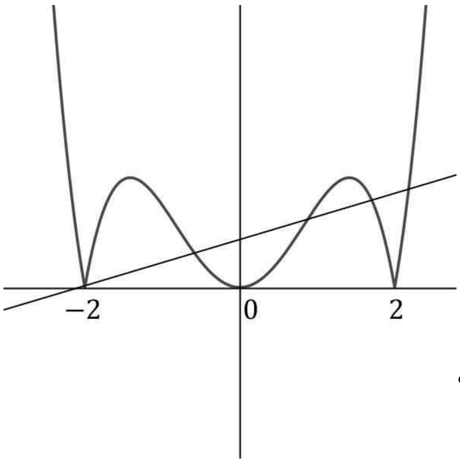
2) 절댓값 함수, ㄱㄴㄷ 유기성

ㄷ에서 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위를 구하랍니다. 다시 해석하면 $y=|f(x)|$와 $y=k(x-\alpha)$가 만나는 점이 3개가 되도록 k를 움직여봐라 이런 거죠? 그리고 아까 $\alpha=-2$라고 했었으니까 $y=|f(x)|$와 $y=k(x+2)$가 만나는 점이 3개가 되도록 해야 합니다.
가볼게요. 일단 그래프부터 그려봅시다. 아까 그려놓은 그래프에 절댓값을 씌워서 접어 올리면

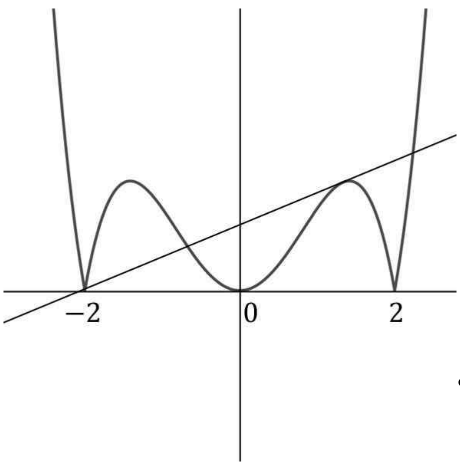


이렇게 됩니다. 여기서 기울기가 양수이고, $(-2,\ 0)$을 지나는 직선

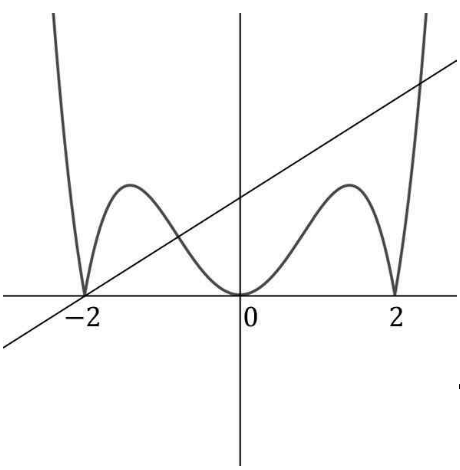
$y=k(x+2)$을 그려야 하잖아요? 그리고 만나는 점의 개수가 3이 되는 k의 범위를 찾아내야 해요. 일단 x축을 시작으로



이렇게 되면 5개의 점에서 만나죠. k를 더 움직여야겠어요.



이렇게 한 점에서 접하게 그리면 4개의 점에서 만납니다. 그리고 조금만 더 움직이면..!



이렇게 3개의 점에서 만납니다. 오! 범위 안으로 들어왔어요! 그러면

일단 접할 때의 기울기를 m이라 하면 $m<k$에서 3개의 점에서 만나는 거죠?

m을 구해봅시다. 일단 $-2<x<2$에서 $|f(x)|$는 $f(x)$를 접어 올린 거니까 $-f(x)$에요. x축 아래에 있던 걸 $(-)$곱해서 위로 올린 거잖아요?

그러면 $(t,\ -f(t))$에서 접선을 그어서 $(-2,\ 0)$을 지나게 하고 그 기울기를 구하면 되겠네요.

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$이고 $f'(x)=x^3-2x$이니까 $-2<x<2$에서 $|f(x)|=-f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^2$입니다.

$(t,\ -f(t))$에서의 접선은 $(-t^3+2t)(x-t)-\frac{1}{4}t^4+t^2$이고 정리하면 $(-t^3+2t)x+\frac{3}{4}t^4-t^2$입니다. 이 직선이

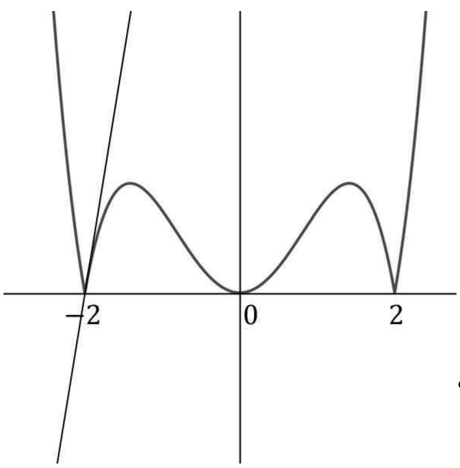
$(-2,\ 0)$을 지나야 하니까 $\frac{3}{4}t^4+2t^3-t^2-4t=0$이고 정리하면 $3t^4+8t^3-4t^2-16t=0$입니다.

이거 인수분해하면 $t(t+2)^2(3t-4)=0$이 나오죠? 그런데 지금 접하는 점은 $x>0$에 있으니까 $t=\frac{4}{3}$입니다.

이제 기울기를 구해봅시다. $|f(x)|=-f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^2$이니까 미분하고 $x=\frac{4}{3}$을 집어 넣으면 $\frac{8}{27}$이

나오네요. $m=\frac{8}{27}$이고 $\frac{8}{27}<k$에서 3개의 점과 만납니다.

그리고 계속 기울기를 키워봐요. 계속 3개의 점과 만나다가



이렇게 $x=-2$에서 접할 때 2개의 점에서 만나게 됩니다. 이 기울기를

n이라 하면 $\frac{8}{27}<k<n$에서 3개의 점에서 만나게 되는 거죠.

이젠 n을 구해봅시다. 어? 그런데 아까 ㄴ에서 $f'(-2)=-4$라고 하지 않았나요? 지금 $|f(x)|=f(x)$의
좌미분계수는 -4이지만 $-2<x<2$에서는 $f(x)<0$이어서 $(-)$를 곱하니까 $|f(x)|=-f(x)$가 되고
우미분계수는 4가 되는 거잖아요. 이미 ㄴ에서 힌트를 준 거네요! 따라서 $x=-2$에서 접할 때의 기울기는 4가

되고 $n=4$입니다. 범위는 $\frac{8}{27}<k<4$가 되네요. 맞죠! ㄷ도 맞습니다. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은

⑤번이네요.

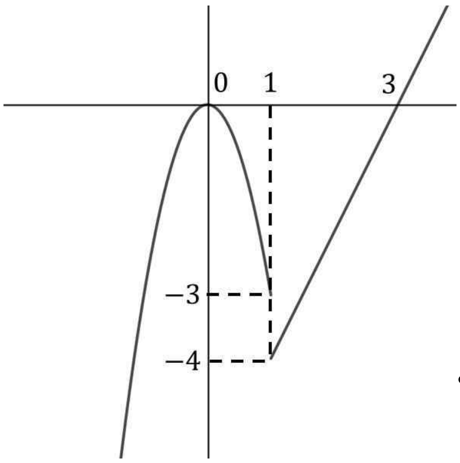
2. 정답 80

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x\geq 1) \end{cases}$ 인데 $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$ 라고 하네요.

일단 $f(x)$의 그래프부터 그려볼까요? 일단 $x<1$에서 $f(x)$는 $x=0$에서 x축에 접하는 이차함수이구요,

$x>1$에서 $f(x)$는 $x=3$에서 x축을 지나는 일차함수입니다.



이런 함수네요.

그때 $g(x)$는 위끝에 변수가 있네요. 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이 됩니다.

그리고 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x)$가 되네요. $x=1$을 넣으면 $g'(1)=0$입니다.

2) 함수끼리 사칙연산은 범위까지 그대로

$g'(x)=(x-1)f(x)$의 식을 구해봅시다. $g'(x)=\begin{cases} -3x^2(x-1) & (x<1) \\ 2(x-1)(x-3) & (x\geq 1) \end{cases}$ 이네요.

이때 $y=t$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 $h(t)$라고 하네요. 그리고

$\left|\lim_{t\to a+} h(t)-\lim_{t\to a-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 a에 대하여 $|a|$를 구하랍니다. 그럼 일단 그래프를

그려봐야겠는데요?

그럼 $g'(x)$를 적분해야겠어요. $g'(x)=\begin{cases} -3x^3+3x^2 & (x<1) \\ 2x^2-8x+6 & (x\geq 1) \end{cases}$ 이니까 적분하면

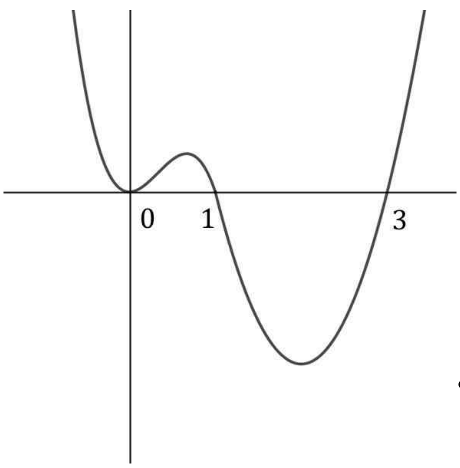
$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$ 입니다. 아직 적분상수는 몰라요.

그런데 아까 $g(0)=0$라고 했었죠? $C_1=0$이고 $g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$입니다.

그리고 방금 $g'(1)=0$라고 했었잖아요. $x=1$에서 미분계수가 존재한다는 건 $x=1$에서 미분가능하다는 거고 연속이기도 한다는 거죠. 따라서 $\lim_{x\to 1-} g(x)=\dfrac{1}{4}=\lim_{x\to 1+} g(x)=\dfrac{8}{3}+C_2$이고 $C_2=-\dfrac{29}{12}$입니다.

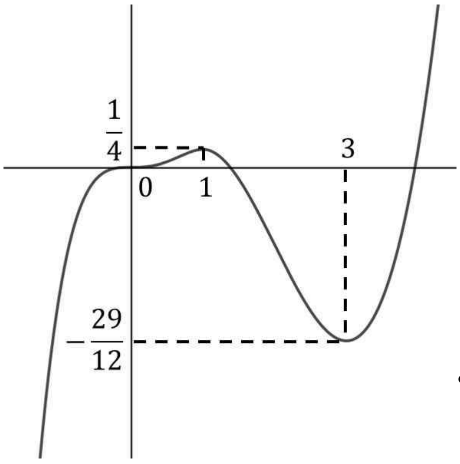
$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\geq 1) \end{cases}$이네요.

이제 그래프 그려봅시다. 일단 $g'(x)=\begin{cases} -3x^2(x-1) & (x<1) \\ 2(x-1)(x-3) & (x\geq 1) \end{cases}$의 그래프를 그려보면 $x<1$에서는 $x=0$에서 접하고, $x=1$에서 x축과 만나구요, $x\geq 1$에서는 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 두 점을 지나는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수입니다.



이렇게 되네요.

위의 그림을 보면 $g(x)$는 $x=0$에서는 접하면서 방향 그대로 가구요, $x=1$에서는 극대가 되구요, $x=3$에서 극소가 됩니다. 극댓값은 $\dfrac{1}{4}$이고 극솟값은 $-\dfrac{29}{12}$인 함수입니다.

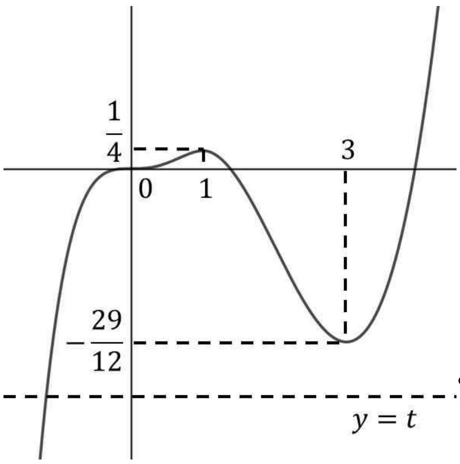


이런 함수이죠. 여기에 $y=t$와 이 함수가 만나는 점의 개수가 $h(t)$인데

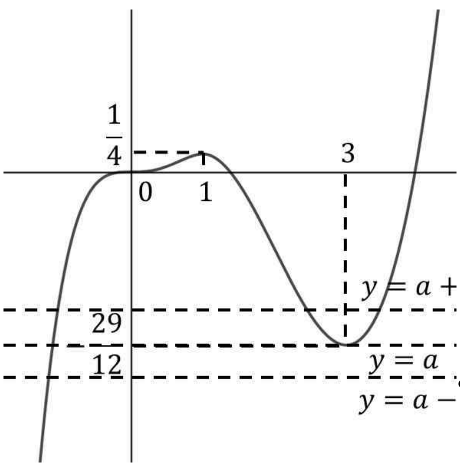
$\left|\lim_{t \to a+} h(t) - \lim_{t \to a-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는 a를 구해야 해요.

저 식은 뭔가요? 일단 $\lim_{t \to a+} h(t)$는 $y = a+$와 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수구요, $\lim_{t \to a-} h(t)$는 $y = a-$와 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수에요. 그러니까 다시 말하면 $y = a$보다 큰 쪽에서의 수평선과 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수와 $y = a$보다 작은 쪽에서의 수평선과 $y = g(x)$가 만나는 점의 개수의 차이가 2개가 되는 a를 찾으라는 거네요.

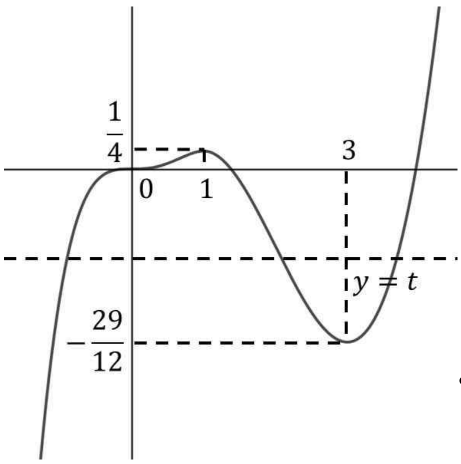
그럼 이제 막 $y = t$를 설정해봅시다.



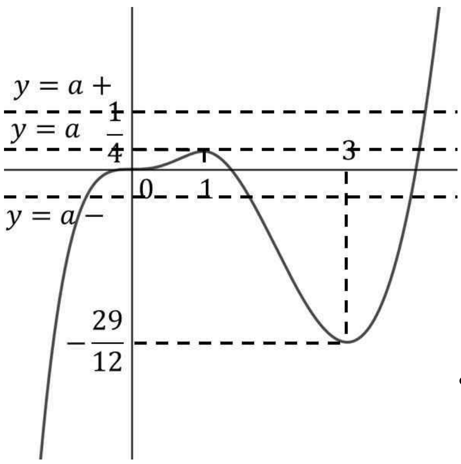
이렇게 설정하면 $y = t$보다 약간 작거나 약간 크거나 상관없이 만나는 점의 개수는 1입니다. 차이가 2만큼 날 수가 없겠네요.



이렇게 설정하면 약간 클 때는 3개, 약간 작을 때는 1개니까 차이가 2만큼 나네요. 일단 $a = -\dfrac{29}{12}$ 하나는 찾았어요.



이렇게 설정하면 변하지 않아요. 계속 3개잖아요.



이렇게 설정하면 되죠. 클 때는 1개, 작을 때는 3개니까 차이가 2잖아요. $a=\frac{1}{4}$도 됩니다.

그 위로는 계속 1개니까 안 되겠네요. 지금까지 찾은 a에 절댓값 씌우고 더하면 $S=\frac{1}{4}+\frac{29}{12}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$입니다.

$30S=80$이네요.

3. 정답 ⑤

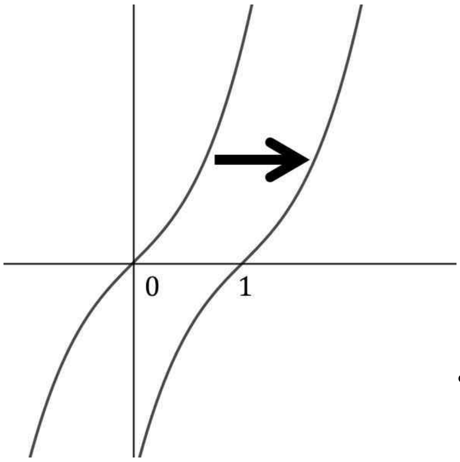
1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 함수가 있어요. $f(x)=(x-1)^3+(x-1)$가 있네요. 함수를 이런 방식으로 준 건 이유가 있겠죠?
미분하지 말고 그래프를 그려봅시다.

일단 $f(x)$는 x^3+x라는 함수를 x축방향으로 1만큼 평행이동한 함수에요. 따라서 x^3+x를 먼저 그리고 그

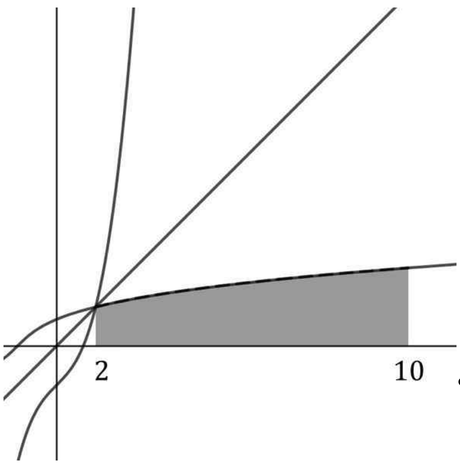
그래프를 1만큼 오른쪽으로 움직이면 되겠어요.

$x^3+x=x(x^2+1)$이니까 x축과는 $x=0$에서만 만나구요. 미분하면 $3x^2+1$이니까 극점없이 계속 증가하는 그래프입니다.



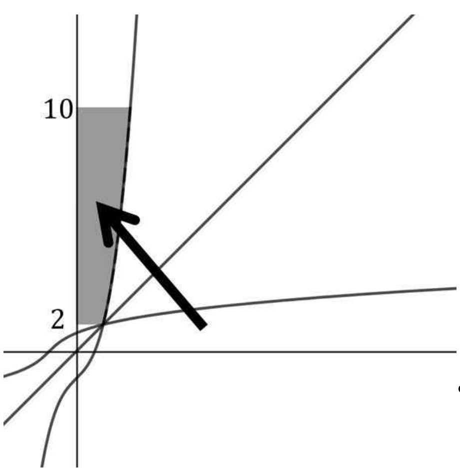
이렇게 되네요.

이때 역함수가 $g(x)$인데 $\int_2^{10} g(x)dx$를 구하랍니다. 이것도 그리고 넓이를 색칠해봅시다.



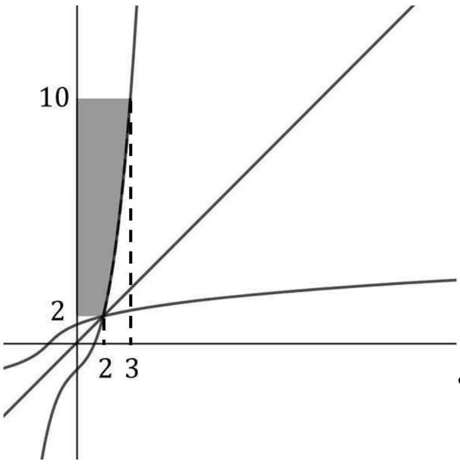
이렇게 되네요.

역함수를 적분할 수는 없으니 이걸 $y=x$축 대칭시킨 부분에 옮겨야겠죠?



이렇게 됩니다.

이제 식을 세워봅시다. 일단 $y=(x-1)^3+(x-1)$와 $y=2$가 만나는 점은 $(x-1)^3+(x-1)=2$이고 정리하면 $x=2$가 나옵니다. 그리고 $y=(x-1)^3+(x-1)$와 $y=10$이 만나는 점은 $(x-1)^3+(x-1)=10$이고
정리하면 $x=3$이 나오게 돼요!



이렇게 되네요.

이거는 밑변의 길이가 3이고 높이가 10인 직사각형에서 $\int_2^3 f(x)dx$와 한 변의 길이가 2인 정사각형을 뺀 거죠?

직사각형의 넓이는 $3\times10=30$이구요, 정사각형의 넓이는 $2\times2=4$입니다.

$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left((x-1)^3+(x-1)\right)dx=\left[\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^2}{2}\right]_2^3=\frac{21}{4}$이네요. 따라서 구하는 부분의 넓이는

$30-4-\frac{21}{4}=\frac{83}{4}$입니다. 답은 ⑤번이네요.

4. 정답 160

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

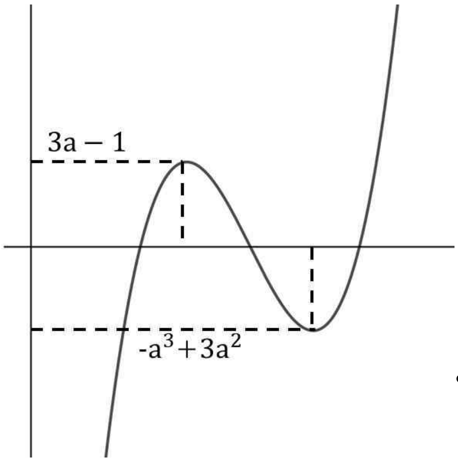
함수가 있어요. 일단 관찰부터 해볼까요? $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$를 인수분해하면

$x\left(2x^2-3(a+1)x+6a\right)$가 되는데 인수분해가 안 되네요? 이건 그래프를 그려서 파악해야겠어요.

미분하면 $f'(x)=6x^2-6(a+1)+6a=6\left(x^2-(a+1)x+a\right)=6(x-1)(x-a)$입니다. a가 자연수인데

$a=1$이라면 $f(x)=0$이 세 실근을 갖는 건 불가능합니다. 계속 증가하는 모양이잖아요. 일단 $a\geq2$이어야 합니다.

그러면 $x=1$에서 극대, $x=a$에서 극소네요. 극댓값은 $3a-1$이고 극솟값은 $-a^3+3a^2$입니다.

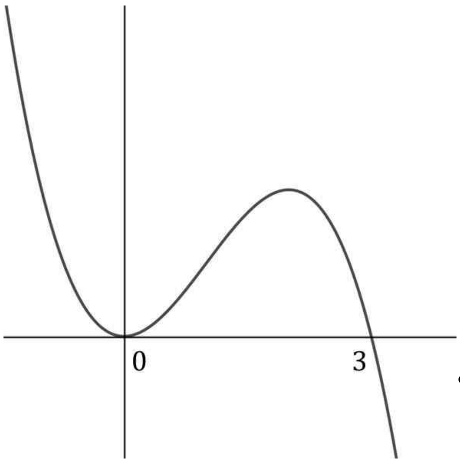


이렇게 되네요.

세 실근을 가지려면 $3a-1>0$이고 $-a^2(a-3)<0$이어야겠죠?

$a>\dfrac{1}{3}$은 뭐 어차피 a가 $a\geq 2$인 자연수니까 당연한 거구요. $-a^2(a-3)<0$가 되는 걸 찾아봅시다.

$-a^2(a-3)$을 그려보면 $a=0$에서 a축에 접하고, $a=3$에서 그냥 지나가는



이런 함수가 됩니다. 이게 0보다 작으려면 결국 $a>3$이 되어야겠네요.

이걸 만족하는 자연수 a는 4, 5, 6, $\cdots$입니다. n번째 수를 a_n라고 했으니까 $a_n=n+3$이네요.

$a=a_n$일 때 $f(x)$의 극댓값이 b_n이랍니다. 방금 그려놓은 그래프를 보면 $3a-1$이 극댓값이었으니까

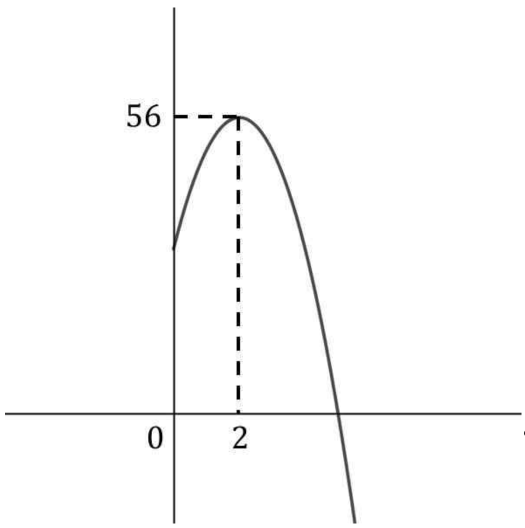
$b_n=3a_n-1=3n+8$이네요. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}2n+5=\frac{(7+25)}{2}\times 10=160$입니다.

5. 정답 56

1) 함수 구하기 - 인수정리

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 x축과 x좌표가 $-2t$, 0, t인 점에서 만난답니다. 다시 말해서 $f(x)=0$의 세 실근이 $-2t$, 0, t이라는 거죠? 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $(x+2t)$, x, $(x-t)$라는 인수를 적어도 하나 갖구요, $t>0$이니까 겹치지도 않네요. 따라서 $f(x)=x(x+2t)(x-t)=x^3+tx^2-2t^2x$입니다.

이때 $f'(4)$의 최댓값을 구하랍니다. 미분하면 $f'(x)=3x^2+2tx-2t^2$이고 $f'(4)=-2t^2+8t+48$입니다. 이거의 최댓값을 구하려면 t를 변수로 해서 그래프를 그림 다음 판단해야 할 것 같은데요? 일단 미분하면 $-4t+8$으로 $t=2$에서 극대입니다. 극댓값은 56이구요. 그림 그려보면



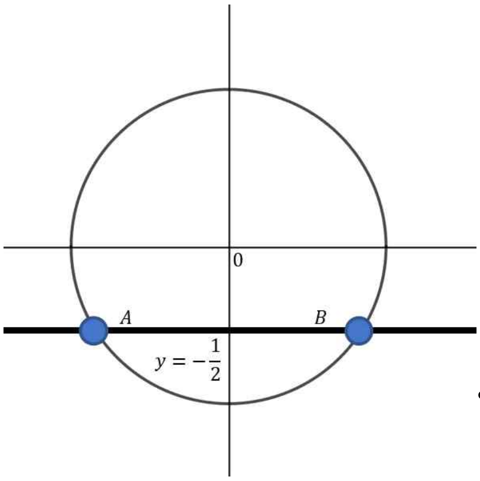
입니다. 최댓값은 $t=2$일 때 56이죠?

6. 정답 ③ (그림 다시 해야 함)

1) 문제해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

중심이 (0, 0)이고 반지름의 길이가 1인 원이 있는데 이 원이랑 $y=-\dfrac{1}{2}$가 만나는 점을 A, B라고 한답니다.

대충 그래프 그려보면

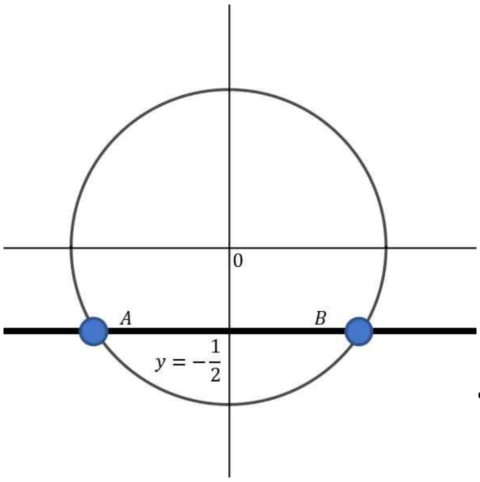


이렇게 되겠네요. 거기에 $P(0, t)\left(t \neq -\frac{1}{2}\right)$가 있는데 다음 조건을 만족시키는 점 C의 개수를 $f(t)$라고 한답니다.

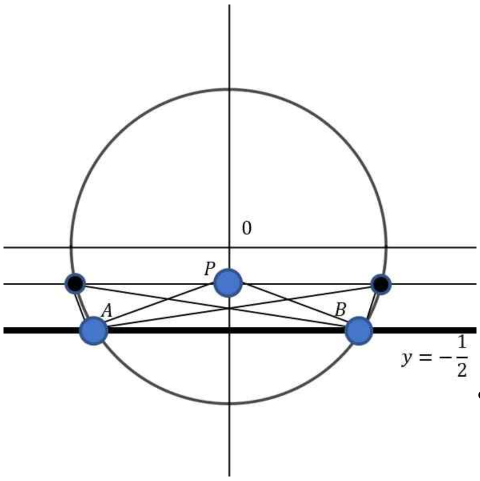
2) 조건해석

(가)조건에서 C는 A, B가 아닌 원 위의 점이네요.

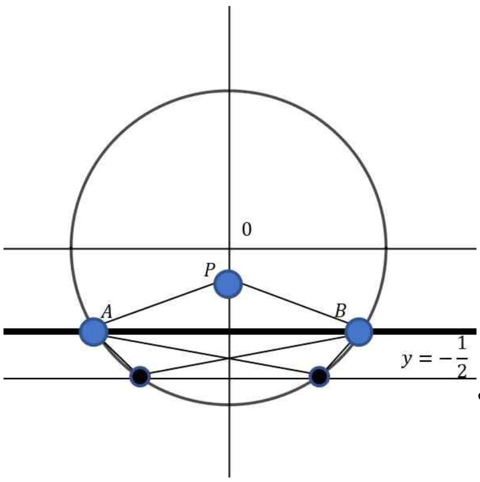
(나)조건에서 삼각형 ABC의 넓이와 ABP의 넓이는 같답니다. 이 두 조건을 만족하는 점 C의 개수를 $f(t)$라고 하는 거죠. 무슨 의미일까요? 그러면 일단 $P(0, t)$의 좌표를 아무거나 잡아봅시다. $f(t)$를 이해는 해야 하잖아요. 예를 들어



이렇게 P를 잡아볼게요. 저 삼각형과 넓이가 같으려면 원 위의 점을 어떻게 잡아야 할까요? 밑변이 고정되어 있으니까 높이만 같으면 되겠죠? 아! 그러면 P를 지나고 x축에 평행한 직선을 그어서 그 직선이 원과 만나는 점을 C라고 하면 되겠네요.



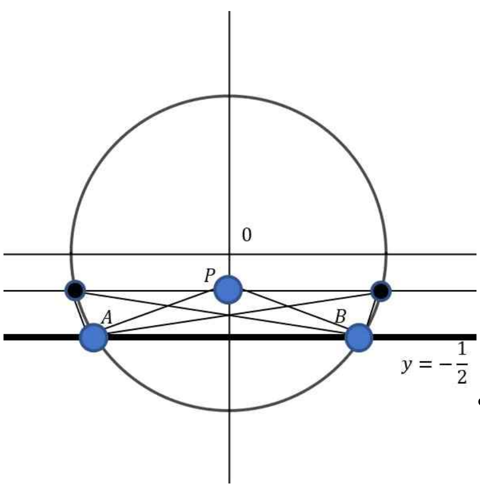
이렇게 2개의 검은색 점을 잡으면 되죠. 이게 끝일까요? 잘 생각해보세요.



이렇게 아래로 긋는 건 안 되나요? 높이가 같으니까 괜찮죠? 아~

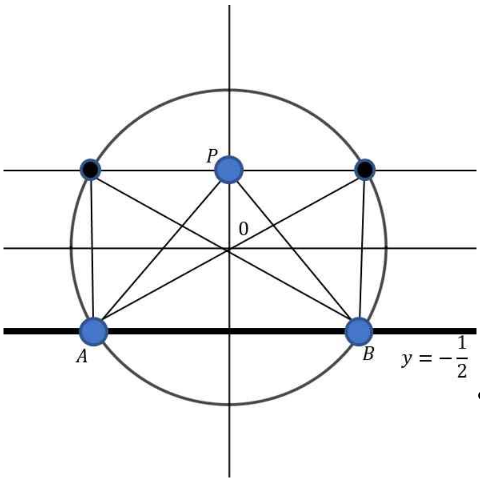
그러면 $f(t)$는 점 P를 지나는 직선과 원과 만나는 점 2개와 직선을 $y=-\dfrac{1}{2}$축 대칭시켜서 원과 만나는 점 2개 이렇게가 가능한가봐요.

어라? 그런데 점 P가 원점이라면 $y=-\dfrac{1}{2}$축 대칭시켜서 원과 만나는 점이 1개밖에 없는데요?



이렇게 3개밖에 안 되잖아요. 그리고 만약 $t>0$이라서 점 P가 x축

위로 올라가 버리면



아래로 내려갈 수가 없어요. 점 P의 위치에 따라 $f(t)$의 값이 달라지네요. 뭐 이 정도면 해석은 충분히 한 것 같아요.

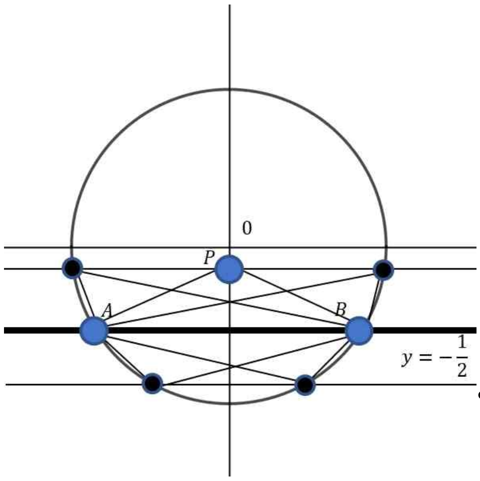
이제 $f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$이고 $\lim_{t\to 0-}f(t)=b$일 때 $a+b$의 값을 구해봅시다.

2) $\lim_{x\to\alpha+}f(x)=$ $x=\alpha$보다 큰 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값, $\lim_{x\to\alpha-}f(x)=$ $x=\alpha$보다 작은 쪽에서의 $f(x)$의 함숫값

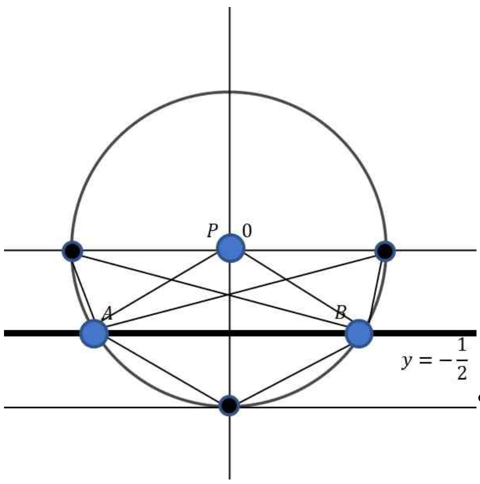
$f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$이거부터 해볼까요? $\lim_{t\to a-}f(t)$는 $t=a$보다 작은 쪽에서의 $f(t)$의 함숫값이죠? 어라? 그런데 잘 생각해보세요. 일반적인 상황에서는 $f(a)$의 값과 $\lim_{t\to a-}f(t)$의 값이 다를 리가 없어요. 약간 작다고 값이 변하지 않잖아요. 그러니까 $f(a)$와 $\lim_{t\to a-}f(t)$를 더해서 5가 나올 리가 없다는 거죠.

보통의 경우에는 $1+1=2$, $2+2=4$, $3+3=6$이렇게 되겠죠. 그런데 $f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$라는 건 $f(a)$의 값과 $\lim_{t\to a-}f(t)$의 값이 달라지는 부분이라는 거에요. 그러면 a는 굉장히 특수한 부분이겠죠? 아까 $f(t)$를 해석할 때 갑자기 값이 변하는 부분이 있었죠? 다시 가봅시다.

만약 $-\frac{1}{2}<a<0$이라면

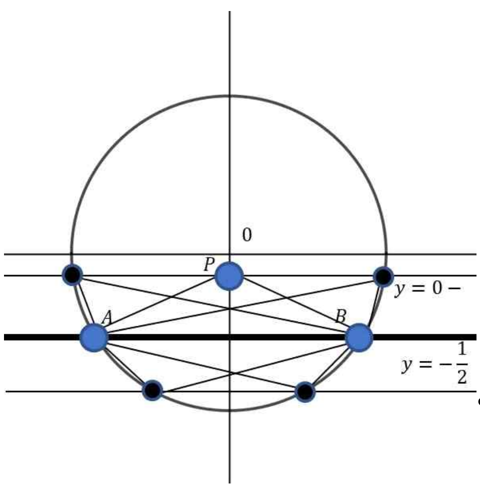


이죠? $f(a)$와 $\lim_{t \to a-} f(t)$의 값이 같으니까 여긴 아니네요. 값이 변하는 부분을 찾아야 해요. 값이 변하는 부분은

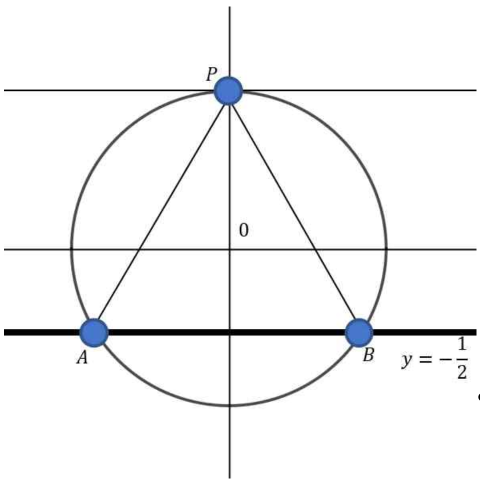


이렇게 원점일 때가 있어요. 이때는 그림에서 보는 것처럼 $f(0)=3$입니다.

그리고 $\lim_{t \to 0-} f(t)$은 $t=0$일 때보다 약간 작아야 하잖아요.

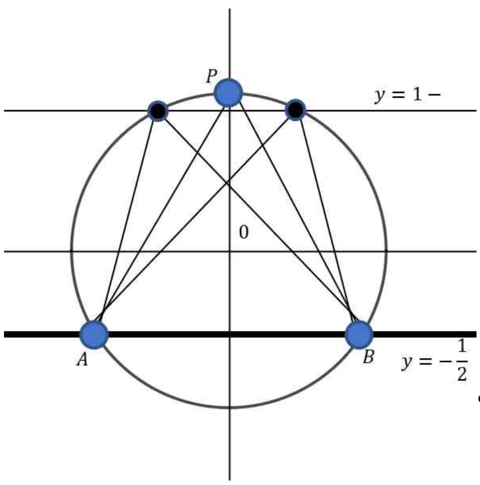


이런 그림처럼 말이죠. 4개가 가능하죠? $\lim_{t \to 0-} f(t)=4$입니다. 더해서 5가 아니네요? 다른 거 찾아봅시다.

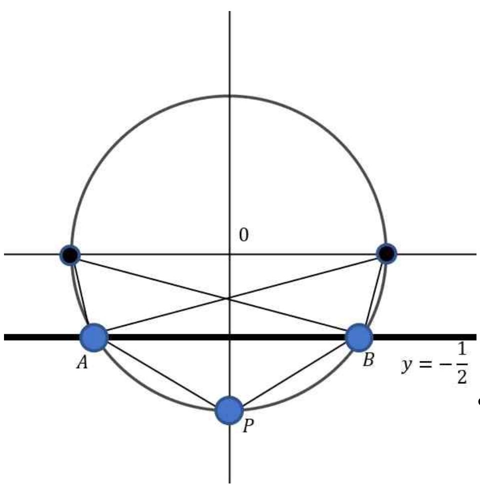


이렇게 $t=1$일 때도 되네요. 이 경우 $f(1)=1$이네요? 가능한 게 점 P와 같을 때 하나가 있네요.

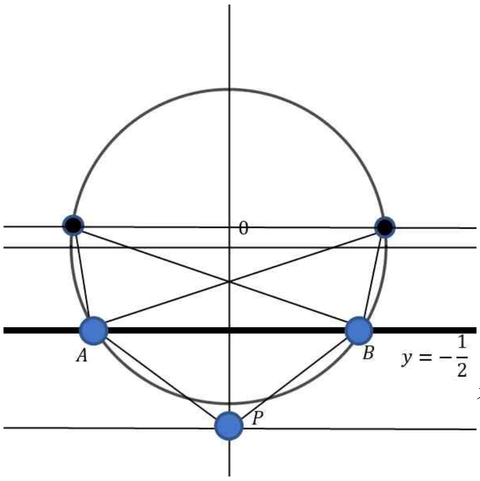
$\lim_{t\to 1-} f(t)$은 $t=1$일 때보다 약간 작아야 하는데



이런 그림처럼 되겠군요. $\lim_{t\to 1-} f(t)=2$입니다. 더해서 5가 안 나오는데요? 어... 또 값이 변하는 부분이 뭐가 있을까요?



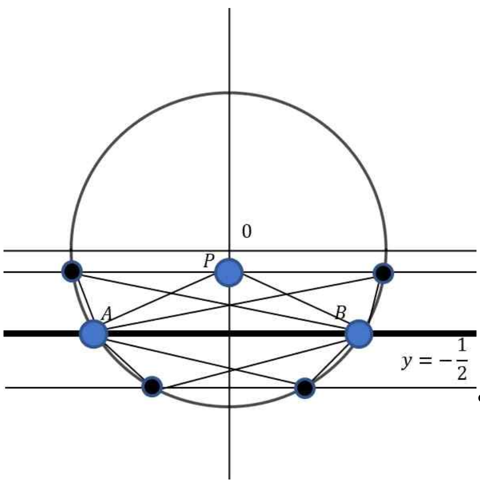
이렇게 $t=-1$일 때도 있죠? 검은색 점 2개에다가 점 P와 같을 때도 있으니까 총 3개라서 $f(-1)=3$인데 t가 -1보다 약간 작으면



점 P가 이렇게 원 밖으로 나가버리면서 위쪽에만 2개가 가능하네요.

$\lim_{t \to -1-} f(t) = 2$입니다. 오! 더해서 5가 되네요! $a = -1$입니다.

이제 $\lim_{t \to 0-} f(t) = b$이거 해봅시다. 아까 해봤었죠? $t = 0$보다 약간 작을 때의 함숫값이니까



이거잖아요. 4개네요. 따라서 $\lim_{t \to 0-} f(t) = b = 4$입니다.

$a + b = 4 - 1 = 3$이네요. 답은 ③번입니다.

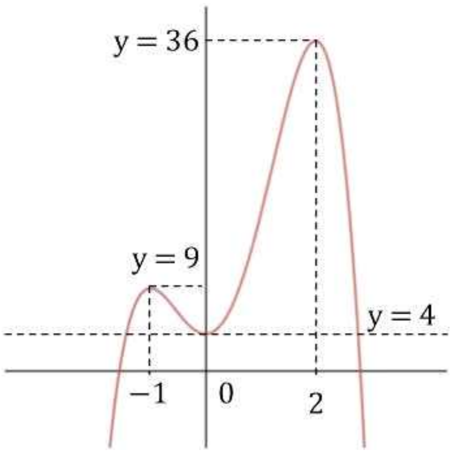
7. 정답 36

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

a가 35이하인 자연수래요! 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

그리고 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$라고 합니다. 관찰부터 해봅시다. 인수분해는.... 쉽지 않은 것 같네요.

미분해서 극점 찾아봅시다. $f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$이니까 $x=-1,\ 2$에서 극대, $x=0$에서 극소입니다. $f(-1)=9,\ f(0)=4,\ f(2)=36$이네요.



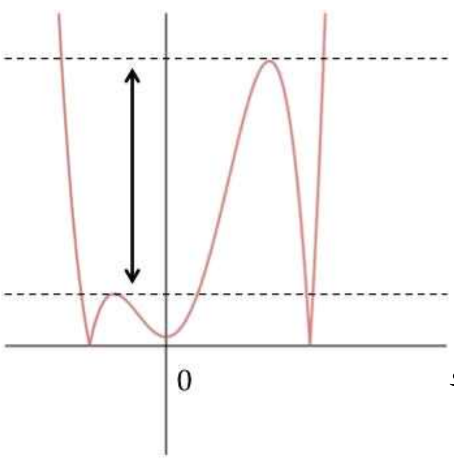
이렇게 되네요.

2) 절댓값 함수

이때 $g(x)=|f(x)-a|$라고 합니다. 일단 $f(x)-a$는 $f(x)$를 a만큼 아래로 내린 함수에요. 그 함수를 절댓값을 씌워서 접어 올린 거죠.

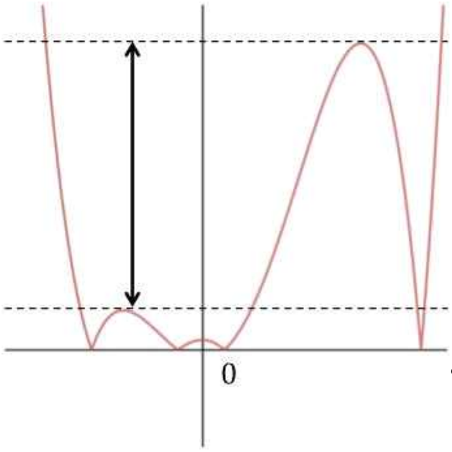
3) 조건해석

(가)조건에서 $y=g(x)$와 $y=b$가 4개의 점에서 만난다고 합니다. 그냥 스을쩍 그래프 그려서 확인만 해볼까요? 일단 위에 있는 $f(x)$를 a만큼 내리고 접어 올리면...! 어? 그런데 문제가 있어요. a가 얼마인지에 따라 접어 올렸을 때 $g(x)$의 개형이 달라지는데요? 만약 a가 1부터 극솟값인 4까지라면

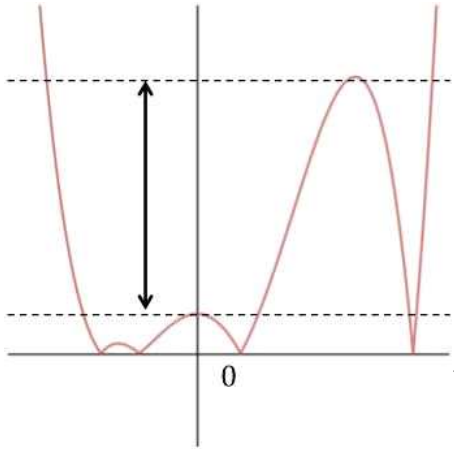


의 그래프는 이렇게 됩니다. 4개의 점에서 만나려면 $y=b$가 저렇게 화살표 사이에 있으면 되겠네요.

그런데 a가 극솟값보다 큰 5부터 극댓값인 9까지라면



이렇게 되거나

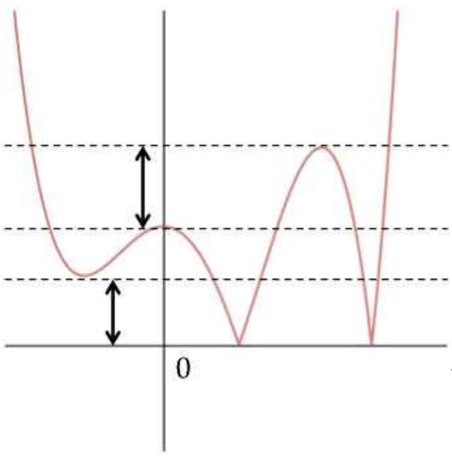


이렇게 됩니다.

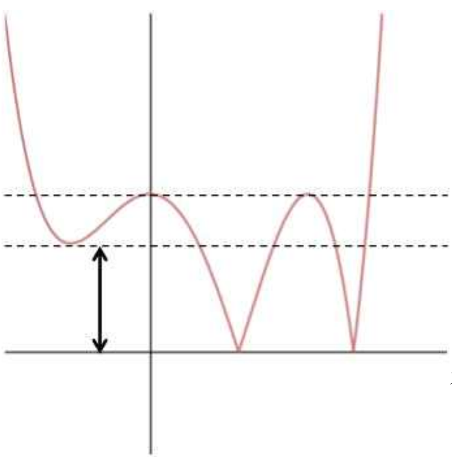
이거는 사실 $f(x)-a$의 극솟값인 $4-a$를 접어 올린 $a-4$와 극댓값인 $9-a$ 중 어느 게 더 큰가에 따라서 그래프가 갈리긴 해요. 그러니까 $a-4<9-a$ $\left(a<\dfrac{13}{2}\right)$이면 왼쪽의 그림이 그려지구요,

$a-4>9-a$ $\left(a>\dfrac{13}{2}\right)$이라면 오른쪽의 그림이 그려집니다. 아무튼 4개의 점에서 만나려면 $y=b$가 화살표 사이에 있어야 합니다.

a가 극댓값보다 큰 10부터 35까지일 때를 볼게요.

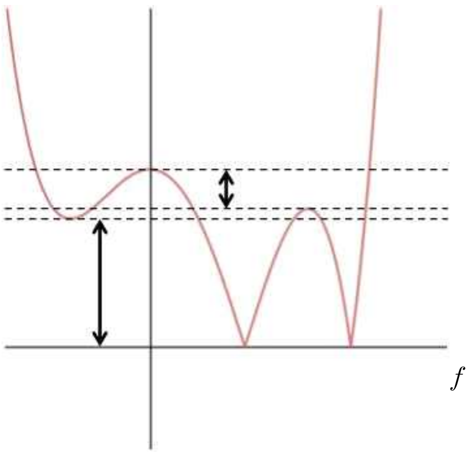


만약 $f(x)-a$의 극솟값인 $4-a$를 접어 올린 $a-4$보다 극댓값인 $36-a$가 크다면($a<20$이라면) 이렇게 그래프가 그려집니다. 화살표 사이에 있어야 하구요.



같다면? 이렇게 그려지죠. 이 경우는 특이하네요. 화살표 사이와 딱 한

번 4개의 점에서 만나는 부분이 있어요. 이 두 개의 경우만 4개의 점에서 만납니다.

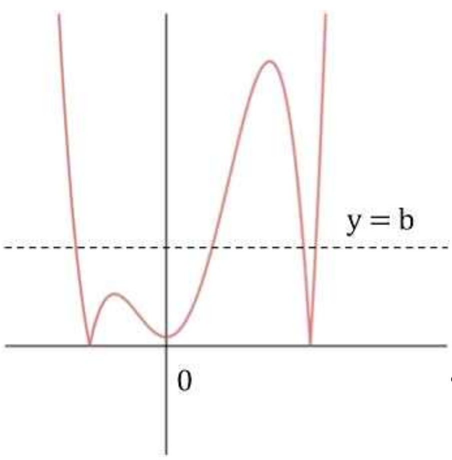


$f(x)-a$의 극솟값인 $4-a$를 접어 올린 $a-4$이 극댓값인 $36-a$보다 크다면($a>20$이라면)이렇게 됩니다. 이것도 사실 엄밀하게 따지자면 더 나눌 수 있는데... 일단은 넘어갈게요.
아무튼 화살표 사이에 있어야 합니다.
뭐 이정도가 $g(x)$의 개형인 것 같아요. (가)조건도 대충 해석이 된 것 같구요. 다음으로 가봅시다.

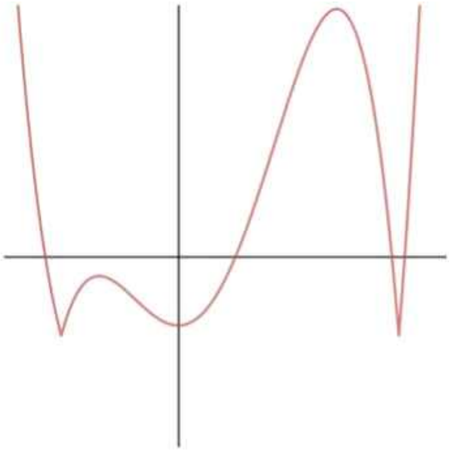
어이구야....(나)조건에서 $|g(x)-b|$가 미분불가능한 점이 4개랍니다. 하.... 절댓값으로 접어 올린 걸 또다시 접어 올려야 하네요. 딱 봐도 쉽지 않아 보이는데요? 그래도 아까 개형 다 나눠놨으니까 케이스 분류하고 천천히 가봅시다.

4-1) 케이스 분류

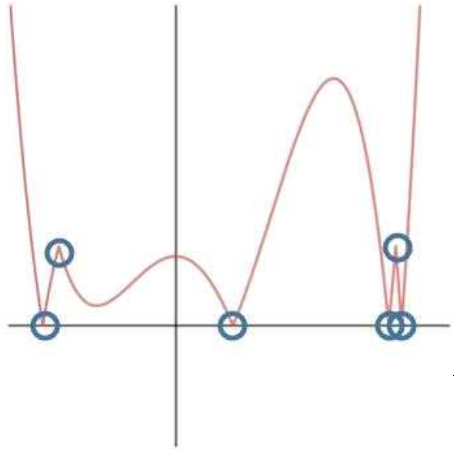
4-1-1) $1 \le a \le 4$일 때



이렇게 되는 거죠? 오? 그런데 $g(x)-b$라는 함수는 지금 보고 있는 $g(x)$를 b만큼 내린 함수잖아요. 그런데 지금 $y=g(x)$와 $y=b$가 만나네요? 이거 그대로 x축에 만나게끔 내리고 접어 올리면 되겠어요.



이렇게 내리고

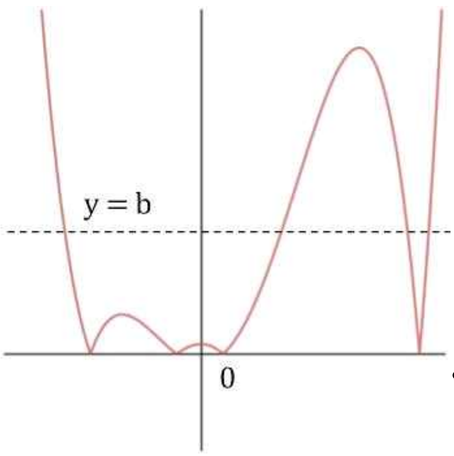


접어 올리면

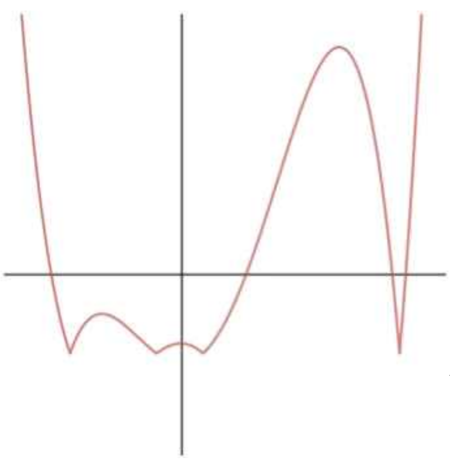
이렇게 됩니다. 미분불가능한 점이 6개나 되는데요?

4-1-2) $5 \le a \le 9$일 때

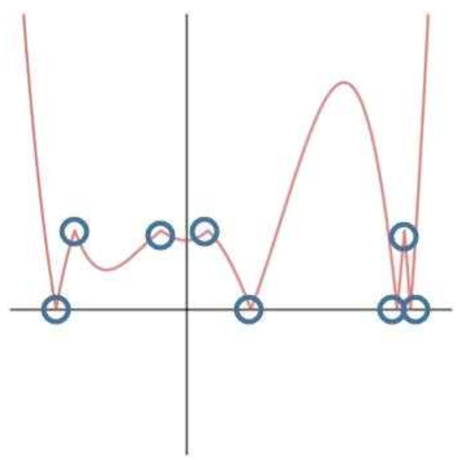
4-1-2-1) $5 \le a \le 6$일 때



이렇게 $y=b$를 긋고



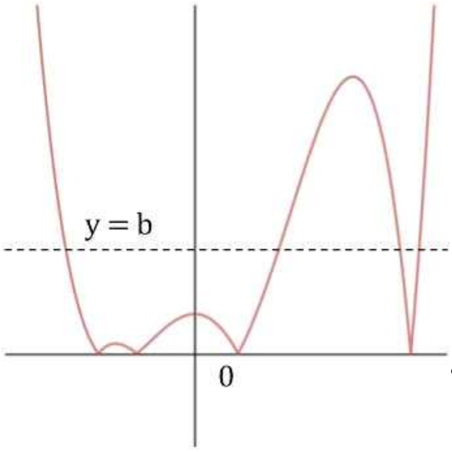
내리고, 접어 올리면



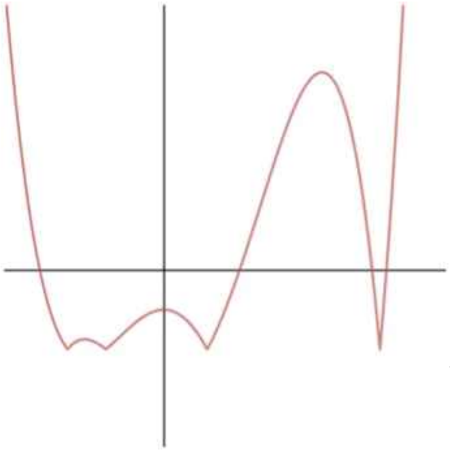
이렇게

됩니다. 안 되죠?

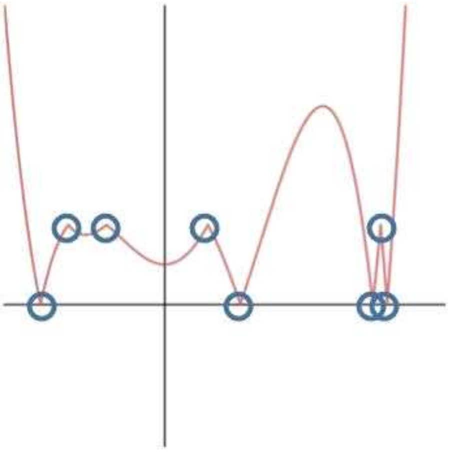
4-1-2-2) $7 \le a \le 9$일 때



이렇게 긋고



내리고 접어 올리면

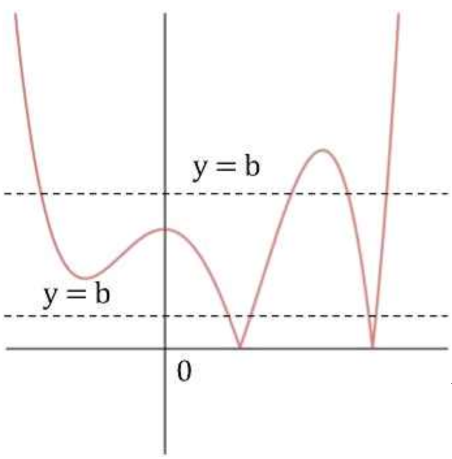


이렇게 되는데 안 되네요.

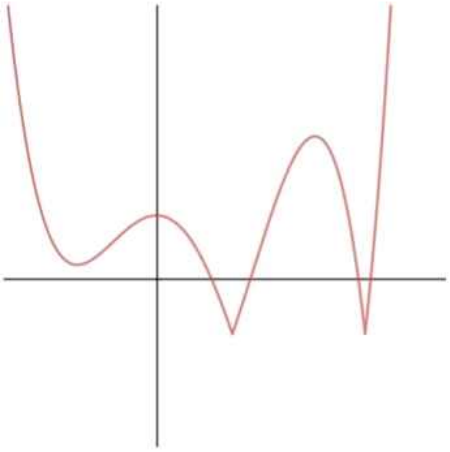
4-1-3) $10 \le a \le 35$일 때

4-1-3-1) $10 \le a \le 19$일 때

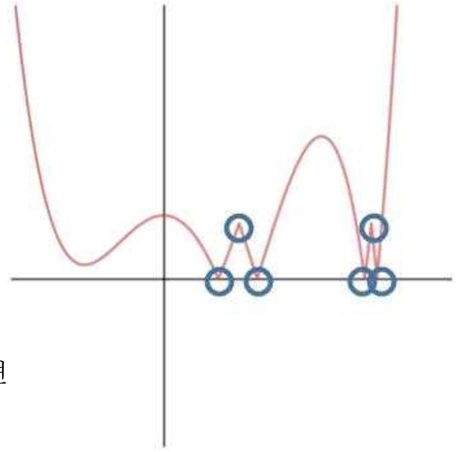
이거는 범위가 두 개였죠?



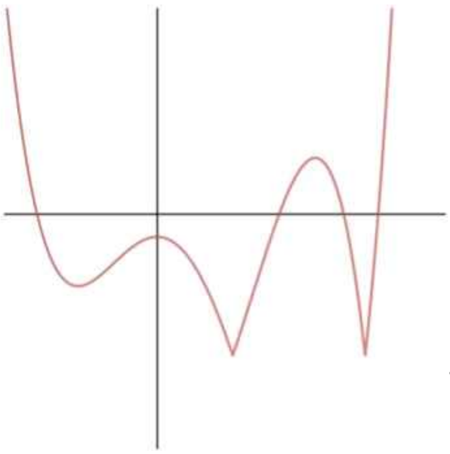
각각 확인해볼게요. 아래부터 확인해봅시다.



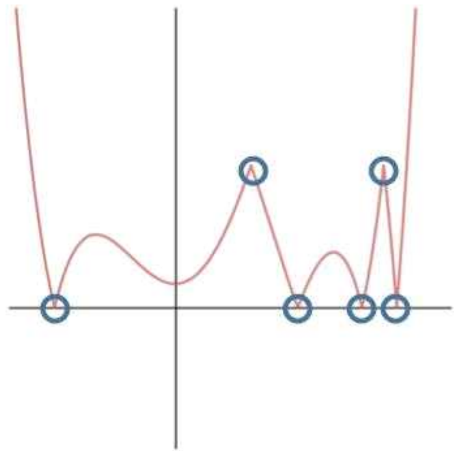
이렇게 내리고 접어 올리면



안 되네요.

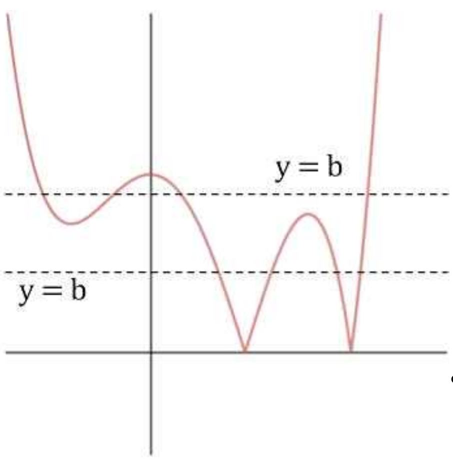


이렇게 내리고 접어 올리면

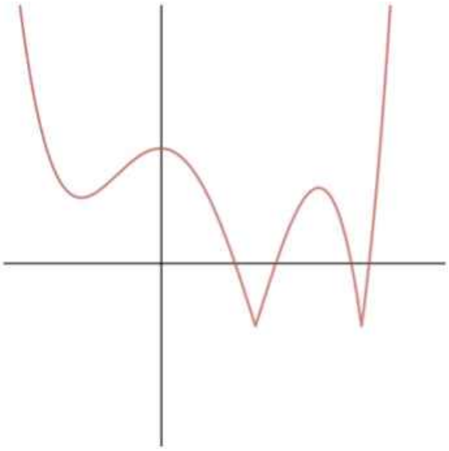


안 됩니다.

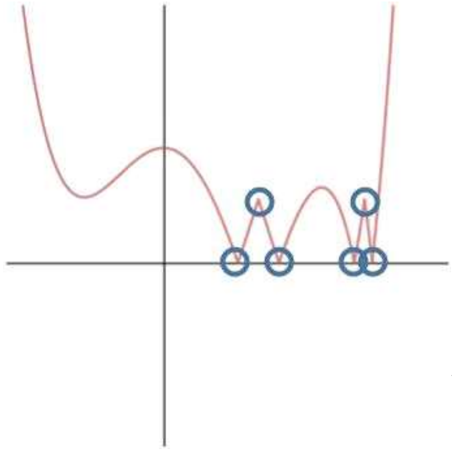
4-1-3-2) $21 \leq a \leq 35$일 때



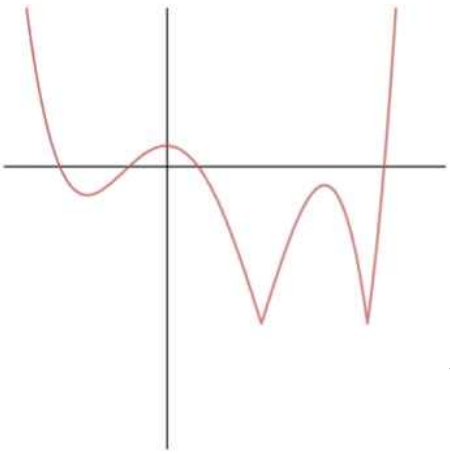
이렇게 두 개 확인해볼게요. 아까 말했듯이 이것도 사실 개형이 두 개로 나뉘긴 해요. 이거는 극댓값을 내린 $9-a$를 접어 올린 $a-9$와 극댓값을 내린 $36-a$ 중 어느게 더 크냐에 따라서 또 나뉘거든요. 그런데 내리고 접어 올렸을 때 양상이 같아서 생략할게요.



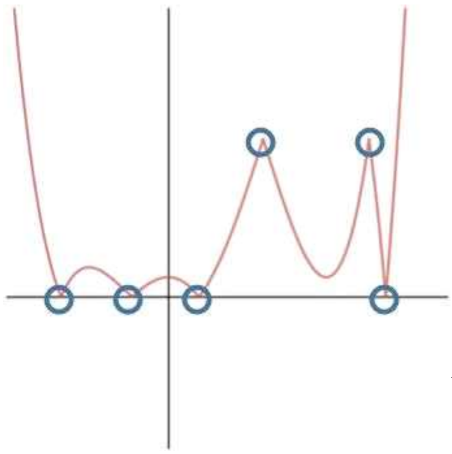
내리구요,



접어 올립니다. 안 되네요!

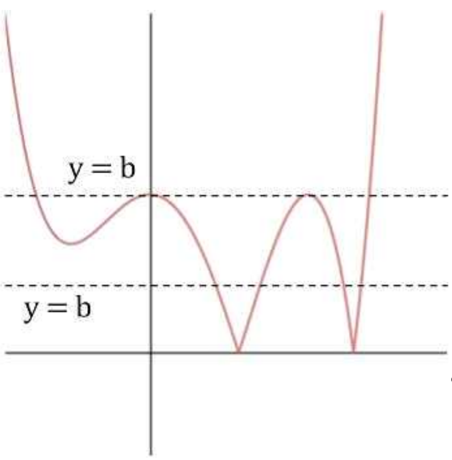


내리구요,

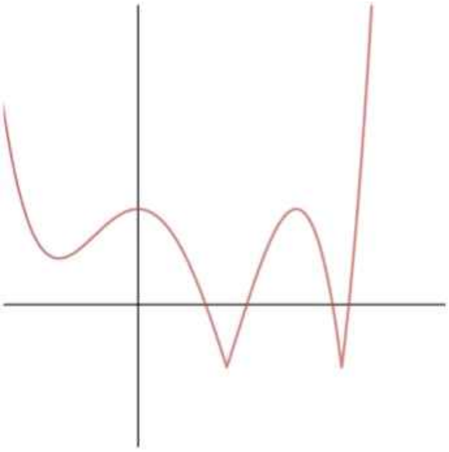
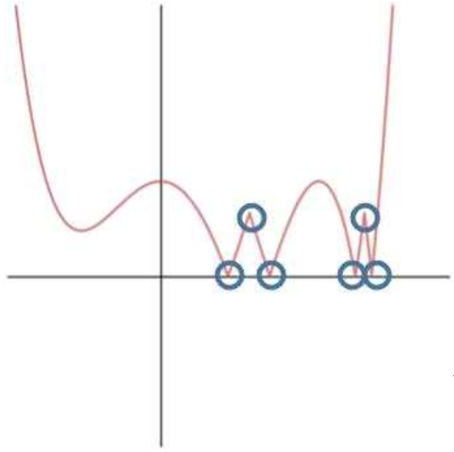


접어 올리면 안 되네요!

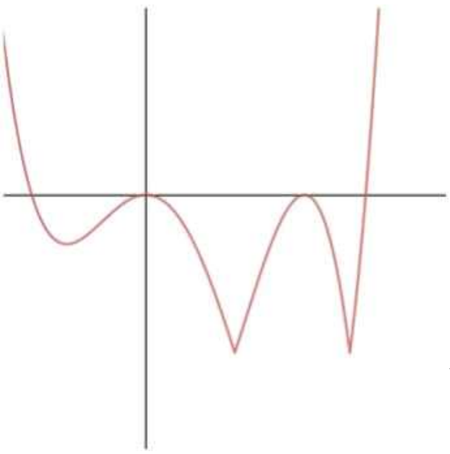
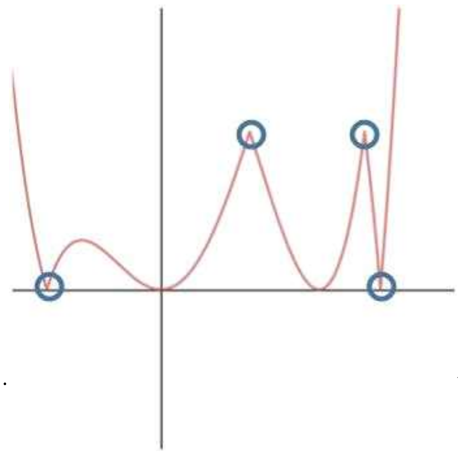
4-1-3-3) $a=20$일 때



이렇게 설정할 수 있죠?

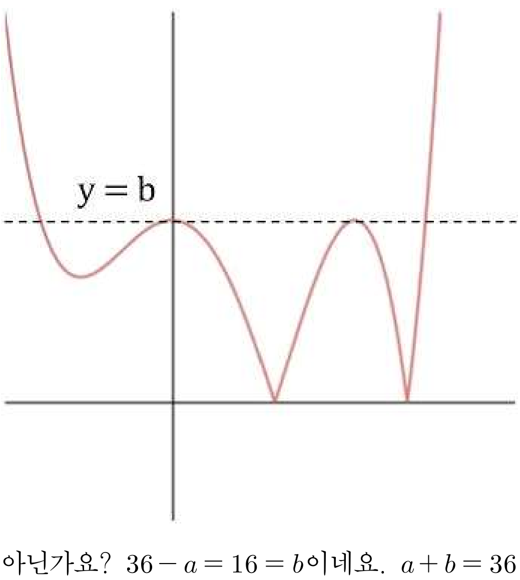

내리고

접어 올립니다.

안 되네요.


내리구요....

접어 올리면...

되네요!! 이거죠?

일단 $a=20$이에요. 그런데 b도 구해야 해요. 지금



이렇게 되는 거잖아요. $y=b$는 $f(x)-a$의 극댓값과 같은 거 아닌가요? $36-a=16=b$이네요. $a+b=36$입니다.

4-2) 조건해석

그런데 사실 접어 올리지 않고도 바로 개형을 찾을 수 있어요. 지금까지 이야기했던 거지만 접어 올릴 때 x축과 '그냥' 만나는 건, 그러니까 인수가 1개인 경우 접어 올리면 그 점에서 미분불가능이 되죠? 미분가능이 되려면 접선의 기울기까지 0이 되어야죠. 그런데 $f(x)-a$의 그래프들을 잘 관찰해보면 x축과 최소한 2개의 점에서는 '그냥' 만났어요. 그 말은 $g(x)$는 최소한 미분불가능한 점이 이미 2개가 있었다는 이야기에요. 그 상황에서 $y=g(x)$는 $y=b$와 4개의 점에서 만났고, b만큼 내린 $g(x)-b$도 마찬가지로 x축과 4개의 점에서 만나죠.

그런데 아까도 말했듯이 $g(x)$는 이미 미분불가능한 점이 2개 이상 가지고 있었어요. 만약 $f(x)-a$가 x축과 2개의 점에서만 '그냥' 만났다면 그걸 접어 올린 $g(x)$는 2개의 미분불가능한 점을 가지게 되잖아요. 그 상황에서 4개의 점에서 만나는 $y=b$를 긋고 내리고 접어 올렸을 때 4개의 점에서 미분불가능하려면 2개는 미분불가능한 점으로 추가가 되고 나머지 2개는 미분가능한 점으로 추가가 되어야 해요. 그래야 미분불가능한 점의 총 개수가 4개가 되죠. 다시 말해서 $g(x)-b$가 x축과 2개의 점에서 '그냥' 만나고 2개의 점에서 접해야 한다는 말이 됩니다.

이걸 다시 해석해볼까요? $y=g(x)$와 $y=b$가 2개의 점에서는 '그냥' 만나고 2개의 점에서는 접해야 한다는 말이 되겠네요.

만약 $f(x)-a$가 x축과 4개의 점에서 '그냥' 만났다면 4개의 점 모두 미분불가능한 점이 됩니다. 이 상황에서 $g(x)-b$를 접어 올려서 4개의 미분불가능한 점이 되려면 $g(x)-b$가 x축과 만나는 점들은 모두 '그냥' 만나서는 안 되고 접해야 합니다. 더 이상 미분불가능한 점이 추가가 되면 안 되거든요.

이걸 다시 해석하면 $y=g(x)$와 $y=b$가 만나는 점들은 모두 '그냥' 만나서는 안 되고 접해야 한다는 말이 됩니다. 앞으로 가서 모든 경우를 살펴보세요. $f(x)-a$가 x축과 4개의 점에서 '그냥' 만난 경우에 $y=g(x)$와 $y=b$가 만나는 점들이 모두 '그냥' 만나지 않고 접하는 경우는 없습니다. 최소한 1개씩은 '그냥' 만났어요.

그리고 $f(x)-a$가 x축과 2개의 점에서만 '그냥' 만난 경우에 $y=g(x)$와 $y=b$가 2개의 점에서는 접하게 되는 건 $a=20$이고 $b=16$인 경우 하나밖에 없습니다. 따라서 $a+b=36$입니다.

이거 사실 말로 써서 길고 복잡하게 보이는 거지 지금까지 절댓값 함수를 접어 올렸을 때 미분가능한 조건을 알고 있었다면 빠르게 할 수 있어요.

8. 정답 35

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

원점 O를 출발하는 P의 속도 $v(t)$가 $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t-1 & (0\le t<2)\\ -t^2+10t-16 & (2\le t<8)\\ 2-\frac{1}{4}t & (8\le t\le 16)\end{cases}$ 라고 합니다. 이때 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값을 구하라네요.

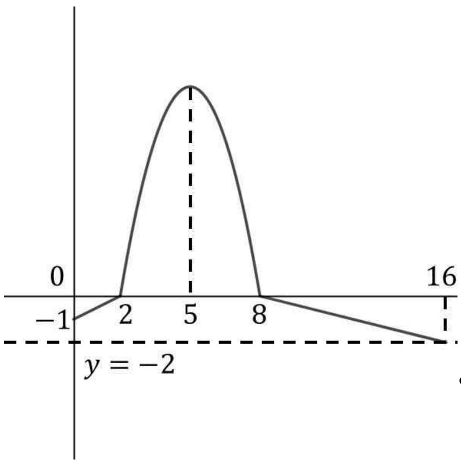
그러니까 원점 O와 P가 최대로 멀어진 길이를 찾으라는 거죠? 저번에도 말했듯이 P는 위치 그래프의 함숫값만큼 y축 위를 움직입니다. 원점은 $y=0$이구요. 원점에서 길이가 가장 멀어지려면 어떻게 해야 할까요? 함숫값이 가장 커져야겠죠.

아니죠? 함숫값이 가장 작아져도 됩니다. 길이는 절댓값을 씌워야 하잖아요? 최대값보다 최솟값이 절댓값을 씌웠을 때 크다면 거기서 길이가 최대가 되는 거겠죠. 그러니까 8과 -9가 있다면 9가 최대인 길이가 되는 거예요. 그러면 그래프를 그려봐야겠는데요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

그런데 생각해봅시다. 속도를 적분하면 위치가 되잖아요? 그러면 위치가 가장 커지거나 가장 작아지려면? 적분값이 최대가 되거나 적분값이 최소가 되면 되겠네요. 그러니까 $v(t)$를 0부터 적분해서 적분값이 가장 커지거나 가장 작아지는 부분을 찾아봅시다. $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t-1 & (0\le t<2)\\ -t^2+10t-16 & (2\le t<8)\\ 2-\frac{1}{4}t & (8\le t\le 16)\end{cases}$ 를 그려볼게요.

일단 $0\le t<2$에서 $v(t)=\frac{1}{2}t-1$이니까 $(0,\ -1)$, $(2,\ 0)$을 지납니다. 그리고 $2\le t<8$에서 $v(t)=-t^2+10t-16=-(t-2)(t-8)$이니까 $t=2,\ 8$에서 t축과 만납니다. 축은 $t=5$이구요. 그리고 $8\le t\le 16$에서 $v(t)=2-\frac{1}{4}t$이니까 $(8,\ 0)$, $(16,\ -2)$를 지나구요. 그려보면



이렇게 됩니다.

지금 잘 보세요. 0부터 2까지 적분한 값은 밑변 2, 높이 1의 삼각형이니까 1이에요. 그리고 2부터 8까지 적분한 값은 $-(t-2)(t-8)$과 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이니까 $\frac{1}{6}\times(8-2)^3=36$이구요. 8부터 16까지 적분한 값은 밑변 8, 높이 2인 삼각형이니까 8이에요. 0부터 2까지, 그리고 8부터 16까지는 t축 아래에 있구요. 그러니까 적분하면 음수가 된다는 거예요.

그러면 0부터 적분했을 때 값이 가장 커지는 부분을 찾아보세요. 8까지이죠? $-1+36=35$잖아요. 16까지 적분하면 $-1+36-8=27$이니까 오히려 작아져요. 따라서 $t=8$일 때가 최대입니다.
그러면 길이는요? 위치가 곧 길이죠. 위치는 원점부터 멀어진 곳을 위치라고 하는 거잖아요. 물론 위치가 음수일 때는 절댓값을 씌운 것이 길이가 되지만 지금은 양수잖아요. 따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값은 35입니다.

9. 정답 ⑤

1) 조건해석

$f(x)$와 $g(x)$가 다항함수인데 (가)조건에서 $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서만 만난다고 합니다. 그러면 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근이 2개여야 한다는 거죠? 다시 말하면 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개여야 한다는 거예요.
$y=f(x)-g(x)$와 x축이 2개의 점에서만 만나야 한다는 거죠.

2) 함수 구하기 - 차함수

그런데 우리는 $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$를 알고 있잖아요. $y=f(x)-g(x)$의 형태로 만들기 위해서

차함수를 이용해봅시다. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 차함수에 의하여

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x^2-2x=x(x-2)$입니다. 그러니까 $y=h(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소가 되는 거죠.

$h'(x)$가 이차함수니까 $h(x)$는 삼차함수겠죠? 삼차함수가 x축과 두 개의 점에서 만난다는 건? 한 점에서는 접해야 한다는 거죠.

그런데 지금 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소잖아요? x축에 접하기 위해서는 $x=0$에서 접하거나 $x=2$에서 접해야 합니다. 다시 말하면 $h(0)=0$이거나 $h(2)=0$이어야 한다는 거죠.

ㄱ에서 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대냐고 물어보네요. 이건 해봐야 알 것 같아요.

$f'(x)=x^2-4x$이니까 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소네요. $g'(x)=-2x$이니까 $g(x)$는 $x=0$을 축으로 하고 $x=0$에서 극댓값을 갖습니다. 모두 극대 맞네요? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$이냐고 물어보네요. 다시 말하면 $h(0)=0$이거나 $h(2)=0$이냐고 물어보는 거죠? 방금 $h(0)=0$이거나 $h(2)=0$이어야 한다고 했었잖아요. 맞네요?

3) 정적분 변수

ㄷ에서 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\geq 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이냐고 물어봅니다.

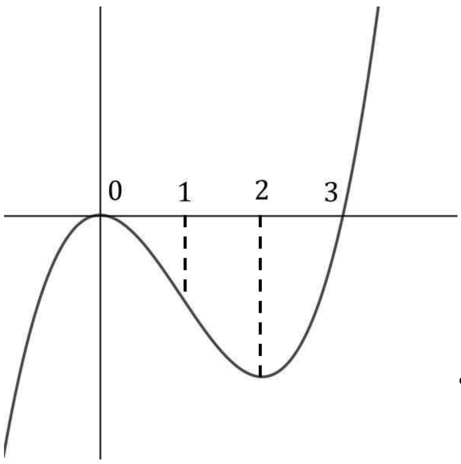
그러니까 $\int_{-1}^{x}h(t)dt$가 x축보다 항상 크거나 같으면 $x=1$에서의 함숫값이 2가 되냐는 거잖아요? 이건 그래프를 그려봐야 알겠는데요?

그런데 문제는 $h(0)=0$인지, $h(2)=0$인지를 몰라요. 그러면 케이스를 나눠야겠죠?

4) 케이스 분류, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

4-1) $h(0)=0$일 때

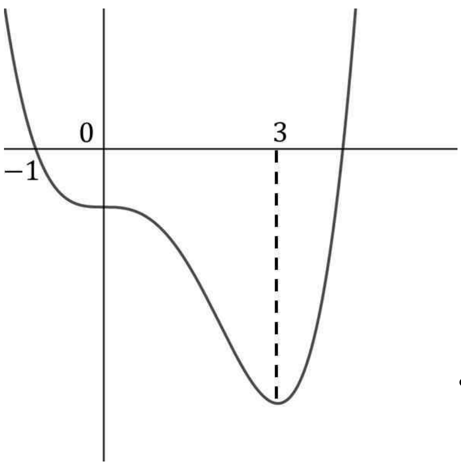
$x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소인데 $x=0$에서 x축과 접하니까 삼차함수의 비율관계에 의하여



이렇게 되겠죠?

그런데 이 상태에서 적분을 한 번 더 해야 합니다. 그리고 $x=-1$에서 x축과 만나도록 적분을 해야 하죠.

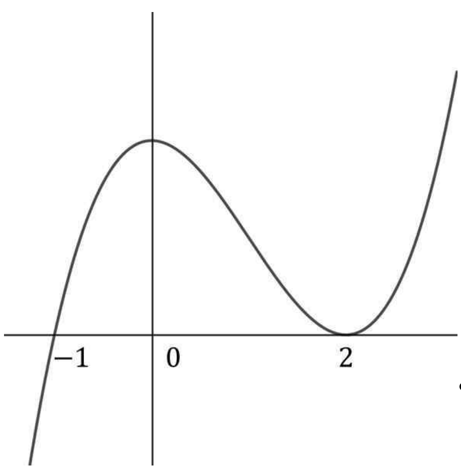
$x=0$에서는 접하면서 방향 그대로 지나가고, $x=3$에서는 극솟값을 갖는 함수입니다.



이렇게 되겠어요. 항상 x축보다 크거나 같나요? 아닌데요?

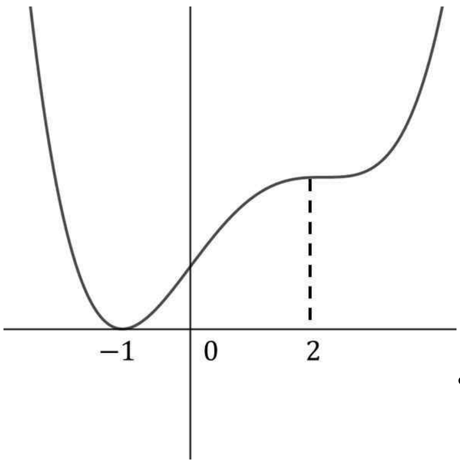
4-2) $h(2)=0$일 때

이러면 $x=2$에서 x축과 접하니까 삼차함수의 비율관계에 의하여



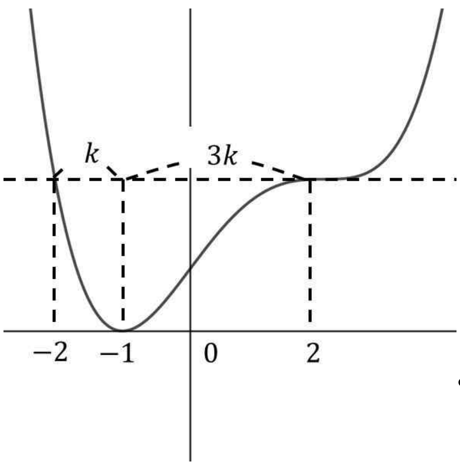
이렇게 될 거에요.

이 상태에서 한 번 더 적분해봅시다. $x=-1$에서는 극솟값을 갖고 $x=2$에서는 접하면서 방향 그대로 지나가는



이런 그래프가 그려질 거예요. 이러면 항상 x축보다 크거나 같네요? 이거네요.

이때 $x=1$에서의 함숫값이 2인지를 확인해야겠죠? 일단 $h'(x)=x^2-2x=x(x-2)$이니까 $h(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$입니다. 거기에 사차함수에 비율관계에 의하여



이렇게 됩니다.

그림과 같이 $y=\int_{-1}^{x}h(t)dt$에 접하도록 $y=0$이 아닌 직선을 그었을 때 만나는 점을 x좌표가 작은 순서대로 α, β라 하면 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 $1:3$내분점은 극점의 x좌표가 되죠. $\int_{-1}^{x}h(t)dt$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{12}$이니까 $\int_{-1}^{2}h(x)dx=\int_{-1}^{-2}h(x)dx=k$라 하면 차함수에 의하여 $\int_{-1}^{x}h(t)dt-k=\frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3$이고 $\int_{-1}^{x}h(t)dt=\frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3+k$입니다. 여기서 $x=-1$에서의 함숫값이 0이니까 $k=\frac{9}{4}$이네요.

$\int_{-1}^{x}h(t)dt=\frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3+\frac{9}{4}$입니다.

$x=1$을 넣으면 $\int_{-1}^{1}h(t)dt=2$이네요. ㄷ도 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

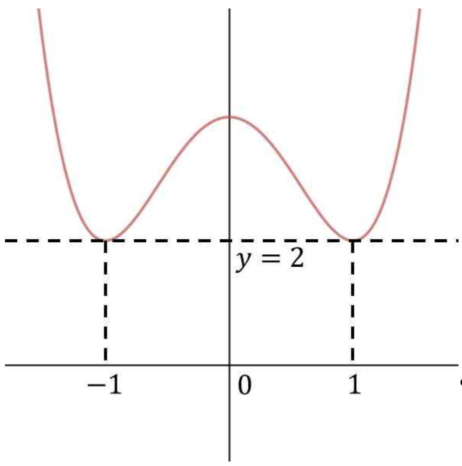
10. 정답 ⑤

1) 문제해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수인데 $f'(-x)=-f'(x)$라고 합니다. 이건 좀 특이하네요. 이거 원래는 기함수를 나타내는 표현이죠? 그런데 도함수가 기함수라고 합니다. 도함수가 원점대칭이고 $f'(0)=0$이에요.

이때 $f'(1)=0$이고 $f(1)=2$라고 합니다. 일단 $f'(x)$가 원점 대칭이니까 $f'(1)=0$이면 그 대칭부분에 있는 $x=-1$ 역시 $f'(-1)=0$이겠죠?

정리하면 $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$입니다. 생각나는 개형이 있죠? 거기다 $f(1)=2$이니까



이렇게 되겠네요.

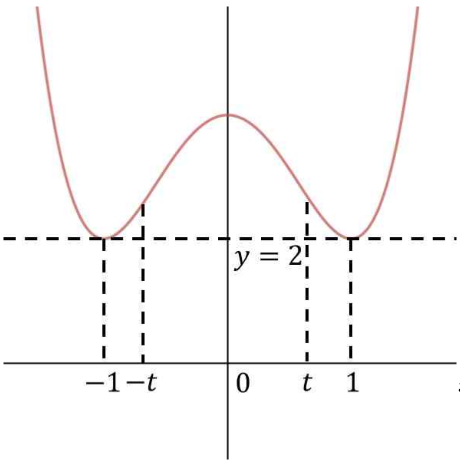
2) 함수 구하기 - 차함수

$y=f(x)$와 $y=2$가 $x=-1$, 1에서 접하고 있어요. 차함수에 의하여 $f(x)-2$는 $(x+1)$, $(x-1)$라는 인수를 각각 두 개씩 가집니다. 따라서 $f(x)-2=(x+1)^2(x-1)^2$이고 $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2+2$이네요.

ㄱ에서 $f'(-1)=0$냐고 물어보네요. 맞죠?

ㄴ에서 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$냐고 물어봅니다. 그러니까 다시 말해서 $x=0$에서 k만큼 앞으로 간 곳까지의 적분값과 $x=0$에서 k만큼 뒤로 간 곳에서의 적분값이 같냐고 물어보는 거죠?

저거 그래프 잘 보세요. $x=0$축 대칭함수 아닌가요?



$x=0$축에 대하여 대칭이니까 적분값은 같습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 $0<t<1$일 때 $\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$이냐고 물어보네요. 음...

3-1) 적분 계산

그러면 진짜 적분해보면 되죠. $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2+2$이니까

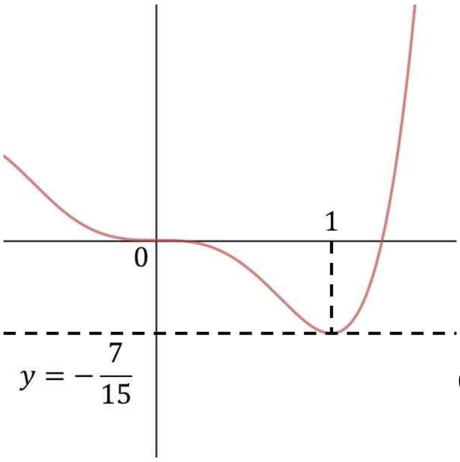
$\int_{-t}^{t} f(x)dx=\int_{-t}^{t}\left((x+1)^2(x-1)^2+2\right)dx$입니다.

그런데 $f(x)$는 우함수잖아요? y축 대칭이니까요. 우함수의 특징은 $\int_{-t}^{t} f(x)dx=2\int_{0}^{t} f(x)dx$이죠. 따라서

$\int_{-t}^{t}\left((x+1)^2(x-1)^2+2\right)dx=2\int_{0}^{t}\left(x^4-2x^2+3\right)dx=2\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+3x\right]_0^t=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+3t\right)$입니다.

그러니까 우리는 $0<t<1$에서 $2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+3t\right)<6t$이고 $\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3<0$인지 확인해보면 되는 거죠.

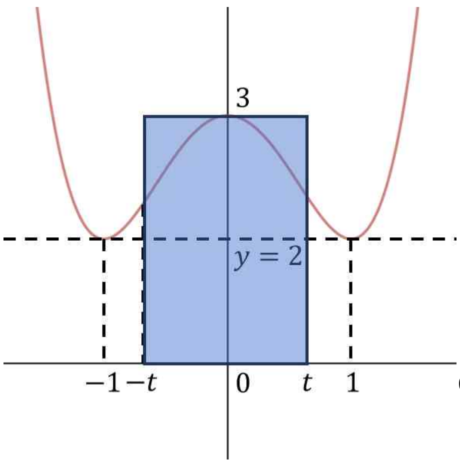
그래프는 똑같이 그리면 됩니다. 일단 인수분해는 $t^3\left(\frac{1}{5}t^2-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{5}t^3\left(t-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(t+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$이니까 $t=0$에서 t축에 접하고, $t=-\sqrt{\frac{10}{3}}$, $\sqrt{\frac{10}{3}}$에서 t축과 만나네요. 그리고 $t=1$에서 함숫값은 $-\frac{7}{15}$입니다. 미분 안 해도 그래프를 그릴 수 있겠는데요?



$0<t<1$에서 $\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3<0$맞죠? ㄷ은 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요. 그런데 5차함수를 그리는 게 맞는 풀이일까요? 뭐 그럴수도 있겠지만 출제자가 의도한 건 아니라고 생각하긴 합니다.

3-2) 정적분 관찰

$\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$에서 $6t$를 잘 관찰해보세요. 그리고 그래프도 잘 관찰해보세요. 지금 $f(0)=3$인데



$6t$라는 건 밑변의 길이가 $2t$이고 높이가 3인 직사각형 아닌가요?

그리고 $\int_{-t}^{t} f(x)dx$의 넓이를 비교해 보세요. 무조건 직사각형의 넓이가 크죠? 따라서 $\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$입니다. ㄷ도 맞네요. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요. 약간 발상적일 수 있긴 해요. 하지만 정적분할 때는 항상 관찰해야 합니다. 쉬운 풀이를 찾아낼 수 있거든요.

11. 정답 432

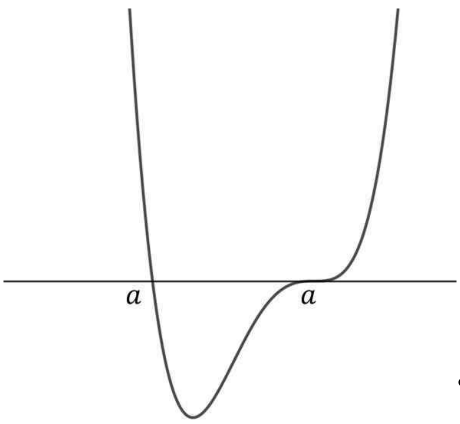
1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이구요, $g(x)=\displaystyle\int_t^x f(s)ds$라고 합니다. 일단 아래끝에 있는 $x=t$를 넣어보면 $g(t)=0$이 되네요. 그리고 미분하면 $g'(x)=f(x)$가 됩니다. $f(x)$가 $g(x)$의 도함수가 되네요.

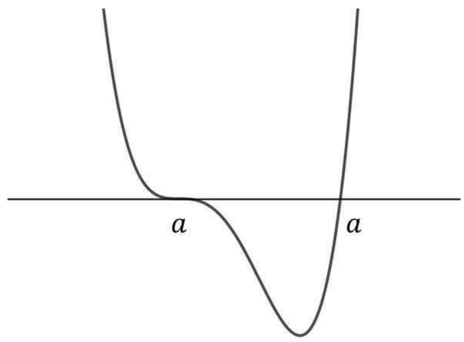
2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

(가)조건에서 $f'(a)=0$라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1개라고 합니다. 어? $g(x)$는 $f(x)$를 적분한 식이니까 사차함수잖아요. 사차함수가 접어 올렸을 때 미분가능하지 않은 x의 개수가 1개가 된다구요? 개형 바로 떠오르죠?

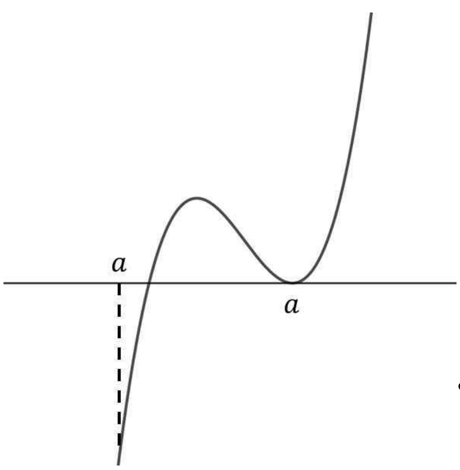


이렇게 되거나

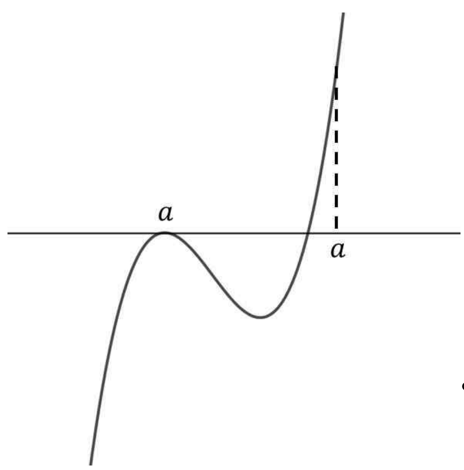


이렇게 됩니다.

그런데 아까 (가)조건에서 $f'(a)=0$라고 했잖아요. $g(x)$의 그래프로 $f(x)$의 그래프를 바로 그릴 수 있죠?

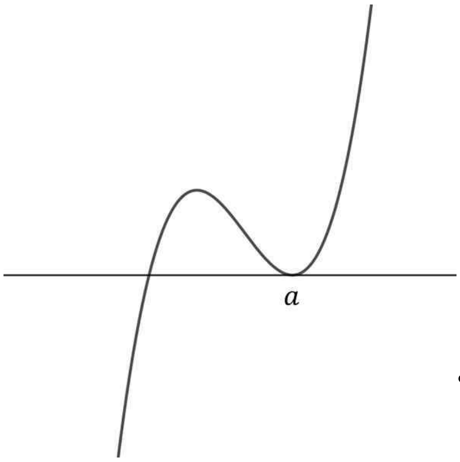


이렇게 되거나

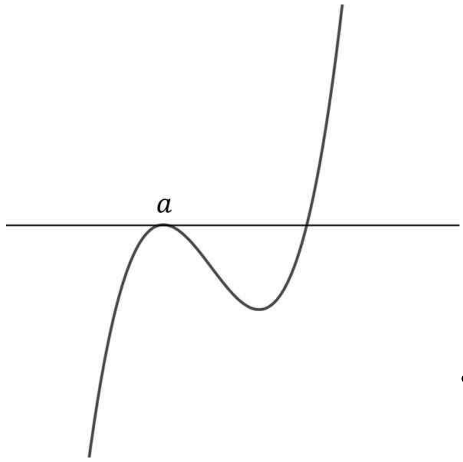


이렇게 될 거예요.

이 중에서 $f'(a)=0$인 경우는?

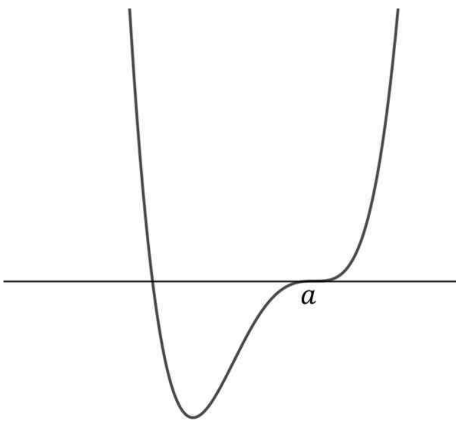


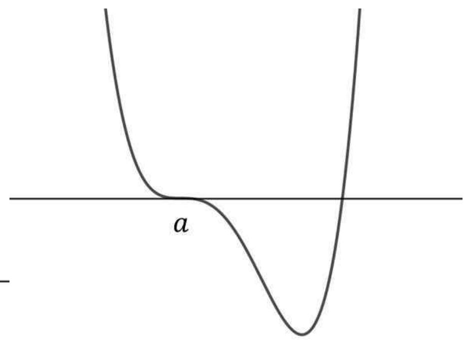
이거와



이거네요.

결국 $g(x)$에서 a의 위치는



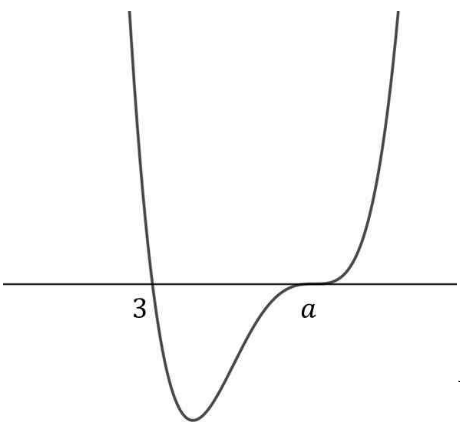


이렇게 되겠네요.

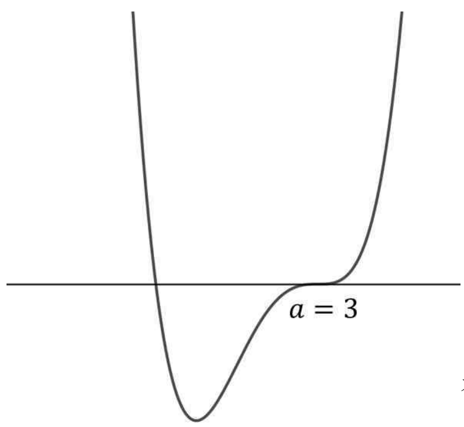
그리고 $g(a)$가 $h(t)$라고 합니다. $h(3)=0$이라고 하네요. 그럼 넣어봐야겠죠?

$t=3$일 때 $g(x)=\int_3^x f(s)ds$이구요, $g(3)=0$입니다. 그리고 $g(a)=0$이네요.

이러면 a와 3이 같냐, 다르냐에 따라서 경우가 좀 나뉘네요.

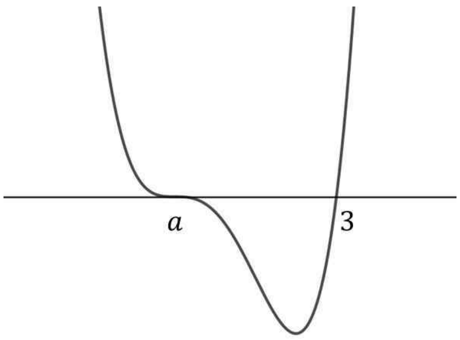


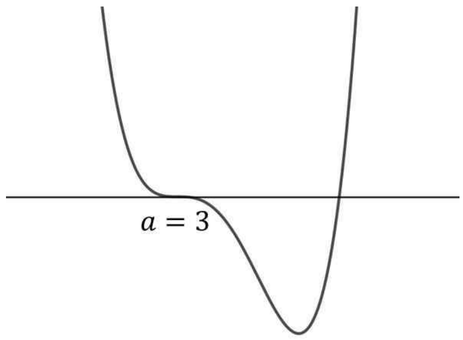
다르다면 이렇게,



같다면

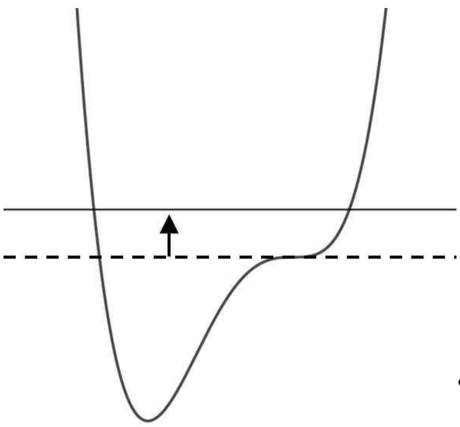
이렇게 되구요,



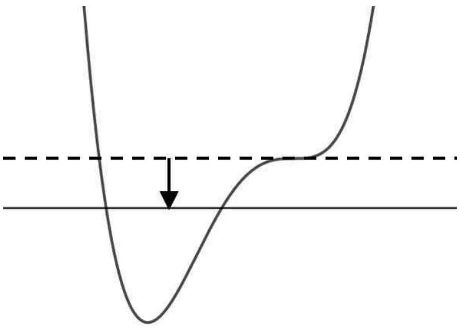


다를 때, 같을 때입니다.

그리고 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값 27을 가진대요. 그러면 $h(2)=27$이죠? $t=2$일 때 $g(x)=\int_2^x f(s)ds$이구요, $g(2)=0$입니다. 그리고 $g(a)=27$이에요.
$t=2$에서 '최댓값'을 가진다고 했어요. 그러니까 $t=2$에서 $g(a)$의 값이 가장 크다는 이야기에요.
잘 생각해봅시다. 언제 최댓값을 가지게 되는 걸까요? 만약 $g(x)$가

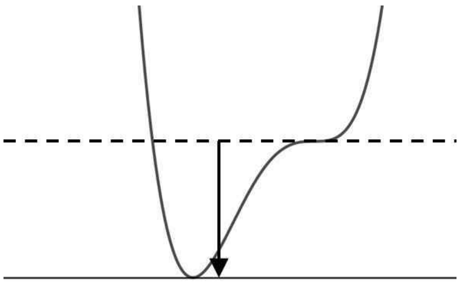


이렇게 된다면 $g(x)$를 위로 올려서 x축에 접하도록 해야 해요. 그래야 접어 올렸을 때 1개의 점에서만 미분불가능하게 되죠. 그런데 $g(x)$를 위로 올린다는 건 $g(a)$가 음수가 된다는 말이잖아요? 왜냐면 $g(x)-g(a)$니까요. $-g(a)$가 양수가 되어야 위로 올라가잖아요. 그러니까 $g(a)$가 음수가 되죠. 이러면 최댓값이 될 수가 없는데요?
만약



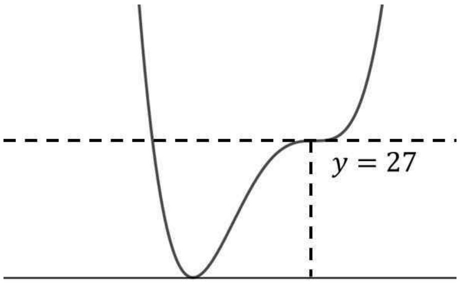
이렇게 살짝 위로 간다면요? 이러면 아래로 내려야죠. 그 말은 $g(a)$가

양수가 된다는 말입니다. 언제 최대가 될까요?

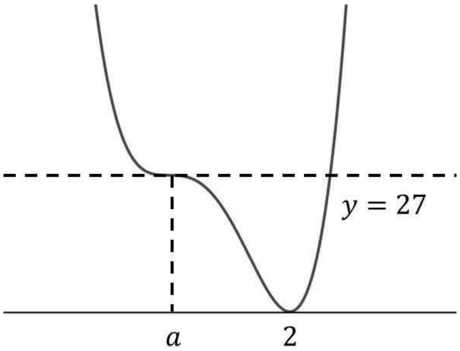


이럴 때죠. 그쵸? 만약 이거보다 위로 올라간다면 $g(t)=0$이 될 수가

없어요. x축과 안 만나는데요? 이 값이 27이고, $g(2)=0$이에요. 일단 x축과 만나는 점은 유일하네요. 그리고 27만큼 아래로 내렸을 때 x축과 접하게 되니까 결국 $g(x)$는

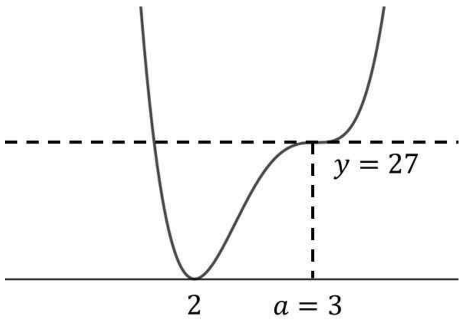


이렇게 되거나



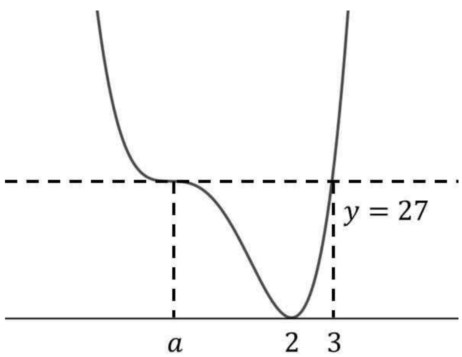
이렇게 됩니다.

그러면 3은요? $x=3$은 어디에 위치하게 되는 거죠? 왼쪽의 그림같은 경우 2보다 3이 크잖아요? 따라서 $a=3$이 될 수밖에 없겠네요.



이렇게 될 거에요.

오른쪽 그림같은 경우도 마찬가지로 $2 < 3$이잖아요. 그러면

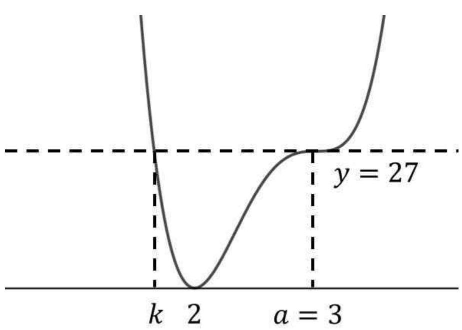


이렇게 되겠네요.

이 중 뭐가 맞는 거죠? 그럼 함수 구해보고 다 값이 맞는지 확인해보면 되겠죠.

3) 함수 구하기 - 사차함수의 비율관계, 차함수

일단



이거부터 해볼게요. 이 그림처럼 $y = 27$과 $y = g(x)$가 만나는 점

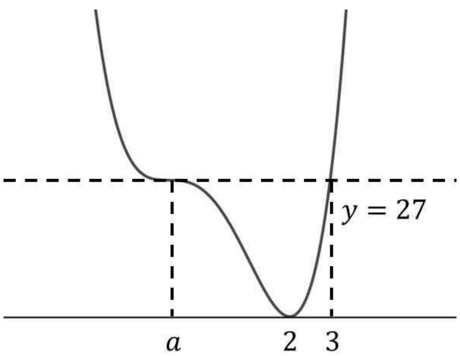
중에서 $x = 3$이 아닌 점의 x좌표를 k라 하면 $y = 27$과 $y = g(x)$은 $x = k$에서 그냥 만나고 $x = 3$에서 접하면서 방향 그대로 지나가죠? 그런데 사차함수의 비율관계가 있잖아요. k와 3의 $1:3$내분점은 극소점의

x좌표인 2가 되는 거였죠. 따라서 $\dfrac{3k+3}{1+3}=2$이고 $k=\dfrac{5}{3}$입니다. 차함수에 의하여 $g(x)-27$은 $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$이라는 인수 하나, $(x-3)$이라는 인수 3개를 가지게 되네요.

거기다 $g(x)$는 $f(x)$를 적분한 거였죠? $f(x)$의 최고차항의 계수는 4니까 $f(x)=4x^3+\cdots$가 되구요. 이거 적분하면 $g(x)$의 최고차항의 계수는 1이 되네요. $g(x)-27=\left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)^3$이구요

$g(x)=\left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)^3+27$입니다.

그리고 $g(2)=0$이어야 하잖아요? 그런데 $g(2)=\dfrac{80}{3}$이네요? 이건 조건에 맞지 않는데요? 이제



이거로 가봅시다. 아까와 마찬가지로 하면 돼요. $y=g(x)$와 $y=27$은

$x=a$에서 접하면서 방향 그대로 가구요. $x=3$에서 그냥 만납니다. 따라서 a와 3의 $3:1$내분점은 2가 되구요.

$\dfrac{9+a}{3+1}=2$이고 $a=-1$이 나오네요. 차함수에 의하여 $g(x)-27$은 $(x+1)$이라는 인수 3개, $(x-3)$이라는 인수 1개를 가집니다. $g(x)$의 최고차항의 계수는 1이구요. 따라서 $g(x)-27=(x+1)^3(x-3)$이고 $g(x)=(x+1)^3(x-3)+27$입니다. 그리고 $g(2)=0$이네요. 맞네요!

이제 $f(5)$만 구하면 돼요. $g'(x)=f(x)$니까 미분하고 $x=5$를 넣으면 되겠네요. 미분하면 $g'(x)=f(x)=3(x+1)^2(x-3)+(x+1)^3$이 되고 $f(5)=432$입니다.

12. 정답 ③

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

주사위를 세 번 던지고 나온 수가 차례로 a, b, c인데 $f(x)=(a-3)(x^2+2bx+c)$가 있어요. 이때

$g(x)=\begin{cases} 1\ (x>0) \\ 0\ (x\leq 0) \end{cases}$가 있는데 $(g\circ f)(x)$가 연속일 확률을 구하랍니다. 일단 구하는 확률은

$\dfrac{(g\circ f)(x)\text{가 연속}}{\text{주사위 세 번}}$ 입니다.

분모부터 구해봅시다. 주사위의 눈은 1부터 6까지 있으니까 경우의 수는 $6^3=216$이네요.
분자를 구해볼게요. 일단 $(g\circ f)(x)$는 $g(x)$의 x자리에 x대신 $f(x)$를 넣은 거잖아요. 넣어봅시다.

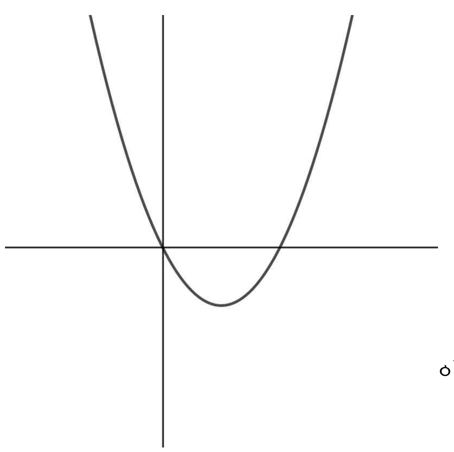
$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 1\ (f(x)>0) \\ 0\ (f(x)\leq 0) \end{cases}$입니다.

이게 연속이어야 한다구요? 잘 생각해보세요. 연속이면 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 합니다. 어느 하나라도 변하면 연속이 아니에요. 그런데 지금 $(g\circ f)(x)$는 $f(x)$가 양수냐 음수냐에 따라 함숫값이 바뀌잖아요.

만약 $f(x)$가 x축을 지나가는 곳이 있다면? 그곳에서 $(g\circ f)(x)$의 함숫값이 바뀌겠죠? 그러면 연속이 안 되잖아요.

결국 항상 x축 위에 있거나 항상 x축보다 작거나 같아야 합니다. 작을 때는 x축과 접하는 거까지는 돼요. 범위가 $f(x)\leq 0$이어서 등호가 있으니까 함숫값이 바뀌지 않거든요.

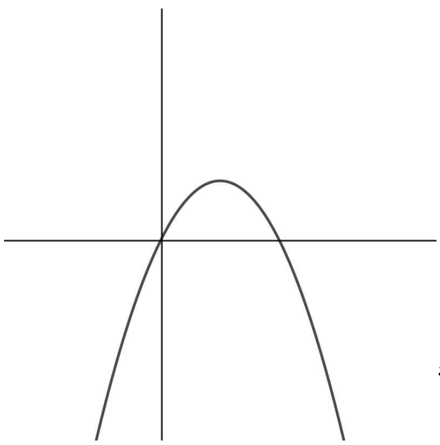
만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라면 $(g\circ f)(x)$가 연속이기 위해서는 $f(x)$는 항상 x축 위에 있어야 합니다. 그래프를 그려보면



이렇게 x축 아래로 내려갈 경우 $(g\circ f)(x)$가 불연속인 점이 생기기

때문이죠.

만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수라면 $(g \circ f)(x)$가 연속이기 위해서 $f(x)$는 항상 x축보다 작거나 같아야 해요. 이것도 마찬가지로 x축 위에 있는 부분이 있도록 그래프를 그려보면



x축 위로 올라갈 경우 $(g \circ f)(x)$가 불연속이 되는 점이 생깁니다.

지금 $f(x)=(a-3)(x^2+2bx+c)$이잖아요? 따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 경우, 즉 $a>3$일 경우에는 $f(x)$는 항상 x축보다 위에 있어야 합니다. 항상 x축보다 위에 있어야 한다는 말은 $x^2+2bx+c$의 판별식이 0보다 작아야 한다는 말이죠. 따라서 $4b^2-4c<0$이고 $b^2<c$이어야 합니다.

지금 해볼까요? $a>3$인 경우는 $a=4$, 5, 6으로 3개입니다. $b^2<c$인 경우는 기준을 잡고 분류를 해봐야겠네요. b를 기준으로 해보면 되겠죠?

b	c	경우의 수
1	$2\sim6$	5
2	$5\sim6$	2
$3\sim6$	불가능	0

따라서 총 7개입니다. a가 3개가 가능하니까 경우의 수는 $3\times7=21$이네요.

어? 그런데 만약 $a=3$이어서 $f(x)=0$이면요? 이러면 $(g \circ f)(x)=g(0)=0$이잖아요? 계속 연속이 되네요! 이 경우에는 b와 c를 뭘 골라도 되겠어요. 경우의 수는 $6^2=36$입니다.

만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수라면, 다시 말해 $a<3$이라면 $f(x)\le0$이어야 합니다. $a=1$, 2가 되죠? 경우의 수는 2이구요. $f(x)\le0$이어야 하니까 $x^2+2bx+c$의 판별식이 0보다 작거나 같아야 하겠네요. 따라서 $b^2\le c$입니다. 아까와 마찬가지로 기준 잡고 분류해봅시다.

b	c	경우의 수
1	$1\sim6$	6
2	$4\sim6$	3
$3\sim6$	불가능	0

이렇게 총 9개가 가능하네요. a가 두 개가 가능하니까 경우의 수는 $2\times9=18$입니다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{21+36+18}{216}=\frac{25}{72}$입니다. 답은 ③번이네요.

13. 정답 ②

1) 그림 있으면 그림 보면서, 조건해석

$f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수라고 합니다. 그리고 갑자기 $|x(x-2)(x-3)|$가 그려져 있네요.
뭐에 쓰는 걸까요?
(가)조건에서 $f(x)=0$의 실근이 0, 2, 3'뿐'이라고 하네요. 다시 말해서 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표가 0, 2, 3만 있다는 거잖아요.

2) 인수정리

만약 $y=f(x)$와 x축이 0, 2, 3에서 지나가기만 했다고 해봅시다. 그러니까 $f(x)$는 x, $(x-2)$, $(x-3)$이라는 인수를 각각 딱 하나씩만 가지고 있는 상황이에요. 이거 이외에 다른 실근은 없습니다. 사차함수는 최대 4개까지의 실근을 갖는 것이 가능하죠. 만약 저렇게 3개의 실근만을 딱 한 번만 가진다면, 나머지 하나의 근은 허근이어야 한다는 이야기에요. 그런데 그게 가능한가요?

그러니까 이렇게 되는 거에요. $f(x)$는 x, $(x-2)$, $(x-3)$이라는 실근을 가지니까 인수정리에 의하여 $f(x)=kx(x-2)(x-3)(x-b)$ $(k<0)$라고 쓸 수 있죠. 그렇잖아요? 사차함수니까요. 그러면 자연스럽게 나오는 저 $(x-b)$는 뭐죠? 이건 실근 아닌가요? 그러면 0, 2, 3이외에 또다른 실근이 추가되었어야 해요.
그런데 없다고 했잖아요.

결국 $f(x)$의 x, $(x-2)$, $(x-3)$라는 인수 중 적어도 하나는 2개를 가져야 합니다. 그러니까 $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$이거나 $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$이거나 $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$이 되는 거죠.

케이스가 3개네요?

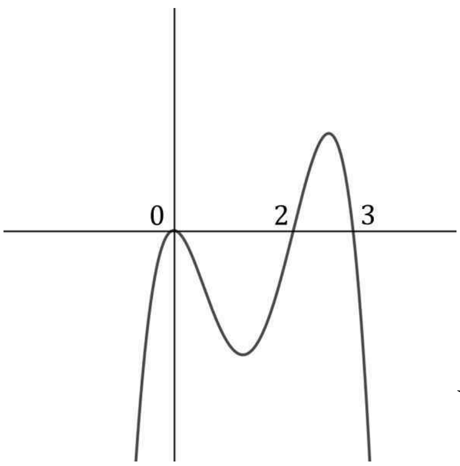
케이스를 나누기 전에 (나)조건부터 봅시다. $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라고 한답니다. 부정표현은 바꾸자고 했죠? $g(x)$는 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 작거나 같은 값입니다.

이때 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 하네요. 그리고 이때 $f(1)$의 최댓값을 구하래요.
음... 케이스부터 나눠볼게요.

3) 케이스 분류

3-1) $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$일 때

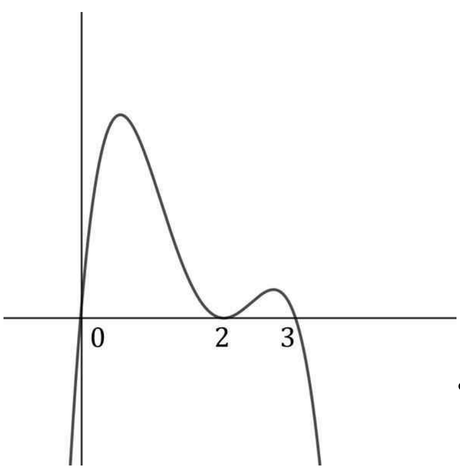
이거 그래프 한 번 그려볼게요. x축과 $x=0$에서 접하고 $x=2,\ 3$에서 그냥 지나가는 그래프입니다.



그리고 $f(1)=2k$입니다. $f(1)$이 최대가 되려면 k가 가장 커져야겠네요. k는 음수잖아요? 그런데 아래에 3-2)랑 3-3)을 한 번 스을쩍 보고 오세요. 다 $f(1)$이 양수죠? 그런데 이 경우만 음수네요. $f(1)$이 최대가 되는 건 애초부터 불가능한데요?

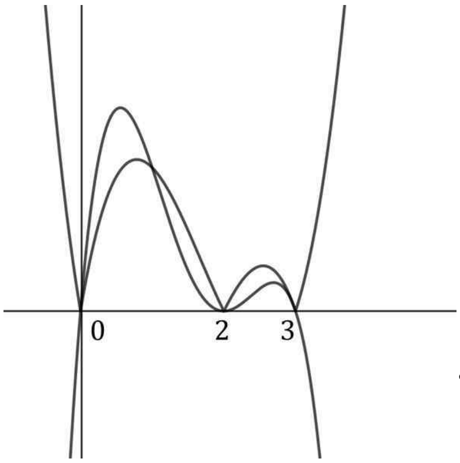
3-2) $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$일 때

x축과 $x=2$에서 접하구요, $x=0,\ 3$에서 그냥 만납니다.

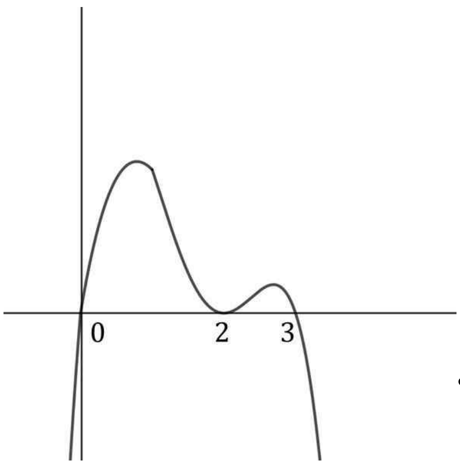


이렇게 됩니다. 그리고 $f(1)=-2k$이니까 k가 가장 작아져야겠네요.

그런데 뭘 어째야 하죠? $g(x)$가 미분가능해야 한다는데.... $g(x)$는 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 작거나 같은 값이라고 했었죠? 그런데 저거 그림 좀 봐바요. $g(x)$의 그래프를 한 번 그려볼게요.



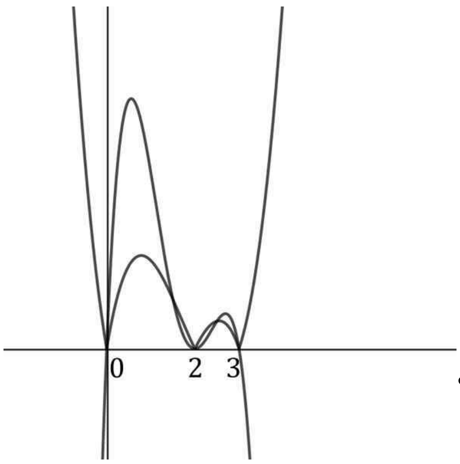
일단 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$를 이렇게 겹치게 그리고 여기서 작거나 같은 부분만 그리면



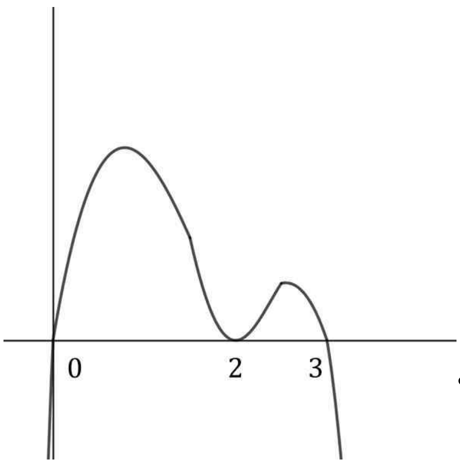
이렇게 됩니다.

어? 그림 잘 보세요. 미분불가능한 점이 두 개나 있는데요? $x=0$에서 갑자기 기울기가 달라지구요, 그리고 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 $0<x<2$에서 만나는 점에서도 기울기가 달라집니다. 매끄럽게 연결이 안 돼요. 이러면 안 되잖아요?

어... 지금 보면 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 그냥 만나기만 하면 그 점에서 미분불가능해지는 걸까요? 그림 하나만 더 그려봅시다.



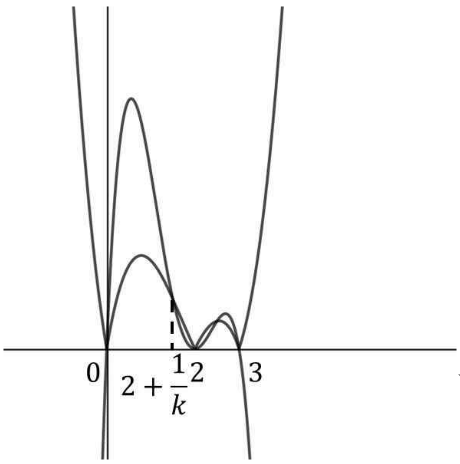
이렇게 그려볼게요. 작거나 같은 부분만 짤라내면



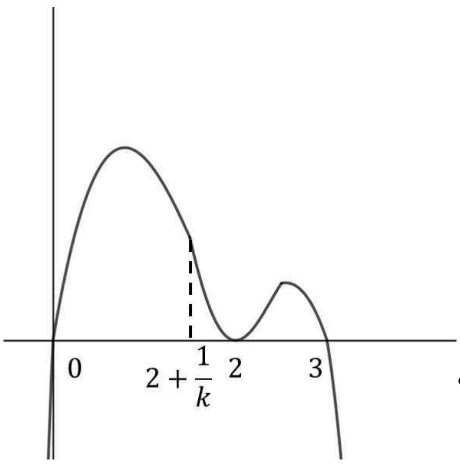
이렇게 됩니다. 이것도 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나는 점에서 미분불가능하네요.

아! 그러면 만나는 점을 잘 살펴봐야겠어요! 지금까지 관찰해봤을 때 만나는 부분에서 뭔가가 발생합니다.
어.. 그런데 $|x(x-2)(x-3)|$는 그 자체로 방정식을 세우거나 할 수는 없잖아요? 이거는 절댓값을 풀고 범위 나눠서 해결해야 할 것 같은데요?

$|x(x-2)(x-3)|$의 절댓값을 풀면 $|x(x-2)(x-3)|=\begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0<x<2,\ x>3) \\ -x(x-2)(x-3) & (x \geq 0,\ 2 \leq x \leq 3) \end{cases}$이 됩니다.
그러면 $0<x<2,\ x>3$에서는 $kx(x-2)^2(x-3)=x(x-2)(x-3)$을 계산하면 됩니다. 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-2-\dfrac{1}{k}\right)=0$이네요. 오! 일단 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$는 $x=0,\ 2,\ 3$에서 만나기는 하는 군요. 어? 그런데 $x=2+\dfrac{1}{k}$라는 실근도 있네요? 그러니까 $x=2+\dfrac{1}{k}$라는 점에서 만난다는 말이잖아요? 그런데 방금도 봤듯이 만나기만 하면 미분불가능이 되었어요. 만약 $x=2+\dfrac{1}{k}$라는 점이 $0<x<2$에 있다고 생각해보세요.



만나는 이 점이 $x=2+\frac{1}{k}$가 되구요. $g(x)$를 그리면



이렇게 됩니다. 미분불가능하잖아요!!

(그러니까 식으로 해보면 $g(x)=\begin{cases} x(x-2)(x-3) & \left(0<x<2+\frac{1}{k}\right) \\ kx(x-2)^2(x-3) & \left(x \geq 2+\frac{1}{k}\right) \end{cases}$이 되는 거죠. $x=2+\frac{1}{k}$에서

미분가능한지 보기 위해서 이거 각각 미분하고 $x=2+\frac{1}{k}$을 넣으면 $x<2+\frac{1}{k}$에서

$g'(k-)=\frac{(1-k)+(2k+1)+(2k+1)(1-k)}{k^2}$ 이구요. $x>2+\frac{1}{k}$에서

$g'(k+)=\frac{(1-k)+(2k+1)+2(2k+1)(1-k)}{k^2}$ 입니다. 지금 $\frac{(2k+1)(1-k)}{k^2}$만큼 차이가 나잖아요? 차이가

없어야 미분가능하죠. 따라서 $k=-\frac{1}{2}$가 아니면 미분불가능해요.

물론 방금 식으로 한 부분은 $x=2+\frac{1}{k}$가 $0<x<2$에 있을 때를 전제로 한 거예요. 그러면 자연스럽게

$0<x<2+\frac{1}{k}$에서 $f(x)\geq x(x-2)(x-3)$가 되거든요.)

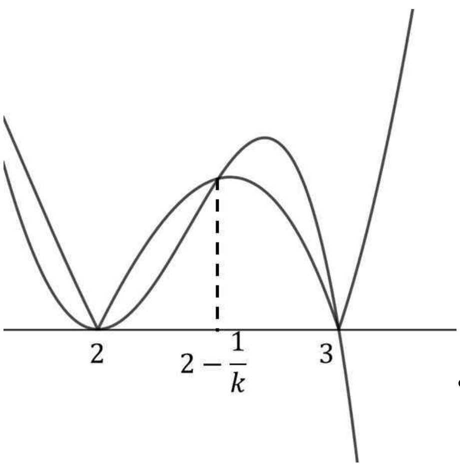
따라서 $x=2+\frac{1}{k}$라는 실근은 $k=-\frac{1}{2}$이거나 $0<x<2$밖으로 벗어나야 합니다. 범위 밖으로 벗어나면

상관이 없어요. 어차피 $0<x<2$, $x>3$에서만 $x(x-2)(x-3)$이거든요. 아까 $k<0$이라고 했으니까 $2+\frac{1}{k}<2$이죠. 그러면 $0<x<2$의 범위 밖은 $x \le 0$이 되겠네요. 따라서 $2+\frac{1}{k} \le 0$이고 $k \ge -\frac{1}{2}$입니다. 아까 $k=-\frac{1}{2}$도 포함되어 있네요.

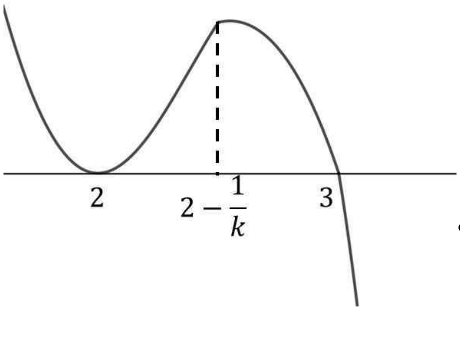
이번엔 $x \ge 0$, $2 \le x \le 3$를 봅시다. 이 범위 안에서 $|x(x-2)(x-3)|=-x(x-2)(x-3)$입니다. 그리고 이거랑 $f(x)$랑 만나는지 확인해야겠죠. $kx(x-2)^2(x-3)=-x(x-2)(x-3)$이고 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-2+\frac{1}{k}\right)=0$이 됩니다. $x=0$, 2, 3에서 만나는데, $x=2-\frac{1}{k}$은 뭐죠? 이거도 아까랑 같은 상황 아닐까요? $x=2-\frac{1}{k}$에서 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나긴 한다는 거잖아요.

일단 $k<0$이니까 $2-\frac{1}{k}>2$입니다. 만나는 점은 $x>2$에 있어요. 그러면 $2 \le x \le 3$부분을 집중해서 봐야 하겠는데요? 만나는 점이 이 범위 안에 있을지도 모르니까요.

만약 $x=2-\frac{1}{k}$라는 점이 $2 \le x \le 3$의 범위 안에 있다고 생각해보세요. (여기 부분만 볼게요.)



이렇게 되고 작거나 같은 부분만 잘라서 $g(x)$를 그려보면



이렇게 됩니다. 여기서 미분불가능하잖아요!

(마찬가지로 식으로 해보면 $g(x)=\begin{cases} kx(x-2)^2(x-3) & \left(2 \le x < 2-\dfrac{1}{k}\right) \\ -x(x-2)(x-3) & \left(2-\dfrac{1}{k} \le x \le 3\right) \end{cases}$이 되는 거죠. 각각 미분하고

$x=2-\dfrac{1}{k}$을 넣으면 $x<2-\dfrac{1}{k}$에서 $g'(k-)=\dfrac{-(k+1)+(2k-1)+2(2k-1)(k+1)}{k^2}$이구요, $x>2-\dfrac{1}{k}$에서

$g'(k+)=\dfrac{-(k+1)+(2k-1)+(2k-1)(k+1)}{k^2}$입니다. 지금 $\dfrac{(2k-1)(k+1)}{k^2}$만큼 차이가 나는데 이게 없어야

미분가능하죠. 따라서 $k=-1$가 아니면 미분불가능해요.

지금도 식으로 한 부분은 $x=2-\dfrac{1}{k}$가 $2 \le x \le 3$에 있을 때를 전제로 한 거예요. 자연스럽게

$2-\dfrac{1}{k}<x \le 3$에서 $f(x) \ge -x(x-2)(x-3)$가 되거든요.)

따라서 $x=2-\dfrac{1}{k}$라는 실근은 $k=-1$이거나 $2<x<3$의 범위 밖으로 나가야 합니다. 범위 밖에서 만나는 건

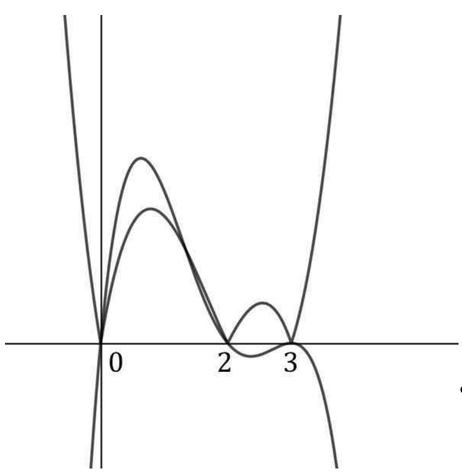
상관없어요. $2-\dfrac{1}{k} \ge 3$이고 $k \ge -1$입니다. 여기에도 $k=-1$가 포함되어 있네요? 아까 $k \ge -\dfrac{1}{2}$의 범위와

합치면 $k \ge -\dfrac{1}{2}$가 되네요.

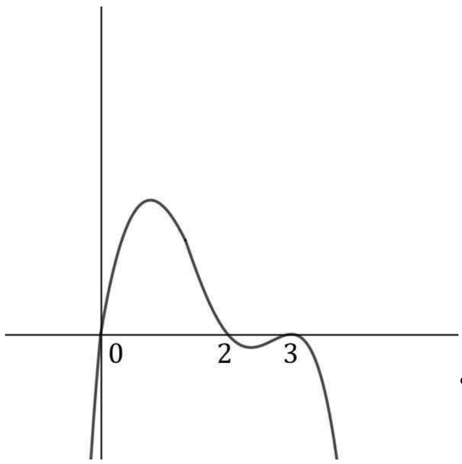
아무튼 $k \ge -\dfrac{1}{2}$이니까 $f(1)=-2k \le 1$이고 $f(1)$의 최댓값은 1입니다. 선지에 없는 걸 보니까 이것도 아닌 것 같은데요?

3-3) $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$일 때

$f(x)$는 x축과 $x=0,\ 2$에서 그냥 만나고 $x=3$에서 접하는 그래프입니다. $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$를 동시에 그리면



이렇게 되구요, 작거나 같은 부분만 짤라서 $g(x)$를 그리면



이렇게 됩니다. 이 그래프 역시 만나는 점에서 미분불가능해지군요.

근데 이 그래프는 좀 편할 거 같아요. $x>2$에서 명백히 $f(x)$가 $|x(x-2)(x-3)|$보다 작아서 $g(x)=f(x)$이거든요. 그러니까 우리는 $0<x<2$에서만 확인하면 됩니다. 할 게 하나 줄었네요. 아까랑 똑같은 방법으로 가봅시다.

$0<x<2$에서 $|x(x-2)(x-3)|=x(x-2)(x-3)$이죠. 따라서 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나는 점을 찾기 위해서 $kx(x-2)(x-3)^2=x(x-2)(x-3)$라 하고 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-3-\frac{1}{k}\right)=0$입니다.

$x=3+\frac{1}{k}$만 확인하면 되겠군요.

이번엔 식도 생략하고 바로 갈게요. 지금 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 $x=3+\frac{1}{k}$라는 점에서 만나잖아요.

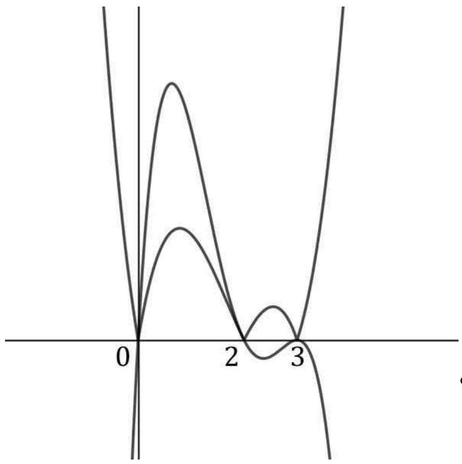
그런데 만나면 미분불가능해집니다. 따라서 $x=3+\frac{1}{k}$는 $0<x<2$의 범위 밖으로 벗어나야 해요.

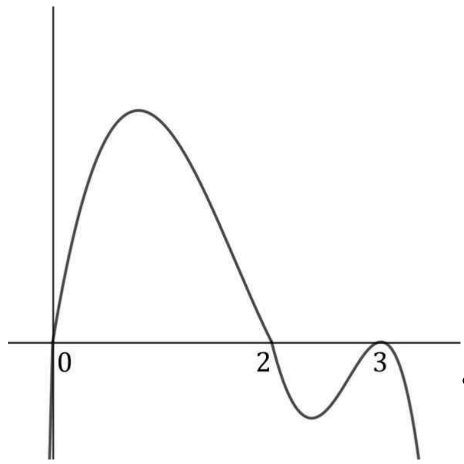
$k<0$이니까 $3+\frac{1}{k}<3$입니다. 따라서 $3+\frac{1}{k}\geq 0$이거나 $3+\frac{1}{k}\geq 2$이고 $k\geq -\frac{1}{3}$이거나 $k\leq -1$입니다.

어라? 왜 범위가 두 개가 나오죠?

이 경우 문제가 이거에요. 범위가 두 개가 나와요. 그럼 뭘 어쩌라는 거죠?

다시 생각해봅시다. 지금 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$가 만나는 점인 $x=3+\frac{1}{k}$를 $0<x<2$의 범위 밖으로 보내버렸어요. 그러면 지금 $0<x<2$에서 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$는 만나는 점이 없습니다. 그 말은 계속 $f(x)$가 $|x(x-2)(x-3)|$보다 위에 있거나, 계속 아래에 있다는 이야기에요. 만나는 점이 없으니까요. 근데 $f(x)$가 위에 있다고 해보면



이렇게 되고 $g(x)$는


이렇게 됩니다.

지금 $x=0$과 $x=2$에서 미분불가능하잖아요. 양쪽의 미분계수가 다르기 때문이죠. 이런 일이 왜 발생하는 걸까요?

그림을 잘 보세요. $x=0$에서 미분계수가 $f(x)$가 더 크고 $x=2$에서 미분계수가 $f(x)$가 더 작죠? 더 가파르잖아요. 이 상황에서 각각의 미분계수를 구해봅시다. $x=0$에서 $|x(x-2)(x-3)|$의 우미분계수는 $x(x-2)(x-3)$의 미분계수인 6입니다. 그리고 $f(x)$의 미분계수는 $-18k$가 나오죠. 그리고 지금과 같은 상황에서는 $x=0$에서 $f(x)$의 미분계수가 더 크니까 $-18k>6$이고 $k<-\frac{1}{3}$입니다.

그리고 $x=2$에서 $|x(x-2)(x-3)|$의 좌미분계수는 $x(x-2)(x-3)$의 미분계수인 -2입니다. 그리고 $x=2$에서 $f(x)$의 미분계수는 $2k$이구요. $f(x)$가 더 작으니까 $2k<-2$이고 $k<-1$입니다. $k<-\frac{1}{3}$와 종합해보면 $k<-1$이네요. 어? 이거 어디서 본 적 있지 않나요? 아까 나왔던 두 개의 범위 중 하나잖아요! 아까 $k\geq-\frac{1}{3}$와 $k\leq-1$이렇게 2개가 나왔었잖아요. 그 중 $k<-1$이면 방금과 같이 미분불가능한 상황이 발생합니다.

그러면 $k=-1$이면요? 아까는 이것도 등호에 포함되어 있었잖아요. $x=0$에서 미분계수를 비교해보세요. 여전히 $f(x)$의 미분계수가 더 크죠? 다시 말해서 $0<x<2$에서 $f(x)$가 위에 있어서 $g(x)$를 구할 때 $x<0$에서 더 작은 $g(x)=f(x)$였던 게 $0<x<2$에서는 $g(x)=x(x-2)(x-3)$으로 바뀐다는 이야기에요. $g(x)$는 더 작은 걸 선택하는 함수잖아요. 그 과정에서 $x=0$에서의 미분계수가 서로 다르니 미분불가능이 된 거구요.

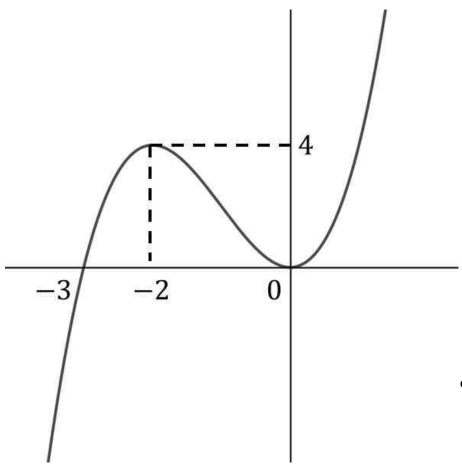
따라서 $k=-1$이어도 되지 않고 $k\geq-\frac{1}{3}$입니다. $f(1)=-4k\leq\frac{4}{3}$이니까 최댓값은 $\frac{4}{3}$이네요. 답은

②번입니다.

14. 정답 9

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정수 보이면 숫자 넣을 준비

$f(x)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$가 있어요. x축과 $x=0$에서 접하고 $x=-3$에서 그냥 만나는 그래프이죠? 삼차함수의 비율 관계를 사용하면 변곡점의 x좌표는 $x=-1$이고 극대점의 x좌표는 $x=-2$입니다. 극댓값은 4네요.



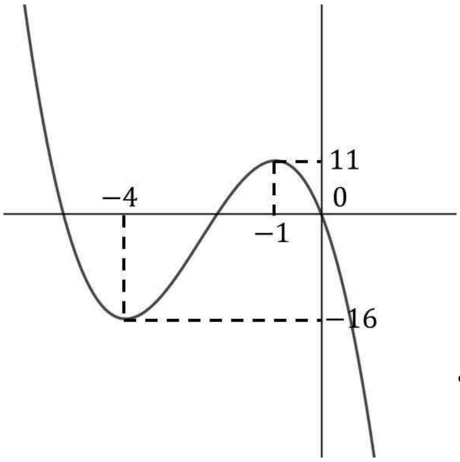
이렇게 됩니다.

a가 정수라고 하네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

2) 조건해석

(가)조건에서 $(-4,\ a)$를 지나고 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개가 있다고 합니다. 접점의 좌표를 일단 $(t,\ f(t))$라 하면 서로 다른 t가 3개가 있어야 하죠? 그래야 모두 다른 접점에서 접하게 될 테니까요. 접선은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)=\left(3t^2+6t\right)x-2t^3-3t^2$입니다. 이 직선이 $(-4,\ a)$를 지나야 하니까 $-2t^3-15t^2-24t=a$입니다. 결국 $y=-2t^3-15t^2-24t$와 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하는 거예요.

일단 접할 때를 확인해야겠죠? 미분하면 $-6t^2-30t-24=-6\left(t^2+5t+4\right)=-6(t+1)(t+4)$이니까 $t=-4$에서 극소, $t=-1$에서 극대입니다. 극솟값은 -16, 극댓값은 11입니다.



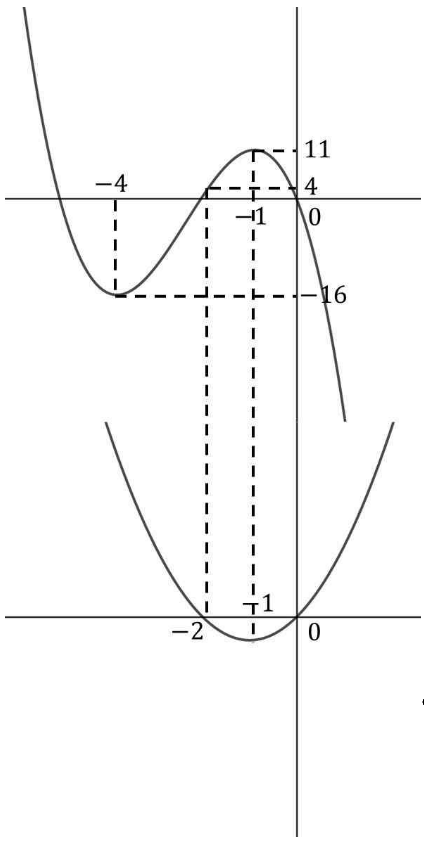
이렇게 되네요. 이 함수와 $y=a$가 세 개의 점에서 만나려면 a가 -16과 11사이에 있어야겠죠? 따라서 $-16<a<11$입니다.

(나)조건에서 세 접선의 기울기의 곱이 음수라고 합니다. 음...

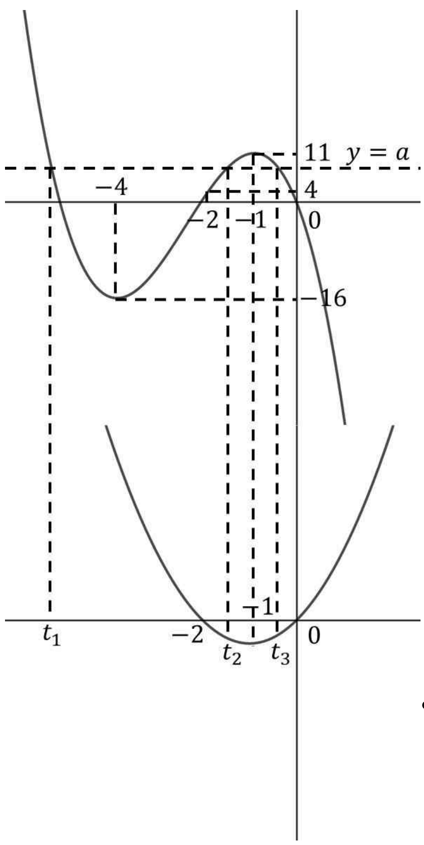
일단 접점의 좌표인 t는 $y=-2t^3-15t^2-24t$와 $y=a$의 교점의 t좌표에요. 그리고 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$이구요. $y=-2t^3-15t^2-24t$와 $y=a$의 교점을 t_1, t_2, t_3이라 하면 $f'(t_1)\times f'(t_2)\times f'(t_3)<0$이어야 하죠?

그럼 천천히 확인해 보자구요. $f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$는 $t=0$, -2에서 t축과 만나고 축이 $t=-1$인 함수입니다. 여기서 $y=-2t^3-15t^2-24t$에 $y=a$를 긋고 만나는 점을 그대로 $f'(t)$에 내려서 부호를 확인해보면 되겠죠. 일단 $f'(t)>0$이 되는 t는 $t>0$, $t<-2$이구요, $f'(t)<0$가 되는 t는 $-2<t<0$입니다.

그러면 $y=-2t^3-15t^2-24t$에서 $t=-2$의 값도 확인해봐야 하지 않을까요? 그래야 $y=a$와의 실근이 $f'(t)$의 부호가 바뀌는 지점인 $t=-2$보다 큰지 작은지를 확인할 수 있으니까요. 함숫값은 4입니다.

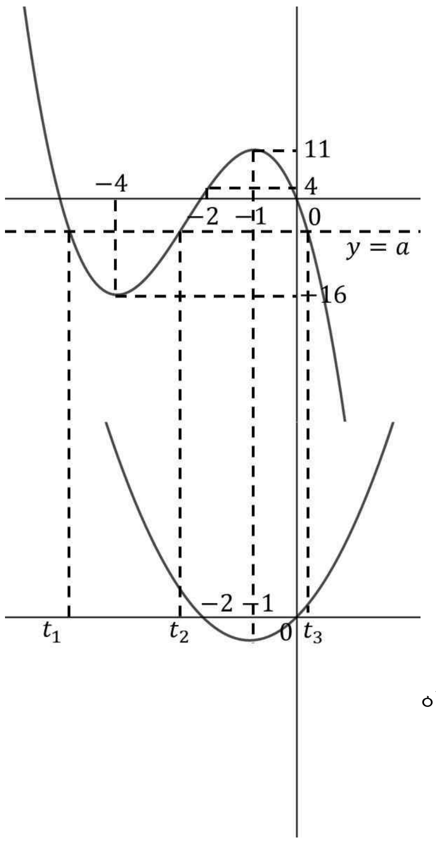


이렇게 됩니다. 만약 $y=a$가 4보다 크다면



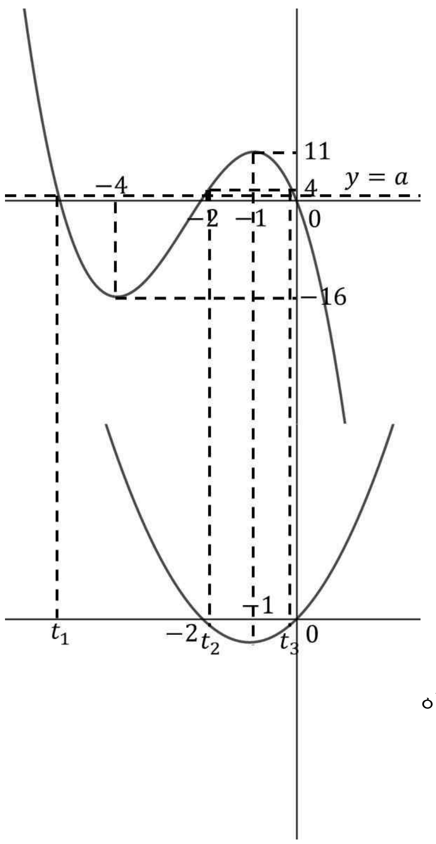
이렇게 됩니다. $f'(t_1)>0$, $f'(t_2)<0$, $f'(t_3)<0$이니까 다 곱하면 양수가 나오죠? 이 경우는 안 됩니다.

$a=4$가 되면 그냥 $f'(t_2)=0$이니까 곱해서 음수가 될 리가 없죠.



이렇게 $a<0$이 되면요? 이러면 $f'(t_1)>0$, $f'(t_2)>0$, $f'(t_3)>0$이니까

곱하면 양수가 됩니다. 따라서 $0<a<4$이어야 하네요. 이러면



이렇게 $f'(t_1)>0$, $f'(t_2)>0$, $f'(t_3)<0$이 되니까 곱하면 음수가 되겠죠?

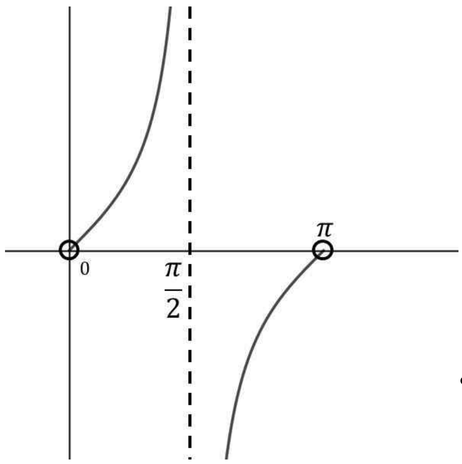
3) 정수 보이면 숫자 넣기

a가 정수였잖아요? $0<a<4$에서 정수는 $a=1,\ 2,\ 3$입니다. 최댓값은 $M=3$이네요. $M^2=9$입니다.

15. 정답 2

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $f(x)$이거부터 그려볼까요?



이렇게 그릴 수 있겠죠? 계속 갑시다.

2) 조건해석, 함수극한은 위아래 식 차수, 계수 비교

(가)조건을 해석해봅시다. 절댓값만 없었다면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수라는 말이네요. 그런데 절댓값이 있잖아요? 그러면 결국 $g(x)$는 이차함수이고 최고차항의 계수는 1 아니면 -1이라는 말이 되겠어요.

(나)조건으로 가볼까요? $\lim_{x\to\alpha-} g(f(x))=\infty$ 이게 뭘까요? α가 $\frac{\pi}{3}$이런 거였으면 $f(x)$의 값이 정해지고 그에 따라 $g(x)$의 값도 정해져요. 그러니까 극한값이 ∞이 아닌 어떤 상수로 표현이 된다는 의미에요. 그런데 극한값이 ∞이 되어버렸네요.

그러면 α가 어떤 수여야 할까요? 그런데 저 $f(x)$의 그래프에서 눈에 띄는 수가 하나 있죠. $x=\frac{\pi}{2}$이거 말이에요. α가 $\frac{\pi}{2}$이라면 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=\infty$이 돼요. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$보다 작은 곳에서의 $f(x)$의 함숫값인데 저기 보면 무한대로 발산하잖아요. 그 무한대가 $g(x)$의 x값으로 들어간다고 생각해보세요. $g(x)$는

최고차항의 계수가 -1또는 1인 2차함수이니까 ∞로 발산하거나 $-\infty$로 발산하겠죠? 다시 말하면 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty$이니까 이 ∞를 $g(x)$의 함숫값으로 넣으면 $g(\infty) = \infty$가 될 거라는 거죠. (물론 저런 표현은 없지만 합성함수에서 극한을 보내는 것이 이해하기 어려운 분들을 위해 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} g(f(x)) = \lim_{x \to \infty} g(x)$를 저렇게 표현한 거예요.)

그런데 만약 $g(x)$의 최고차항의 계수가 -1이라면 $\lim_{x \to \alpha-} g(f(x))$은 $-\infty$로 발산하게 될 거예요. 그런데 ∞로 발산한다고 나와 있네요. 따라서 $g(x)$의 최고차항의 계수는 1입니다.

3) 문제해석 - 합성함수는 치환

이제 (다)조건으로 가봅시다. $g(x)$에 어떤 x값을 집어 넣어야 $g(x)$의 함숫값을 $f(x)$에 집어넣어서 0을 만들 수 있을까요? 일단 $g(x) = k$라고 해볼까요? 그러면 $f(k) = 0$이 되네요. 이걸 만족하는 k는 $f(x)$의 그래프에 0밖에 없네요. 이제는 $g(x) = 0$이 되는 x값을 찾아야 되겠네요. 그래야 $g(x) = 0$이 되고 그 0을 $f(x)$에 집어넣어서 $f(0) = 0$을 만들죠. 그런데 그 x값이 0과 $2\alpha = \pi$라네요. 그러면 끝났네요.

4) 함수 구하기 - 인수정리

$g(x) = 0$의 두 서로 다른 실근이 0과 π이니까 인수정리에 의해 $g(x)$는 x와 $(x-\pi)$라는 인수를 적어도 하나 갖는데 $g(x)$는 2차함수이니까 $g(x) = x(x-\pi)$라고 할 수 있겠네요. 마지막 $g(4\alpha)$를 구해봅시다. $2\alpha = \pi$이니까 $g(4\alpha) = g(2\pi)$이고 $g(x)$에 $x = 2\pi$를 넣으면 $2\pi^2$가 되겠네요. $a = 2$입니다.

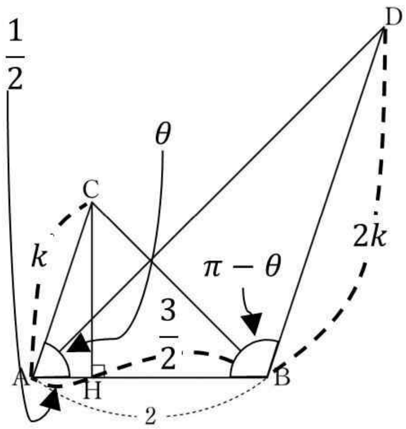
16. 정답 15

1) 그림 있으면 그림 보면서,

그림이 있네요. 그리고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{AC}} // \overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BD}} = 1:2$이라고 합니다. 거기에 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다고 합니다. 이거 다 표시좀 해볼까요?

일단 H가 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다고 하니까 $\overline{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{HB}} = \frac{3}{2}$입니다. 그리고 $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BD}} = 1:2$이니까 $\overline{\mathrm{AC}} = k$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}} = 2k$입니다.

거기에 AC와 BD가 평행하잖아요? 그러면 $\angle\mathrm{CAB}$와 $\angle\mathrm{ABD}$을 합치면 π가 되겠네요. $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{ABD}=\pi-\theta$입니다.



이렇게 되겠네요.

2) 외부

그리고 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$이라고 합니다. 외접원의 반지름의 길이라고 하니까 사인법칙이 생각나죠?

그런데 우리가 알고 있는 각은 $\angle\mathrm{CAB}$와 $\angle\mathrm{ABD}$이에요. 이걸로 표현해야겠죠? 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2r$, $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\pi-\theta)}=2\mathrm{R}$입니다. 각 변환을 할 수 있겠네요?

$\sin(\pi-\theta)$에서 π가 있으니까 축은 $x<0$ 부분의 x축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ만큼 시계방향으로 움직이면 사인값은 y값인데 양수가 나오죠. 따라서 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$입니다. $R^2=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}^2}{4\sin^2\theta}$, $r^2=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}^2}{4\sin^2\theta}$가 되겠네요. $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$에 다 넣어보면 $\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=51$가 됩니다.

사인값이 각 변환되는 것을 보니 코사인값도 각 변환이 될 것 같은데요? 가봅시다. $\cos(\pi-\theta)$에서 π가 있으니까 축은 $x<0$ 부분의 x축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ만큼 시계방향으로 움직이면 코사인값은 x값인데 음수가 나오네요. 따라서 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$입니다.

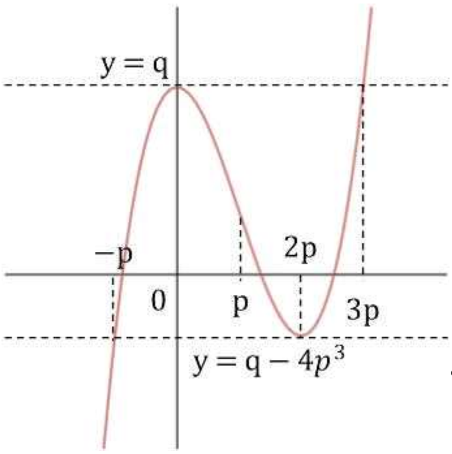
코사인값이 나왔으니까 코사인법칙까지 사용하면 되겠네요.

$\cos\theta=\dfrac{k^2+4-\overline{\mathrm{BC}}^2}{4k}$, $\cos(\pi-\theta)=\dfrac{4k^2+4-\overline{\mathrm{AD}}^2}{8k}=-\cos\theta$입니다. 그런데 지금 그림을 보면 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{1}{2\mathrm{k}}$이잖아요? 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=k^2+2$, $\overline{\mathrm{AD}}^2=4k^2+8$입니다. $\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=51$에 넣으면 $k^2=15$가 나오네요. $\overline{\mathrm{AC}}=k$라고 했잖아요? 따라서 $k^2=\overline{\mathrm{AC}}^2=15$입니다.

17. 정답 14

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 삼차함수의 비율관계

$f(x)=x^3-3px^2+q$가 있네요. 관찰부터 해봅시다. 인수분해는 안 되는 것 같구요, 미분하면 $f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$이니까 $x=0$에서 극대, $x=2p$에서 극소입니다. 극댓값은 q이고 극솟값은 $q-4p^3$이네요. 변곡점의 x좌표는 $x=p$입니다. 대충 그림 그려보면



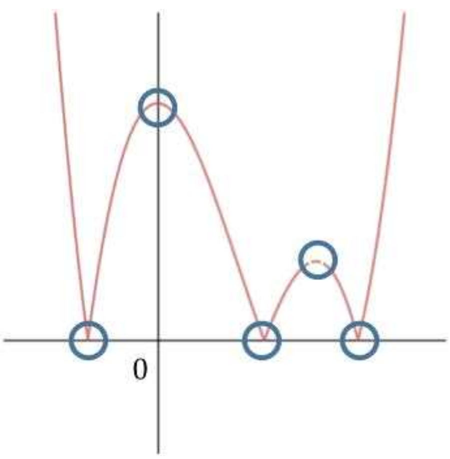
이렇게 됩니다. $x=3p$랑 $x=-p$는 왜 나왔는지 설명 안 해도 알죠?

접선과 함수가 만나는 접점과 교점의 x좌표의 $1:2$내분점은 변곡점의 x좌표라는 거 이용해서 구한 거예요.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건해석, 절댓값 함수

그리고는 p, q가 25이하의 자연수라고 합니다. 그러면 숫자 넣을 준비를 하고 있어야겠죠?

(가)조건에서 $|f(x)|$의 극점이 5개라고 합니다. 이거는 절댓값 씌워서 접어 올려봐야겠는데요? 지금 저 그림부터 접어 올려봅시다.



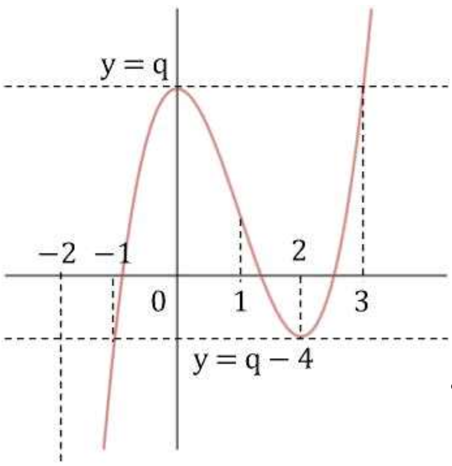
5개의 점에서 극점을 가지는데요? 되네요. 지금 그래프는 극소점이 x축 아래로 내려가서 접어 올렸을 때 x축과 만나는 3개의 점+이미 있던 극대점, 극소점 해서 5개의 극점을 갖게 되었어요. 그러면 결국 극소점이 x축 아래로 내려가야겠네요. 따라서 극솟값이 x축 아래여야 하니까 $q-4p^3<0$이고 자연수니까 $0<q<4p^3$입니다.

(나)조건에서 $|f(x)|$의 $-1 \le x \le 1$에서 최댓값과 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값이 같다고 합니다. 이거도 그려봐야 알겠는데요?

어... 그런데 지금 그래프는 $x=p$에서 변곡점, $x=2p$에서 극소점 이런식으로 나뉘어져 있잖아요. $x=1$은 어디에 포함되는 거죠? $x=2$는요? 이거 때문에 그래프를 그리는 게 불가능해요. 그럼 어쩌죠?
아까 p가 자연수라고 했잖아요. 그럼 그냥 넣어보면 되죠. 넣어봅시다.

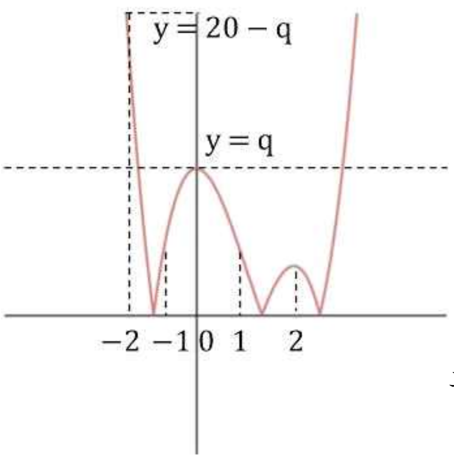
3-1) $p=1$일 때

$p=1$이면 $f(x)=x^3-3x^2+q$이구요, $x=1$에서 변곡점, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $q-4$입니다. 그리고 $0<q<4p^3$니까 $0<q<4$이네요.



이렇게 됩니다. 이제 접어 올려야 하는데.... 문제가 있네요. 극댓값과 접어 올린 극솟값 중 어느 게 더 큰 거죠?

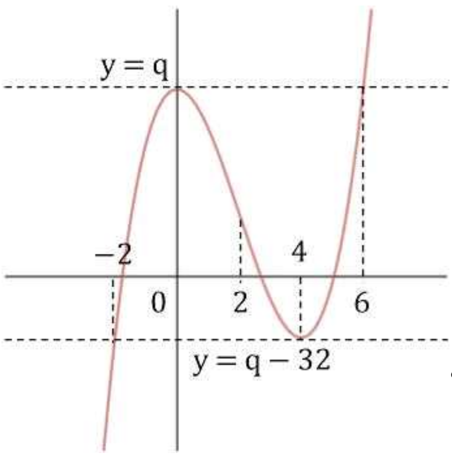
그런데 그걸 따져보지 않아도 되겠네요. $f(-2)=q-20$이잖아요. $q<4$라고 했으니까 음수이죠? 절댓값 씌우면 $20-q$입니다. $-2 \le x \le 2$에서 최댓값은 $20-q$이에요. 이 범위 내에 함수를 잘 관찰해보세요. 극댓값인 q도 최대 3이구요, 극솟값인 $q-4$를 접어 올린 $4-q$도 최대 3입니다. 반면 $20-q$은 최대 17이죠. 그러니까



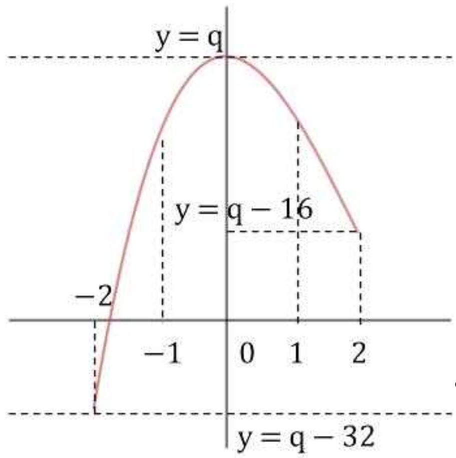
그림이 이렇게 되어서 $-1 \le x \le 1$에서의 최댓값과 $-2 \le x \le 2$에서의 최댓값이 같을 수가 없어요. $p=1$일 때는 조건에 맞지 않습니다.

3-2) $p=2$일 때

$p=2$일 때 $f(x)=x^3-6x^2+q$이구요. $x=2$에서 변곡점, $x=4$에서 극소이고 극솟값은 $q-32$입니다. 그리고 $0<q<4p^3$니까 $0<q<32$이네요. 그런데 q는 25이하의 자연수니까 $0<q\le 25$라고 할게요. 나중에 헷갈릴 것 같아요. 그리고 이번에는 그래프를 $-2\le x\le 2$범위에서 짜를게요. 어차피 딴 부분은 볼 필요가 없으니까요. 그러면 범위의 경계인 $x=2$에서 함숫값도 구해봅시다. $f(2)=q-16$이네요. 그래프는 대충

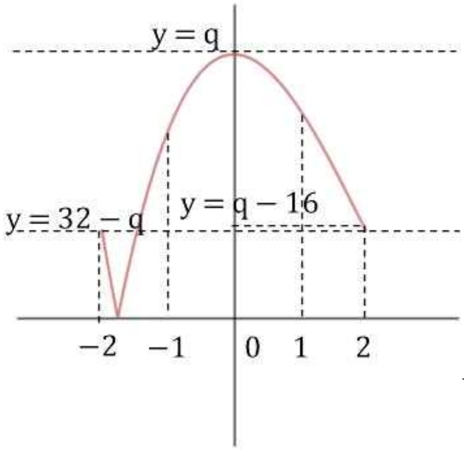


이렇게 되구요. 짜르면



이렇게 됩니다.

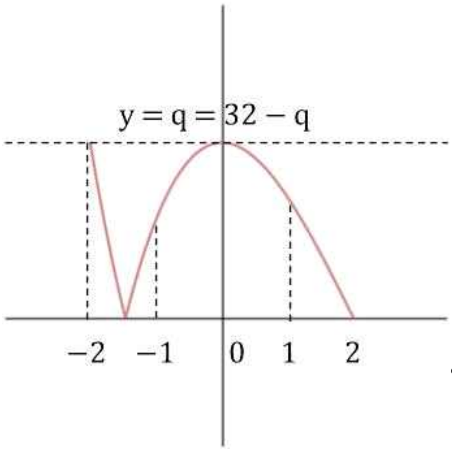
이때 절댓값 씌우고 $-1\le x\le 1$과 $-2\le x\le 2$에서 최댓값을 비교해야 하잖아요. 그런데 $f(x)$의 최댓값인 q와 최솟값인 $q-32$ 중 접어 올렸을 때 어느 게 더 큰가요? 만약 q가 크다면



그래프는 이렇게 됩니다. 이러면 $-1\le x\le 1$에서 최댓값은 q이고 $-2\le x\le 2$에서 최댓값도 q네요. 같죠!

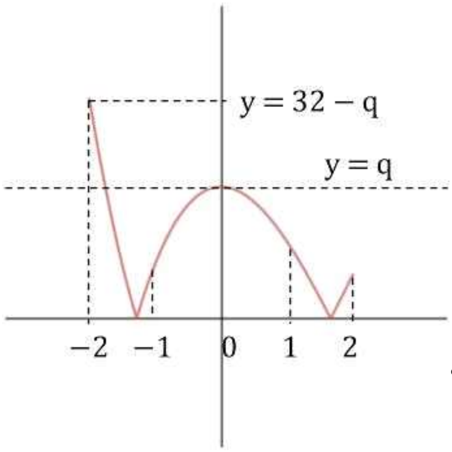
이거 q를 구해봅시다. 일단 최댓값인 q가 최솟값인 $q-32$를 접어 올린 $32-q$보다 크잖아요? 따라서 $q>32-q$이고 $q>16$입니다. 일단 $16<q\le 25$에서는 되네요.

그럼 같으면요?



이렇게 되네요. 이것도 가능하잖아요! $-1 \leq x \leq 1$에서 최댓값도 q이고 $-2 \leq x \leq 2$에서 최댓값도 q입니다. $q = 32 - q$이고 $q = 16$이네요. $q = 16$일 때 가능합니다.

그러면 최솟값을 접어 올린 $32 - q$가 더 크면요?



이렇게 됩니다. 이러면 $-1 \leq x \leq 1$에서 최댓값과 $-2 \leq x \leq 2$에서 최댓값이 다른데요? $-1 \leq x \leq 1$에서는 q이고(범위에 따라서 아닐 수도 있습니다. 여기서는 다르다는 거를 보여주기 위해서 q로 설정한 거예요. 예를 들어 $q = 7$이라면 $x = 0$에서 함숫값 $f(0) = |f(0)| = 7$보다 $x = 2$에서 접어 올린 $|f(2)| = 9$가 더 커요.) $-2 \leq x \leq 2$에서는 $32 - q$이잖아요. 따라서 $q < 32 - q$ $(q < 16)$일 때는 안 됩니다.

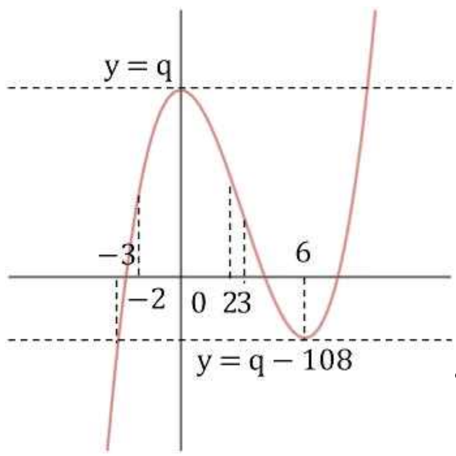
정리해보면 $p = 2$일 때는 $16 \leq q \leq 25$이어야 합니다. 총 10개가 있네요.

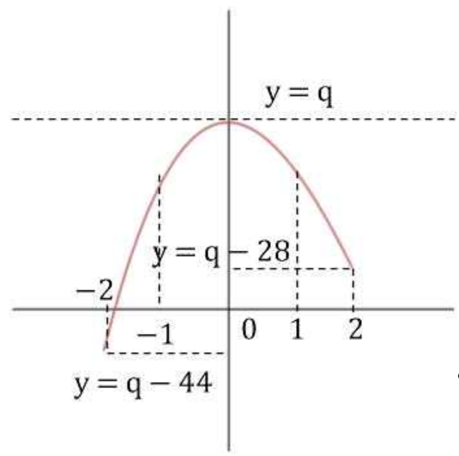
3-3) $p = 3$일 때

$p = 3$일 때 $f(x) = x^3 - 9x^2 + q$이고 $x = 3$에서 변곡점, $x = 6$에서 극소이고 극솟값은 $q - 108$입니다.

$0 < q < 4p^3$니까 $0 < q < 108$이지만 q는 25이하의 자연수니까 $0 < q \leq 25$이네요. 이번엔 약간 다른데요? $-2 \leq x \leq 2$범위에서 짜르고 범위의 경계인 $x = 2$에서 함숫값도 구해보면 $f(2) = q - 28$이네요. 그런데 이번에는 $x = -2$에서 함숫값도 구해야겠어요. $x = -2$에서 극솟값과 겹치지 않잖아요. $f(-2) = q - 44$입니다.

그래프는 대충



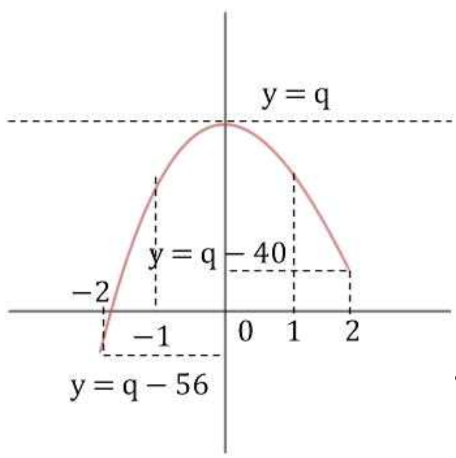
이렇게 되고 짜르면 

이렇게 되네요.

아까 $p=2$랑 똑같은 상황입니다. $|f(x)|$의 최댓값이 같으려면 현재 $f(x)$의 최댓값인 q가 최솟값을 접어 올린 $44-q$보다 크거나 같아야 하죠. 따라서 $q \geq 44-q$해서 $q \geq 22$입니다. 따라서 $22 \leq q \leq 25$이고 가능한 q는 4개가 있네요.

3-4) $p=4$일 때 ($p \geq 4$일 때)

$p=4$일 때 $f(x)=x^3-12x^2+q$입니다. $0<q \leq 25$이구요. $-2 \leq x \leq 2$범위에서 짜르고 범위의 경계인 $x=2$와 $x=-2$에서 함숫값도 구해보면 $f(2)=q-40$이고 $f(-2)=q-56$입니다. 그래프는 대충



이렇게 되네요. 따라서 현재 $f(x)$의 최댓값인 q가 최솟값을 접어 올린 $56-q$보다 크거나 같아야 하니까 $q \geq 56-q$해서 $q \geq 28$인데... $0<q \leq 25$의 범위를 애초에 넘어서는데요? p가 이거보다 커지면 최솟값인 $f(-2)$는 더 작아지겠죠. $f(-2)=q-12p-8$인데 p가 커지면 점점 더 작아지잖아요. 그러면 자연스럽게 $q \geq 12p+8-q$ ($q \geq 6p+4$)에서 $6p+4$는 더 커질 거에요. $0<q \leq 25$의 범를 벗어나게 되는 거죠. 따라서 $p \geq 4$일 때는 가능한 $(p,\ q)$가 없습니다.

지금까지 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $p=2$일 때 10개, $p=3$일 때 4개해서 $10+4=14$입니다.

18. 정답 13

1) 조건해석, 등차수열 $a_n = a + (n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기

$\{a_n\}$이 등차수열인데 공차가 양수랍니다! 그러면 일단 $a_n = a + (n-1)d$ $(d > 0)$이라고 하면 되겠죠?

(가)조건에서 $|a_5| = a_6$이라고 하네요. 생각을 좀 해봅시다. 아까 공차가 양수라고 했죠? 그러면 무조건 $a_5 < a_6$이어야 해요. 그런데 a_5에 절댓값을 씌우면 같아지네요. $a_5 = a_6$일 수는 없으니까 $-a_5 = a_6$이 되어야겠어요. $a_5 = a + 4d$, $a_6 = a + 5d$이니까 $-a - 4d = a + 5d$이고 $a = -\frac{9}{2}d$이네요.

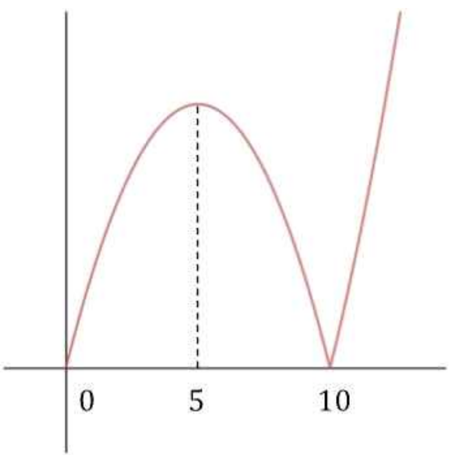
$a_n = \left(n - \frac{11}{2}\right)d$ $(d > 0)$입니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

(나)조건에서 $|S_n| = 24$를 만족시키는 자연수 n이 3개가 있다네요. 일단 S_n부터 구해볼까요? 등차수열의 합 공식에 의하여 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n = \frac{d}{2}n(n-10)$입니다.

여기에 절댓값을 씌운 값이 24가 되는 자연수 n이 3개가 있다구요? 음...

그런데 이거 뭔가 이차함수와 비슷하지 않나요? 최고차항의 계수가 양수인, $x(n)$축과 $n=0$, $n=10$에서 만나고 대칭축이 $n=5$인 이차함수인 거죠. 그러니까 대충



이렇게 되겠네요.

3) 자연수 보이면 숫자 넣기

아니 그런데 이 $y = |S_n|$이라는 함수와 3개의 점에서 만나는 직선은 매우 많은데요? 그림을 보세요!

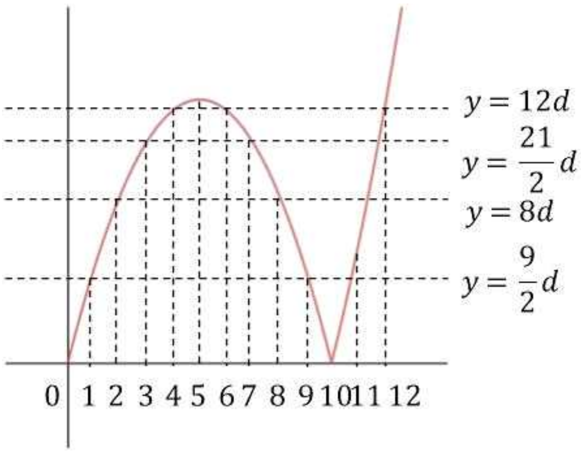
"자연수"라고 했잖아요. 그럼 천천히 넣어봐야죠. 일단

$|S_1| = |S_9| = \frac{9}{2}d$, $|S_2| = |S_8| = 8d$, $|S_3| = |S_7| = \frac{21}{2}d$, $|S_4| = |S_6| = 12d$, $|S_5| = \frac{25}{2}d$입니다. 음...

$n > 10$일 때를 해봅시다. $|S_{11}| = \frac{11}{2}d$인데 뭐 같은 값을 가지는 게 없네요. 그리고 $|S_{12}| = 12d$입니다. 어?

이거 아까 봤잖아요! $|S_4| = |S_6| = |S_{12}| = 12d$이네요.

그리고 $|S_{13}|=\dfrac{39}{2}d$이니까 여기부터는 3개의 점에서 만날 수가 없게 되네요. 그러니까



이렇게 되겠네요!

이렇게 되면 3개의 점에서 만나는 건 $n=4,\ 6,\ 12$일 때 $|S_4|=|S_6|=|S_{12}|=12d$만 있어요. 이게 24가 되어야겠죠? 따라서 $12d=24$이고 $d=2$입니다.

$a_n=2n-11$이니까 $a_{12}=13$이네요.

19. 정답 ②

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|a_{n+1}=a_{n+1}$이고 $a_n \times a_{n+2} \leq 0$이랍니다.

일단 먼저 $|a_n|a_{n+1}=a_{n+1}$부터 볼게요. a_{n+1}을 넘기고 정리하면 $a_{n+1}(|a_n|-1)=0$이죠? 따라서 $a_{n+1}=0$이거나 $|a_n|=1$이어야 합니다. 절댓값을 풀면 $a_{n+1}=0$이거나 $a_n=-1$이거나 $a_n=1$이어야 한다는 거죠.

그리고 $a_n \times a_{n+2} \leq 0$는 뭐... n번째 항의 값과 $n+2$번째 항의 값을 곱하면 0이거나 음수여야 한다는 거네요. 이건 나중에 봐야할 것 같아요.

아래에 $a_n=n^2$을 만족시키는 자연수 n이 1개 있고 $a_3=1,\ a_6=0$이랍니다. 어? 방금 $a_{n+1}=0$이거나 $a_n=-1$이거나 $a_n=1$이어야 한다고 했었잖아요. n에 숫자를 막 집어 넣어볼까요? $n=2$를 넣으면 $a_3=0$이거나 $a_2=-1$이거나 $a_2=1$이어야 합니다. 그런데 지금 a_3은 0이 아니라 1이잖아요? 그러면 무조건 a_2는 -1이거나 1이어야 합니다.

그런데 $n=1$을 넣으면 $a_2=0$이거나 $a_1=-1$이거나 $a_1=1$이어야 하죠. 방금 a_2는 -1이거나 1어야 한다고 했잖아요. 0은 아니니까 a_1 역시 마찬가지로 -1이거나 1이어야 하겠네요.

이번엔 위로도 올라가봅시다. $n=3$을 넣으면 $a_4=0$이거나 $a_3=-1$이거나 $a_3=1$이어야 합니다. 그런데 이미 $a_3=1$이네요. 그러면 a_4는 꼭 0이 아니어도 되겠어요. 이미 $a_4(|a_3|-1)=0$가 성립하잖아요. 이거는 둘 중 하나만 성립하면 나머지는 성립하든 아니든 상관없는 거니까요.

그리고 $n=5$를 넣으면 $a_6=0$이거나 $a_5=-1$이거나 $a_5=1$이어야 하는데 이미 $a_6=0$이니까 이것도 마찬가지로 a_5는 반드시 -1 또는 1일 필요는 없습니다.

하지만 $n=4$를 넣으면 $a_5=0$이거나 $a_4=-1$이거나 $a_4=1$이어야 합니다. 둘 중 하나는 만족시켜야 해요. 이러면 케이스가 나뉘겠네요.

$n=6$을 넘어버리면 모든 항의 값이 0이 되어야 합니다. $a_7=0$이거나 $a_6=-1$이거나 $a_6=1$이어야 하는데 $a_6=0$이니까 $a_7=0$이구요, 나머지들도 마찬가지로 다 0이 됩니다.
뭐 아무튼 케이스를 나누기 전에 대략적으로 정리 좀 해봅시다.

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

2) 케이스 분류

2-1) $a_4=-1$이거나 $a_4=1$일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

일단 $a_3=1$인데 $a_n \times a_{n+2} \le 0$에 의하여 $a_1 \times a_3 \le 0$이니까 $a_1=-1$이어야죠? 곱해서 0이거나 음수가 되어야 하잖아요.

그리고 $a_n = n^2$을 만족시키는 자연수 n이 하나 있어야 합니다. 지금 표를 보면 대충 $n = 5$에서 성립해야 할 것 같은 느낌이 들죠? $n = 6$ 이후부터는 계속 0이니까 상관없구요. $a_1 = -1$이니까 성립 안 하고 a_2, a_3, a_4는 아예 숫자가 벗어났잖아요.

그런데 $a_3 = 1$이고 $a_3 \times a_5 \le 0$이니까 a_5는 0 또는 음수가 나와야 하지 않나요? $a_n = n^2$가 성립하는 자연수 n이 없네요.

2-2) $a_5 = 0$일 때

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

아까랑 마찬가지로 $a_1 = -1$입니다. 그리고 $a_n = n^2$을 만족시키는 자연수 n이 하나 있어야 하는데 표를 보면 관련 있는 건 $n = 4$뿐이네요. $a_1 = -1$이고, a_5부터는 계속 0이고, a_2와 a_3는 아예 숫자가 관련이 없구요. $a_4 = 16$입니다.

그리고 $a_2 \times a_4 \le 0$이어야 하죠? $a_2 = -1$입니다. 결국

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-1	-1	1	16	0	0

이렇게 되어야 하겠네요. $\sum_{n=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$입니다. 답은 ②번이네요.

20. 정답 ②

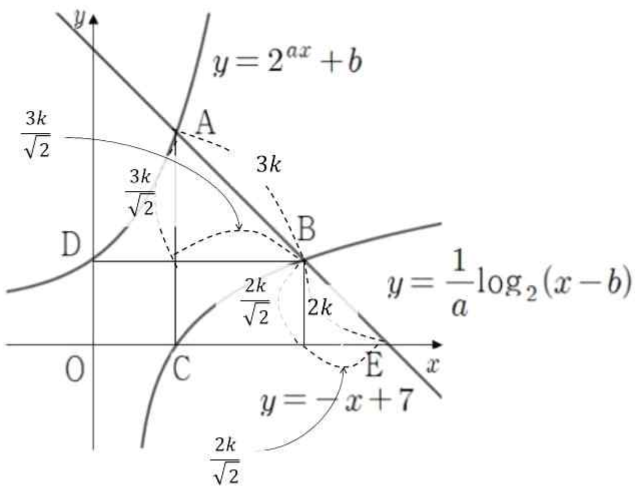
1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

그림에 대충 다 나와 있는 것 같네요. $y = -x + 7$가 있는데 얘가 $y = 2^{ax} + b$와 만나는 점이 A, $y = \frac{1}{a}\log_2(x - b)$와 만나는 점이 B랍니다. 그리고 A에서 x축에 내린 수선의 발이 C인데 이 점은

$y=\dfrac{1}{a}\log_2(x-b)$가 x축과 만나는 점이구요, B에서 y축에 내린 수선의 발이 D인데 이 점은 $y=2^{ax}+b$가 y축과 만나는 점이랍니다. 그리고 $y=-x+7$가 x축과 만나는 점이 E라네요.

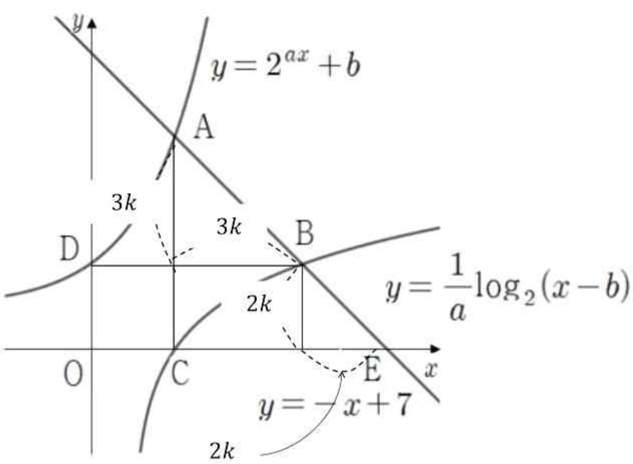
일단 E의 좌표는 알겠어요. E(7, 0)이네요. 그리고 나머지는...... 일단 다른 조건부터 봅시다. 함부로 좌표를 잡지 말라고 했잖아요?

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=3:2$랍니다. 이거부터 해볼까요? 일단 $\overline{\mathrm{AB}}=3k$, $\overline{\mathrm{BE}}=2k$라 해봅시다.
그러면



이렇게 되겠네요.

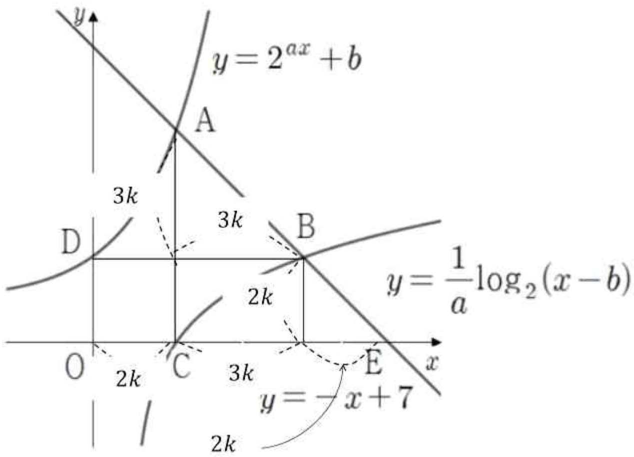
그런데 루트가 있으니까 너무 불편해요. 그냥 차라리



이렇게 설정합시다. 이거 어차피 이렇게 해도

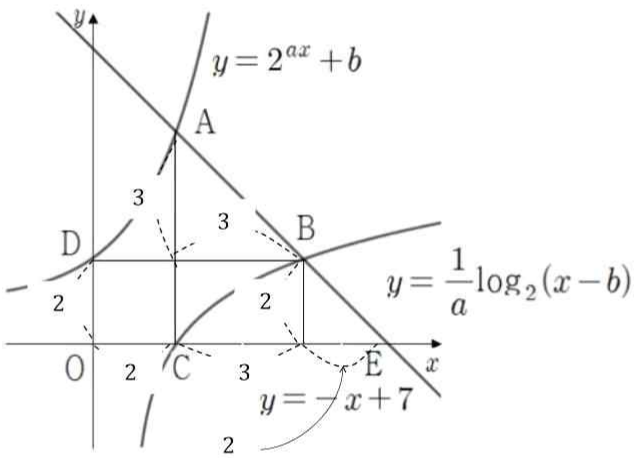
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=3:2$가 유지되잖아요?

그런데 $y=2^{ax}+b$와 $y=\dfrac{1}{a}\log_2(x-b)$는 서로 역함수 관계에 있죠? 그러면 $y=-x+7$와 y축이 만나는 점을 F라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{FA}}=3:2$도 성립합니다. 따라서



이렇게 되겠네요. $2k+3k+2k=7$이 되고

$k=1$이네요.



이렇게 됩니다.

D의 좌표는 $(0,\ 2)$이고 A의 좌표는 $(2,\ 5)$이네요. 결국 $y=2^{ax}+b$는 $(0,\ 2)$와 $(2,\ 5)$를 지나야 합니다. 그럼 계산만 하면 되겠네요. $y=2^{ax}+b$가 $(0,\ 2)$를 지나니까 $b+1=2$이고 $b=1$입니다. $y=2^{ax}+1$가 $(2,\ 5)$를 지나니까 $2^{2a}+1=5$이고 $2^{2a}=2^2=4$입니다. $a=1$이네요. $a+b=2$이고 답은 ②번입니다.

21. 정답 ②

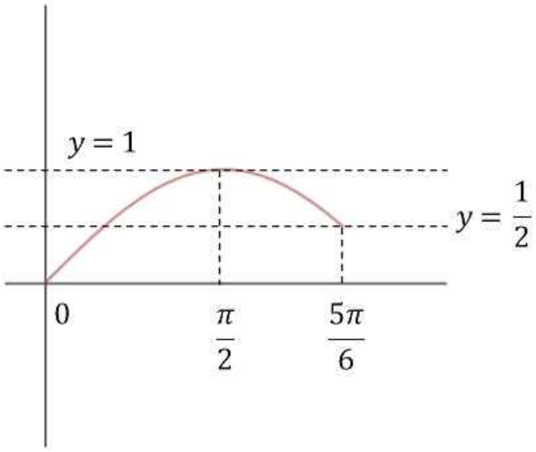
1) 문제해석

$0 \le x < \frac{5}{6}\pi$에서 $f(x)=\cos^2 x+a\sin x+2$가 $x=b$에서 최댓값 $\frac{13}{4}$을 갖는답니다. 하나의 문자로 정리되어 있어야 뭘 하든 말든 하겠죠? $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용해봅시다. $f(x)=-\sin^2 x+a\sin x+3$입니다. 이차함수랑 모양이 비슷하죠? $\sin x=t$라 하면 $f(x)=-t^2+at+3$인 이차함수입니다.

범위도 확인해볼게요. $\sin x = t$인데 $0 \le x < \frac{5}{6}\pi$이잖아요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$y = \sin x$를 그리면

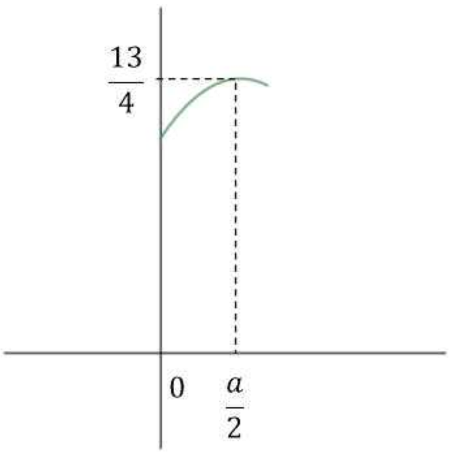


이렇게 되네요. 범위에 끝자락에 해당하는 $x = \frac{5\pi}{6}$에서

함숫값이 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$이네요. 결국 $0 \le t \le 1$이 됩니다. 우리는 $f(x) = -t^2 + at + 3$라는 함수에서

$0 \le t \le 1$의 범위만 보면 되는 거에요.

축이 $t = \frac{a}{2}$인 함수인데 $0 < a < 2$이니까 축이 $0 \le t \le 1$의 범위 안에 있네요? 따라서 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 결국 $x = \frac{a}{2}$에서 최댓값을 가지죠? 이 값이

$\frac{13}{4}$이니까 $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 3 = \frac{13}{4}$이고 $a^2 = 1$인데 $0 < a < 2$이니까 $a = 1$입니다.

$f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 3$이네요.

그런데 주의할 점은 $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 3$가 최대가 되는 지점은 $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$이 아니라는 거에요! 왜냐면

우리는 $\sin x = t$로 치환했잖아요. 따라서 우리가 구해야 하는 $x = b$는 $\sin x = \dfrac{1}{2}$를 만족시키는 x값입니다.

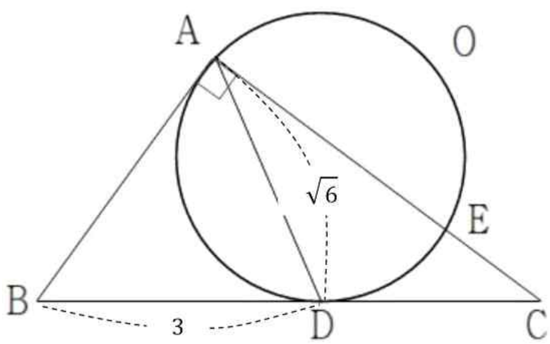
아까 그림 그려놨던 거 보면 $x = \dfrac{5\pi}{6}$에서 함숫값이 $\dfrac{1}{2}$이었는데 $0 \le x < \dfrac{5}{6}\pi$이니까 등호가 없잖아요? 따라서

대칭축인 $x = \dfrac{\pi}{2}$에 대칭되는 부분에 있는 $x = \dfrac{1}{6}\pi$가 b입니다. $a = 1$이고 $b = \dfrac{1}{6}\pi$이니까 $\dfrac{ab}{\pi} = \dfrac{1}{6}$이네요. 답은 ②번입니다.

22. 정답 9

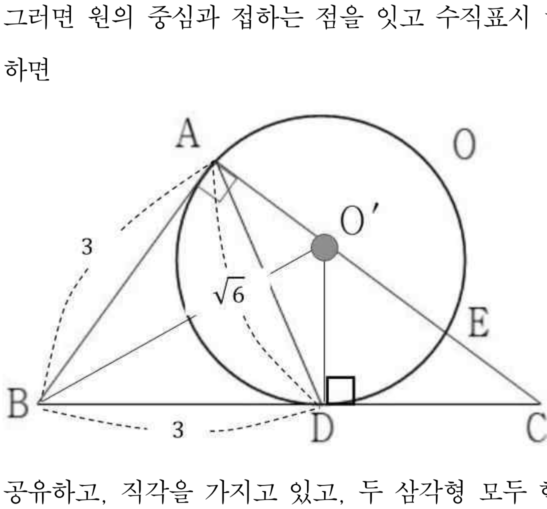
1) 그림 있으면 그림 보면서

일단 다 표시 좀 해둡시다.



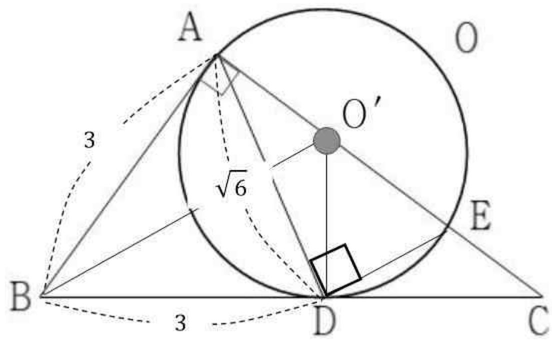
이렇게 말이죠.

그리고 지금 원 O 위의 점 A에서의 접선이 선분 AB이고 원 O 위의 점 D에서의 접선이 선분 BD이잖아요. 그러면 원의 중심과 접하는 점을 잇고 수직표시 해줘야죠. 각의 이등분선도 그려주구요. 원의 중심을 O′이라 하면



이렇게 되죠? 삼각형 O′BD와 O′AB는 선분 BO′를 공유하고, 직각을 가지고 있고, 두 삼각형 모두 한 변의 길이가 원의 반지름과 같으므로 합동입니다. 따라서 선분 AB의 길이와 선분 BD의 길이는 같아야 하겠네요.

또한 원 O의 지름이 선분 AE인데 선분 AE를 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형이 있네요? ADE 말이에요. 그러면



이렇게도 표시 해줘야죠?

어? 우리가 구해야 하는 건 삼각형 ADE의 넓이인데 높이가 $\sqrt{6}$으로 주어졌네요. 그럼 결국 우리는 $\overline{\mathrm{DE}}$만 구하면 되겠어요.

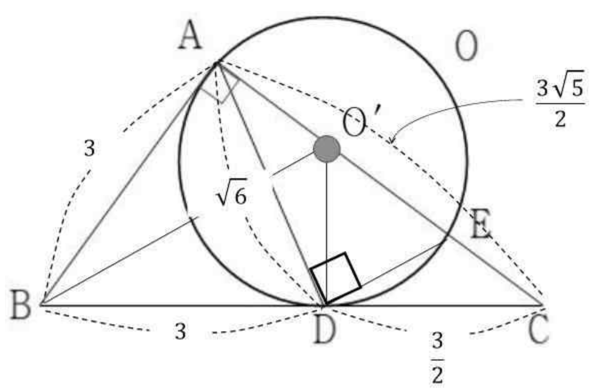
2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 세 변의 길이

그런데 이러면 정해진 삼각형이 있네요. ABD는 세 변의 길이가 모두 나와 있어요. 이러면 코사인법칙을 통해 나머지 각을 알 수 있죠? $\angle \mathrm{ABC} = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{3^2+3^2-\sqrt{6^2}}{2\times3\times3} = \dfrac{2}{3}$입니다.

그런데 이거 삼각형 ABC에도 적용할 수 있죠? $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{3}{\overline{\mathrm{BC}}} = \dfrac{2}{3}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{9}{2}$입니다. 그러면

$\overline{\mathrm{DC}} = \dfrac{3}{2}$이네요.

ABC는 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용하면 $3^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2$이고 $\overline{\mathrm{CA}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$가 됩니다.



이렇게 되는 거죠.

그리고 $\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$이잖아요? $\cos\theta$를 알면 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$을 사용해서 추가적으로 알 수 있는 것이 있죠.

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$는 $y > 0$인 y축이니까 sin을 cos으로 바꾸고, 예각인 θ만큼 반시계방향으로 돌리면 사인값은

양수니까 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$으로 바뀌잖아요? 따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{2}{3}$입니다.

이러면 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{2}{3}$을 이용해서 삼각형 $\mathrm{O'DC}$에 대하여 정리할 수 있죠. $\overline{\mathrm{O'D}}$는 원 O의 반지름인

r이니까 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{\mathrm{O'D}}}{\overline{\mathrm{CO'}}}=\frac{r}{\overline{\mathrm{CO'}}}=\frac{2}{3}$이고 $\overline{\mathrm{CO'}}=\frac{3}{2}r$입니다.

그럼 여기도 피타고라스를 사용해야겠네요. $r^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}r\right)^2$이고 $r^2=\frac{9}{5}$입니다.

그리고 삼각형 ADE도 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용할 수 있겠네요. $\overline{\mathrm{AE}}=2r$이니까

$\sqrt{6^2}+\overline{\mathrm{DE}}^2=(2\mathrm{r})^2$이고 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$입니다.

이제 넓이를 구하면 되겠네요. $S=\frac{1}{2}\times$(높이 $\sqrt{6}$)$\times$(밑변 $\frac{\sqrt{30}}{5}$)$=\frac{3}{\sqrt{5}}$입니다. 따라서 $5S^2=9$이네요.

23. 정답 5

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

첫째항인 a_1이 자연수인데 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (a_n\geq 0)\\ a_n+5 & (a_n<0)\end{cases}$랍니다.

그리고는 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하래요. 어......

일단 주어진 조건은 a_1과 a_{15}인데 이거 간격이 너무 먼데요? 이 사이에 13개 항이나 있어요. 이걸 미지수로 잡는다면...? 어우 끔찍하네요.

그러면 어쩌죠? 뭘 어떡해요. 그냥 자연수 넣어야죠.

2) 케이스 분류

$a_1=1$이라면 $1\ \ -1\ \ 4\ \ 2\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ 1\ \ -1\ \ 4\ \ \cdots$가 되죠. 잘 보면 숫자가 반복되는 거 보이시나요?

$1\ \ -1\ \ 4\ \ 2\ \ 0\ \ -2\ \ 3$이 반복되죠. 지금 주기가 7이잖아요? 따라서 a_{14}까지 저 숫자들이 반복되고 a_{15}는

반복되는 숫자들의 첫 번째 숫자인 1이 될 거예요. $a_{15}=1$

$a_1=2$라면 2 0 -2 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 $-1\cdots$가 됩니다. 2 0 -2 3 1 -1 4가 반복되네요. 따라서 $a_{15}=2$입니다.

$a_1=3$이라면 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 4$\cdots$가 됩니다. 이것도 역시 3 1 -1 4 2 0 -2이 반복되네요. 그리고 잘 보면 반복되는 숫자들이 똑같아요. 단지 순서만 바뀔 뿐이네요. $a_{15}=3$입니다. 뭔가 $a_1=4$일 때도 비슷한 결과가 나올 것 같은 기분이 들죠..?

$a_1=4$라면 4 2 0 -2 3 1 -1 4 2 0 $\cdots$가 되네요. 마찬가지로 반복되니까 $a_{15}=4$입니다.

$a_1=5$라면... 첫 시작이 5네요? 이건 반복되는 숫자들에 없었는데... 일단 가봅시다.
5 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 $\cdots$이 됩니다. 이거 반복되긴 하는데 5는 반복되는 숫자에 포함이 안 돼요. 반복되는 건 특정 숫자들만 반복이 됩니다. 이거는 끝까지 확인해보긴 해야겠네요. a_{15}까지 나열해봅시다.
5 3 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 4 2 0 -2로 $a_{15}=-2$가 됩니다. $a_{15}<0$이네요! 따라서 a_1의 최솟값은 5입니다.

24. 정답 251

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=3x+a,\ g(x)=\displaystyle\int_2^x (t+a)f(t)dt$가 있는데 $h(x)=f(x)g(x)$랍니다. 일단 $g(x)$가 정적분의 위끝에 변수가 있네요. 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=2$를 넣으면 $g(2)=0$이 됩니다. 미분까지 하고 싶은데 곱한 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 있으니까 이건 패스할게요.

곱한 함수 식을 한 번 써볼게요. 일단 $g(x)$ 안에 $f(t)$가 있으니까 넣어보면 $g(x)=\displaystyle\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$입니다. $g(x)$는 이차함수를 적분한 거니까 삼차함수죠? 최고차항의 계수가 3인 이차함수를 적분했으니까 최고차항의 계수는 1이구요. 따라서 $h(x)=(3x+a)\displaystyle\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수입니다.

2) 조건해석

(가)조건에서 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이라고 합니다. 어떤 점에서의 접선이 x축이라는 건?

일단 접선과 $h(x)$가 만나는 점이 x축 위라는 거고 그 점에서의 접선의 기울기가 0이라는 거죠?

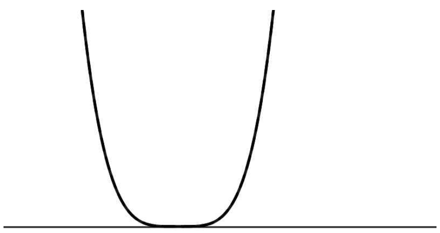
이걸 다시 표현하면 어떤 점에서 x축에 접한다는 거예요. $x=a$에서 $h(x)$와 x축이 접한다면 $h(a)=0$, $h'(a)=0$이 되겠죠. 인수정리가 쓰고 싶어지는데요? $h(x)$는 $(x-a)$라는 인수를 적어도 두 개 가져야 합니다.

(나)조건에서 $y=|h(x)|$가 x축에 평행한 직선, 즉 $y=k$라는 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값이 4라고 합니다. 이건 그래프를 그려봐야겠네요.

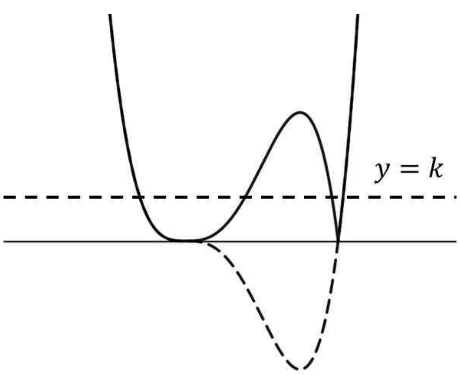
3) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

일단 x축에 접하는 그래프부터 생각해야 해요. 그러면서 접어 올렸을 때 $y=k$라는 x축에 평행한 직선과 4개의 점에서 만나고, 그게 최댓값인 그래프를 찾아야 합니다.

일단

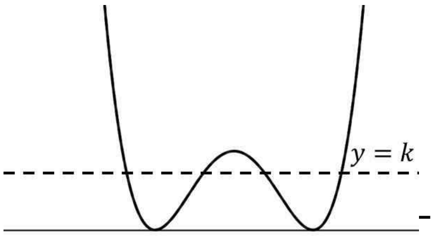


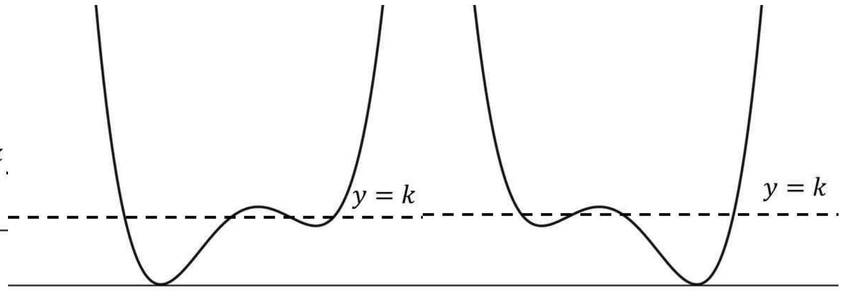
이런 그래프는 안 됩니다. 2개의 점에서 만나죠?



이런 그래프는 되겠네요. 변곡점이 오른쪽으로 가서 개형의 좌우가 뒤바뀌어도 괜찮아요.

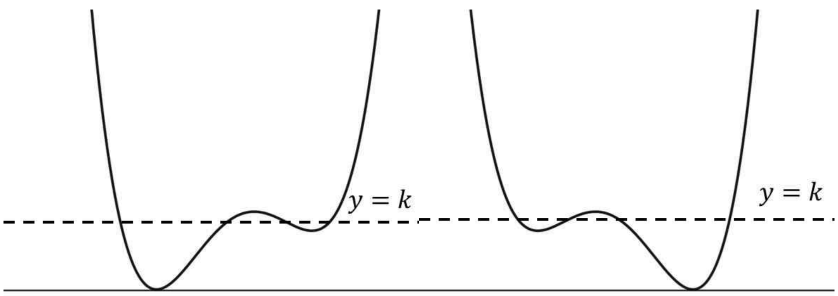
W모양의 그래프 중에서는





이정도가 되겠네요.

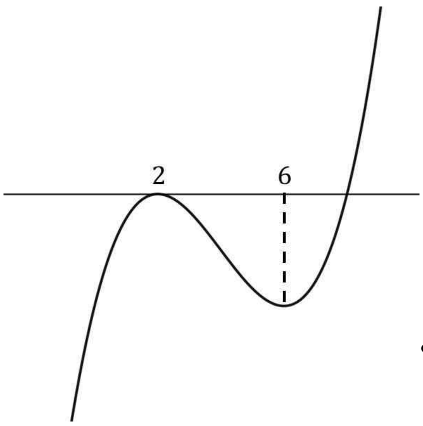
$h(x)$는 지금 $x=-\frac{a}{3}$, $x=2$에서 x축과 만나고 있죠. 두 개가 같은지 다른지는 모르겠지만요. 근데 개형 중에서 x축과 딱 한 개의 점에서만 만나는 것이 있죠.



이 두 개 말이에요. x축에 접하고 있으니까 $h(x)$는 같은 인수를 두 개 가져야 합니다. 마침 두 개가 있네요. $x=-\frac{a}{3}$, $x=2$이죠. 이 두 개가 같아야 같은 인수가 되겠죠? 따라서 $a=-6$이고

$h(x)=3(x-2)\int_{2}^{x}(t-6)(3t-6)dt$입니다.

그런데 이 두 개형은 문제가 있어요. $3(x-2)(x-6)$를 적분하고 $x=2$에서 함숫값이 0인 함수를 그려보세요. $x=2$에서 극대, $x=6$에서 극소가 되니까

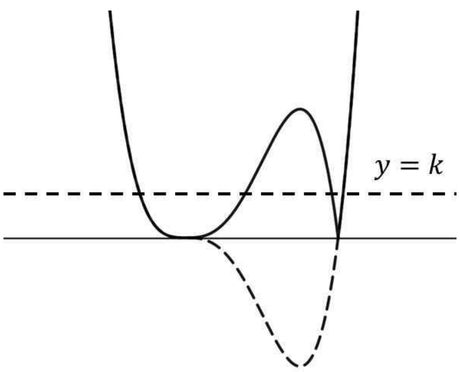


이렇게 됩니다. 일단 변곡점의 x좌표는 2와 6의 중점인 $x=4$이구요,

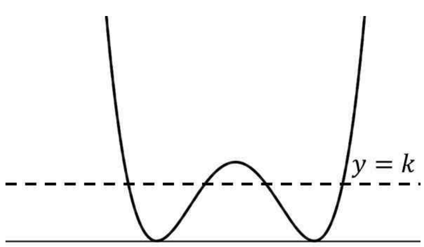
x축과 만나는 $x=2$가 아닌 점의 x좌표를 k라 하면 삼차함수의 비율관계에 의하여 2와 k의 $1:2$ 내분점의 x좌표는 $x=4$가 됩니다. $\dfrac{4+k}{1+2}=4$이고 $k=8$이네요. 따라서 $\displaystyle\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$는 $(x-2)$라는 인수를 두 개, $(x-8)$이라는 인수를 하나 갖습니다.

그렇다면 $h(x)=3(x-2)\displaystyle\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$는 $(x-2)$라는 인수를 총 세 개 가지게 되는 거잖아요?

$3(x-2)$가 추가로 곱해져 있으니까요. 그러면 저 개형이 나올 수 없죠. $(x-2)$라는 인수를 총 세 개 가지면



와 같은 개형이 나올 테니까요.



그럼 이런 개형은 어떨까요?

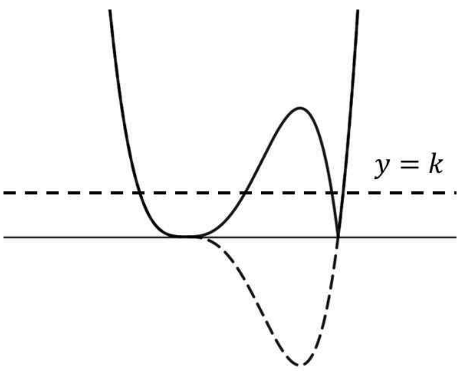
$h(x)=(3x+a)\displaystyle\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$에서 방금과 같이 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$가 같다면 $h(x)$는 $(x-2)$라는 인수를

세 개 가지게 될 거예요. 따라서 바로 위와 같은 개형이 나오려면 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$는 달라야 합니다.

그러면 결국 $\displaystyle\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$라는 인수 하나, $(x-2)$라는 인수 두 개를 가져야겠어요. 곱해져 있던 $(3x+a)$라는 인수까지 더해져서 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$ 두 개, $(x-2)$ 두 개가 나오죠.

그런데 이것도 문제가 있어요. $\displaystyle\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$를 미분하면 $(x+a)(3x+a)$가 되잖아요. $x=-\dfrac{a}{3}$에서 극대 또는 극소가 된다는 건데 $\displaystyle\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $x=-\dfrac{a}{3}$에서 만나기만 해야 하잖아요? 접하면 인수가 두 개가 될 태니까요. 그런데 극대 또는 극소점이 x축에 있다면? 그건 접했다는 거죠. 조건에 맞지 않게 됩니다.

따라서 가능한 개형은



이거네요.

만약 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$가 같다면 $a=-6$입니다. $h(x)=3(x-2)\displaystyle\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$인데 아까 살펴봤듯이 $\displaystyle\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$는 $(x-2)$라는 인수 두 개, $(x-8)$라는 인수 하나를 가지니까 $\displaystyle\int_2^x (t-6)(3t-6)dt=(x-2)^2(x-8)$입니다. $h(x)=3(x-2)^3(x-8)$이네요. $h(-1)=729$입니다. 일단 하나 구했어요!

이번엔 $x=-\dfrac{a}{3}$, $x=2$가 다르다고 해봅시다. 그러면 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가질 것인가, 아니면 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)$라는 인수를 세 개 가질 것인가가 나뉘죠?

만약 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가진다고 해봅시다. $h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$에서 이미

$\left(x+\frac{a}{3}\right)$이라는 인수는 $(3x+a)$로 곱해져 있으니까 결국 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가져야 합니다.

그런데 이건 불가능하죠. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$가 $(x-2)$라는 인수를 세 개 가져서 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt=(x-2)^3$이 된다면 미분했을 때 $(x+a)(3x+a)=3(x-2)^2$이어야 하는데 지금 $(x+a)$라는 인수와 $(3x+a)$라는 인수는 같지 않잖아요.

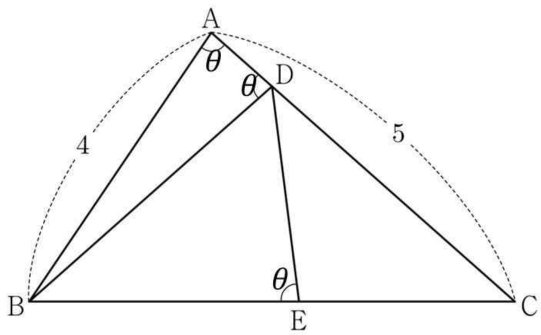
$\left(x+\frac{a}{3}\right)$라는 인수를 세 개 가졌을 때는 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$가 $(x-2)$라는 인수 하나, $\left(x+\frac{a}{3}\right)$라는 인수 두 개를 가져야 합니다. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt=(x-2)\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$가 되는 거죠. 항등식이니까 뭘 해도 같아야 합니다. 일단 $x=2$를 넣으면 $0=0$으로 같네요. 미분하면 $3(x+a)\left(x+\frac{a}{3}\right)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x+\frac{a}{9}-\frac{4}{3}\right)$가 되네요. 따라서 $a=\frac{a}{9}-\frac{4}{3}$이고 $a=-\frac{3}{2}$가 됩니다. $h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$는 $\left(x+\frac{a}{3}\right)$라는 인수 세 개에 $(x-2)$라는 인수 하나를 가진다고 했었죠? 따라서 $h(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$이구요, $h(-1)=\frac{243}{8}$입니다.

$p=8$, $q=243$이니까 $p+q=251$이네요.

25. 정답 ③

1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

$\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$이랍니다. $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$빼고는 그림에 표시되어 있네요. 이때 $\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{BED}$라고 하네요. 보기 편하게 $\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{BED}=\theta$라 할까요? 그러면 $\cos\theta=\frac{1}{8}$입니다. 이왕이면 사인값도 구해놓을까요? $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이니까 $\sin^2\theta=\frac{63}{64}$입니다. θ는 π를 넘지 않으니까 $\sin\theta$는 양수입니다. 따라서 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이네요.



이렇게 되겠네요.

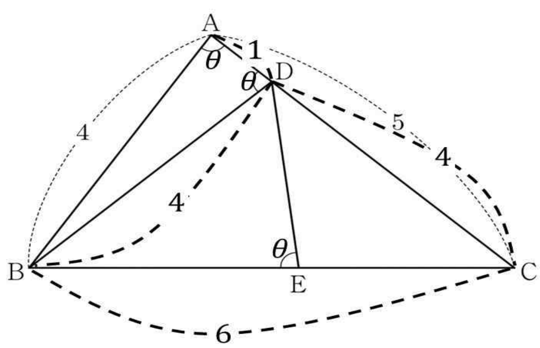
이렇게 보면 삼각형 BDA은 이등변삼각형이네요? 그러면 $\overline{\mathrm{BD}}=4$가 됩니다.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 ABC는 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이에요. 그러면 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이도 구할 수 있겠죠? $\cos\theta=\dfrac{4^2+5^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$입니다.

삼각형 BDA 역시 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이죠. 따라서

$\cos\theta=\dfrac{4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-4^2}{2\times4\times\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{8}=\dfrac{1}{8}$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=1$입니다. 모두 정리하면



이렇게 됩니다.

그러고 보니 BCD도 이등변삼각형이네요? 그러면 $\angle\mathrm{DBE}=\angle\mathrm{BCD}$이죠? 이거를 θ_2라고 할게요.

이제 우리가 구해야 하는 건 $\overline{\mathrm{DE}}$이에요. 이걸 어떻게 구하면 될까...... $\overline{\mathrm{DE}}$를 표현할 수 있는 식은 없을까요?

사인법칙이 있긴 하네요. 삼각형 BDE 안에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta_2}=\dfrac{4}{\sin\theta}$가 됩니다. $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$인 걸 알긴 알지만 $\sin\theta_2$를 모르겠어요.

음... 그리고 또 뭔가가 있어야 하는데.. 그런데 왜 이리 각과 관련한 조건들이 많은 걸까요? 각과 각의 관계에 대한 공식은 사인법칙인데... θ, θ_2와 관련된 삼각형 뭐가 더 없을까요? 그러고 보니 ABC도 되네요?

사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin\theta_2}=\dfrac{6}{\sin\theta}$ 입니다. 양변에 4를 나눠주면 $\dfrac{1}{\sin\theta_2}=\dfrac{3}{2\sin\theta}$ 이니까 이걸 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta_2}=\dfrac{4}{\sin\theta}$ 에

넣으면...? $\overline{\mathrm{DE}}\times\dfrac{3}{2\sin\theta}=\dfrac{4}{\sin\theta}$ 이고 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{8}{3}$ 이네요! 답은 ③번입니다.

26. 정답 ②

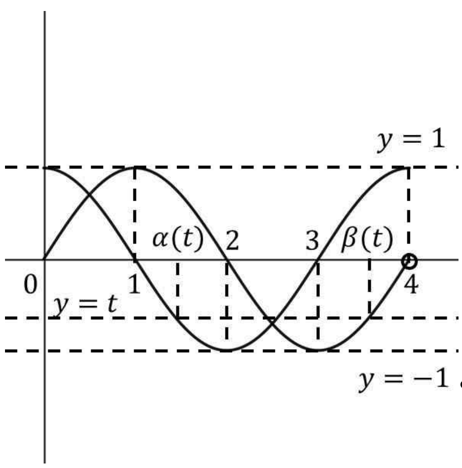
1) 문제해석

$-1\le t\le 1$인 t가 있는데 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$를 만족시키는 x 중에서 $0\le x<4$에 있는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라고 한답니다.

일단 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$를 만족시키려면 $\sin\dfrac{\pi x}{2}=t$이거나 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=t$이면 되겠죠? 다시 말하면 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=t$가 만나는 점이거나 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=t$가 만나는 점이 되는 거예요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이거 그래프로 그려보면



이렇게 됩니다. 결국 $\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $\cos\dfrac{\pi x}{2}$를 그린 후에 $y=t$를 그리고 $y=t$와 왼쪽부터 처음으로 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$, 마지막에 만나는 점의 x좌표를 $\beta(t)$라고 하는 거네요.

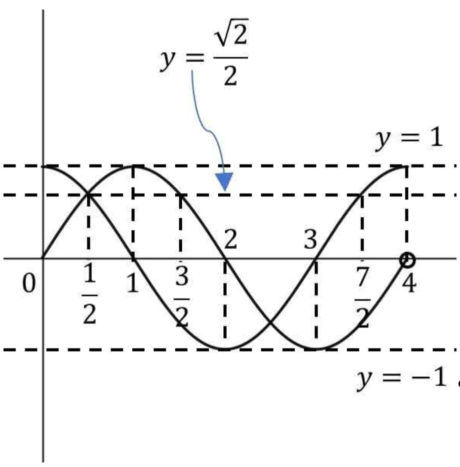
ㄱ에서 $-1\le t<0$이면 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이냐고 물어봅니다. 딱 그림에 있는 상황이네요! 그런데 더해서 5가 되는지를 어떻게 확인하죠?

사인과 코사인 그래프를 확인할 때는 대칭을 확인하는 것이 매우 중요합니다. 지금 그래프를 보면 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$가 $x=\frac{5}{2}$에 대하여 대칭이죠? 지금은 대칭이 아닌 것 같아도 그래프를 옆으로 확장해보면 대칭입니다. 사인 그래프를 옆으로 옮기면 코사인 그래프와 같게 되잖아요. 반대도 마찬가지이구요.

$-1\le t<0$이면 $\alpha(t)$는 코사인 그래프 상에 있구요. $\beta(t)$는 사인 그래프 상에 있어요. 둘의 중점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$가 되겠죠. 대칭이니까요. 따라서 $\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\frac{5}{2}$이고 $\alpha(t)+\beta(t)=5$입니다. 맞네요! ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$이냐고 물어보네요. 일단 $\alpha(0)$과 $\beta(0)$은 $t=0$을 그어서 확인하면 되겠죠? 그림을 보면 $\alpha(0)=0$이고 $\beta(0)=3$이네요. $x=4$는 등호가 없어서 포함되지 않으니까요. 그러니까 결국 $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 차이가 3이 되는지를 묻고 있는 거예요.

일단 범위부터 확인해봅시다. $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 뭘까요? $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 x는 $\frac{1}{2}$이 있고, $x=1$에 대하여 대칭임을 이용하면 $\frac{3}{2}$도 되네요. 그리고 $\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 x는 $\frac{1}{2}$이 있고, $x=2$에 대하여 대칭임을 이용하면 $\frac{7}{2}$도 됩니다. 어? $x=\frac{1}{2}$이면 $\sin\frac{\pi x}{2}=\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이네요? 그러니까



이렇게 되는 거죠?

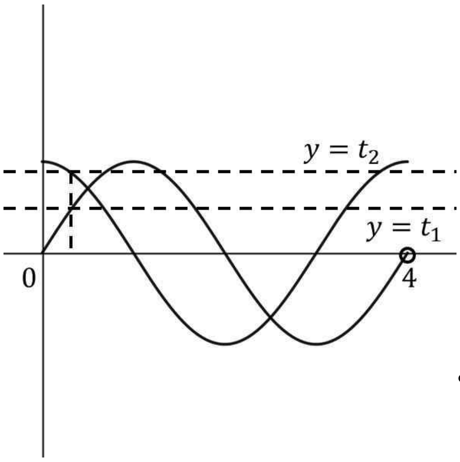
지금 보면 $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $\alpha(t)$는 사인 그래프 상에 있고 $\beta(t)$는 코사인 그래프 상에 있어요. 그런데 $0<x<\frac{1}{2}$일 때 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 $3<x<\frac{7}{2}$일 때 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$는 모양이 일치합니다. 그럴 수밖에 없는 게 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$를 3만큼 오른쪽으로 밀어버리면 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$가 되거든요. 그러니까 $y=t$라는 수평선을 그어서 만나는 x좌표의 차이도 일정하게 되겠죠. 단지 3만큼 오른쪽으로 움직였으니까요. 따라서 ㄴ도

맞습니다.

ㄷ에서 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\dfrac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\dfrac{1}{3}$이냐고 물어봅니다.

일단 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$라는 게 뭘까요? 먼저 $\alpha(t_1)$은 $y=t_1$이 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표에요. $\alpha(t_2)$는 $y=t_2$이 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표이죠. $t_2-t_1=\dfrac{1}{2}$이니까 t_1, t_2는 달라요. 그러면 결국 가장 작은 x좌표가 같게 되는 두 직선의 차이가 $\dfrac{1}{2}$가 난다는 이야기네요.

그래프를 잘 보면



이렇게 되어야 하겠네요. 그러면 결국 $x=\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$에서 코사인값과 사인값의 차이가 $\dfrac{1}{2}$이 되어야 한다는 말이 됩니다. $t_2=\cos\dfrac{\pi k}{2}$이고 $t_1=\sin\dfrac{\pi k}{2}$이니까요.

$\cos\dfrac{\pi k}{2}-\sin\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{1}{2}$가 되네요. 그런데 이때 $\cos^2\dfrac{\pi k}{2}+\sin^2\dfrac{\pi k}{2}=1$이잖아요? $\cos\dfrac{\pi k}{2}-\sin\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{1}{2}$를 제곱하면 $\cos^2\dfrac{\pi k}{2}-2\cos\dfrac{\pi k}{2}\sin\dfrac{\pi k}{2}+\sin^2\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{1}{4}$가 됩니다. $\cos^2\dfrac{\pi k}{2}+\sin^2\dfrac{\pi k}{2}=1$이니까 $-2\cos\dfrac{\pi k}{2}\sin\dfrac{\pi k}{2}=-\dfrac{3}{4}$이고 $\cos\dfrac{\pi k}{2}\sin\dfrac{\pi k}{2}=\dfrac{3}{8}$이네요. $t_1\times t_2=\dfrac{3}{8}$인데요? ㄷ은 아닙니다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번이네요.

27. 정답 24

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 인수정리

최고차항의 계수가 1인 이차함수가 있는데 (가)조건에서 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 각각의 실근은 중근이라고 합니다. n은 자연수이구요. (나)조건에서는 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수라네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야 해요.

이차함수의 최솟값이 음의 정수라는 건 이미 x축과 두 개의 점에서 만나고 있다는 말이겠죠? 그래프 그려보면 바로 알 수 있어요. 두 실근을 α, β라 하면 인수정리에 의해 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$라 할 수 있겠네요.

x^n-64는 자체적으로 중근을 가질 수 없습니다. n이 홀수라면 $y=x^n$은 계속 증가하는 그래프인데 그러면 만나는 점이 하나가 되죠. $x^n-64=0$은 오직 하나의 실근을 가지게 됩니다. 이러면 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$를 곱해도 중근 두 개를 가질 수 없어요.

n이 짝수라면 $y=x^n$은 $x=0$에서 방향을 바꾸면서 x축에 접하는 그래프입니다. $y=x^2$와 아주 유사한 그래프이죠. 그러면 $y=x^n$과 $y=64$가 만나는 점은 두 개가 됩니다. 그리고 그게 $x=\alpha$, $x=\beta$가 되어야 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$와 합쳐서 중근을 가지게 되겠죠? 따라서 따라서 $\alpha^n=64$, $\beta^n=64$입니다.

α, β는 같으면 안 되니까(같으면 $f(x)=(x-\alpha)^2$로 최솟값이 0이 되겠죠?) 하나는 양수, 하나는 음수이고 서로의 부호는 반대가 되어야겠네요. $\alpha=-\beta$입니다. $f(x)=(x-\alpha)(x+\alpha)=x^2-\alpha^2$이네요. 최솟값은 $-\alpha^2$인데 이게 음의 정수여야 하죠? 일단 기억해두자구요.

결국 $\alpha^n=64$를 만족하고 $-\alpha^2$가 음의 정수가 되는 짝수 n을 찾아야 합니다. 천천히 자연수에 숫자 넣어볼까요?

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

$n=2$이면 $\alpha^2=64$입니다. $-\alpha^2=-64$로 음의 정수이죠? 되네요.

$n=4$이면 $\alpha^4=64$입니다. $-\alpha^2=-8$로 음의 정수이네요. 됩니다.

$n=6$이면 $\alpha^6=64$입니다. $-\alpha^2=-4$로 음의 정수입니다. 되네요.

$n=8$이면 $\alpha^8=64$입니다. $-\alpha^2=-2^{\frac{3}{2}}$로 음의 정수가 아니네요? 안 됩니다.

$n=10$이면 $\alpha^{10}=64$입니다. $-\alpha^2=-2^{\frac{6}{5}}$로 음의 정수가 아닙니다. 안 되겠네요.

$n=12$이면 $\alpha^{12}=64$입니다. $-\alpha^2=-2$로 음의 정수이네요. 됩니다.

이거보다 더 작아지려면 $-\alpha^2=-1$이어야 하는데 그러면 $\alpha^n=64$가 될 리가 없죠? 여기가 끝이네요. 따라서 모든 자연수의 합은 $2+4+6+12=24$입니다.

28. 정답 64

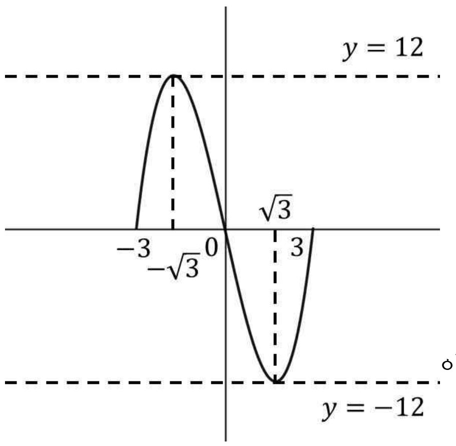
1) 문제해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$가 있네요. 이거 기함수네요? 최고차항의 계수가 양수인 기함수에요.

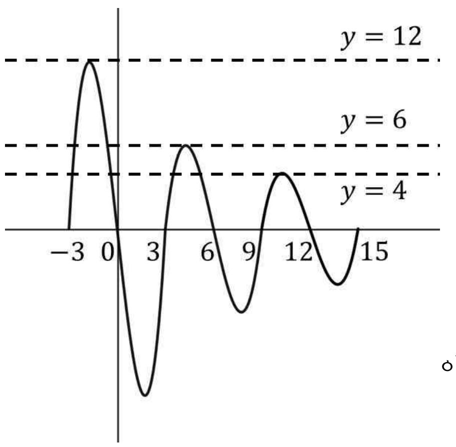
이때 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3 \le x < 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \le x < 6k+3) \end{cases}$ 라고 합니다. k는 모든 자연수이구요. 자연수면 숫자 넣어야겠죠? 가봅시다. $k=1$이면 $3 \le x < 9$에서 $\dfrac{1}{2}f(x-6)$입니다. $k=2$이면 $9 \le x < 15$에서 $\dfrac{1}{3}f(x-12)$입니다. 지금 보면 $-3 \le x < 3$에서 $f(x)$를 6만큼씩 오른쪽으로 평행이동하면서 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\cdots$이렇게 점점 작게 만드는 함수네요. 대충이라도 그려볼까요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(x^3-9x)$는 -3, 0, 3에서 x축과 만나구요, 미분하면 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(3x^2-9)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이니까 $x=-\sqrt{3}$에서 극대, $x=\sqrt{3}$에서 극소네요. 극댓값은 12이고 극솟값은 -12입니다.



이렇게 되는데 이게 6씩 평행이동하면서 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$가 되니까



이렇게 되겠네요. 이정도면 해석은 된 것 같아요.

3) 시그마 펼치기,

이때 $y=n$과 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라고 하는데 $\sum_{n=1}^{12} a_n$를 구하랍니다. 해석은 굉장히 간단하네요. 그냥 $y=n$이라는 직선을 그어서 $y=g(x)$와 만나는 점의 개수를 구하면 되는 거예요.
그러면 일단 펼쳐봅시다. $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{12}$이네요.

a_{12}는 $y=12$랑 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수이죠? 위의 그래프에서 한 점에서만 만나잖아요? $a_{12}=1$입니다. a_{11}은요? 지금 보면 2개의 점에서 만나죠. $y=12$와 $y=6$ 사이에서는 2개의 점에서 만나잖아요. 따라서 $a_{11}=a_{10}=a_9=a_8=a_7=2$입니다.

그러다가 a_6이 되면 3개의 점에서 만납니다. $a_6=3$이네요. 그리고 $y=6$과 $y=4$ 사이에 있으면 4개의 점에서 만나네요. 따라서 $a_5=4$입니다.

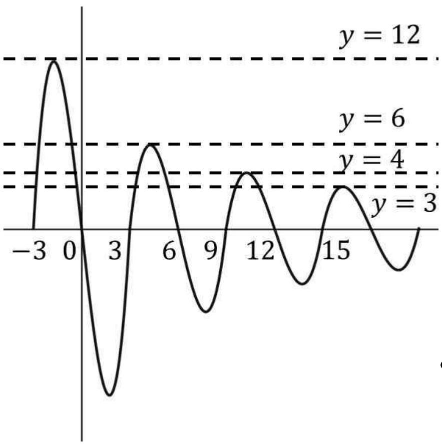
$y=4$가 되면 5개의 점에서 만나죠. $a_4=5$입니다. 이 아래부터는 생각을 좀 해봐야겠어요.

지금 보면 함수의 극대점이 될 때 만나는 점의 개수가 변하는 걸 알 수 있어요. 극댓값은 12에서부터

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$이렇게 작아지고 있잖아요? 이걸 나열해보면 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, $\cdots$, 1, $\cdots$이렇게 되겠죠?

그리고 극댓값과 a_n의 관계를 보면 $12 \rightarrow 6$으로 갈 때 a_n이 2가 늘었어요. 12일 때 $a_{12}=1$, 12랑 6 사이일 때 $a_n=2$, 6일 때 3 이런 식으로요.

그러면 4에서 3으로 갈 때도 a_n이 2가 늘어야겠죠? 지금 $a_4=5$이니까 $a_3=7$이 되어야 할 거예요.
혹시 모르니까 그래프를 늘려봅시다.



이렇게 되네요. $a_3=7$ 맞네요? 그럼 이제 다음으로 가봅시다.

다음은 3에서 2로 갈 때에요. 지금 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, $\cdots$, 1, $\cdots$을 보면 3에서 2를 가려면 $\frac{12}{5}$를 거쳐서 가야 하죠? 그러면 3에서 $\frac{12}{5}$로 가면 2가 늘고, $\frac{12}{5}$에서 2로 가면 또 2가 늘어나니까 총 4가 늘어날 거예요. 따라서 $a_2=7+4=11$입니다.

이제 마지막 a_1입니다. 이거는 2에서 1로 갈 때 몇 개의 숫자를 거치는지를 확인하면 되겠죠? 나열해봅시다.
2, $\frac{12}{7}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{12}{11}$, 1이렇게 되네요. 총 5번 거쳐서 6번째에 1에 도달하니까 총 12가 늘어나겠네요. 따라서 $a_1=11+12=23$입니다. 모두 더하면
$1+2+2+2+2+2+3+4+5+7+11+23=64$입니다. 답은 64네요.

29. 정답 ④

1) 그림 있으면 그림 보면서

$f(x)=x^3-x$와 $a>-1$인 상수 a에 대하여 $g(x)$는 $(-1,\ f(-1))$과 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선이랍니다. 그럼 그냥 $\dfrac{f(a)-f(-1)}{a+1}(x+1)+f(-1)$이죠? 기울기가 $\dfrac{f(a)-f(-1)}{a+1}$이고 $(-1,\ f(-1))$ 혹은 $(a,\ f(a))$을 지나는 직선이니까요.

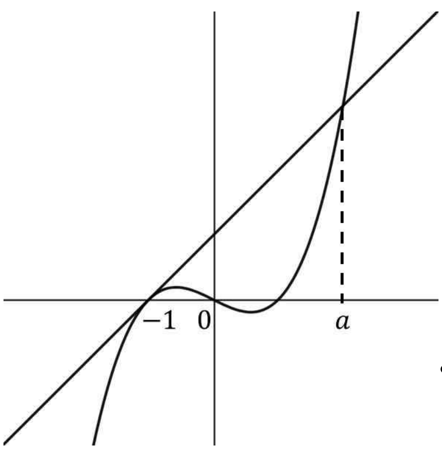
이때 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$가 있어요. $f(x-m)+n$은 $f(x)$는 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 움직인 함수네요.

2) 조건해석, 미분가능은 연속 확인+미분계수 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이때 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 일대일대응이랍니다.

일단 미분가능이라고 했으니까 $x=-1$에서 $f(x)$의 접선의 기울기와 $g(x)$의 기울기는 같아야 해요. 미분해보면 $3x^2-1$이니까 접선의 기울기는 2입니다.

그런데 그래프를 그려보세요. 기울기가 2이면서, $(-1,\ f(-1))$에서는 $f(x)$와 접하고, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선은?

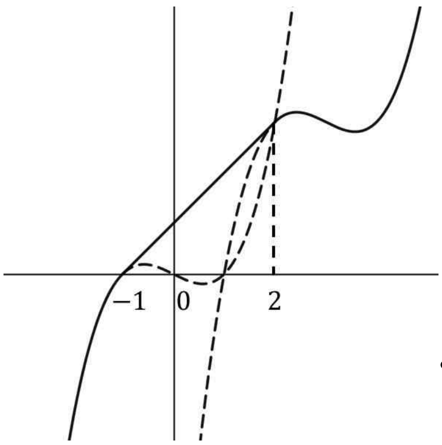


이런 모양이 되죠. $f(x)$는 홀수차항만 있는 기함수니까 변곡점이 $(0,\ 0)$이잖아요. 따라서 -1과 a의 $1:2$내분점은 0이 되어야 합니다. $\dfrac{a-2}{1+2}=0$이고 $a=2$입니다.

이때 $g(x)$는 직선이잖아요. 따라서 접선의 기울기는 계속 2에요. 다시 말해서 $x=a=2$에서도 접선의 기울기는 2여야 한다는 거죠. $f(x-m)+n$의 $x=a=2$에서의 접선의 기울기도 2여야 합니다.

그런데 아까 확인했듯이 $f(x-m)+n$는 $f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 움직인 함수에요. 그러면 접선의 기울기가 2가 되는 점도 그냥 단순히 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 변화합니다. $f(x)$의 접선의 기울기가 2가 되는 점은 $3x^2-1=2$해서 $x=1,\ -1$이잖아요? 그러면 $f(x-m)+n$의 접선의 기울기가 2가 되는 점은 $x=m+1,\ m-1$입니다.

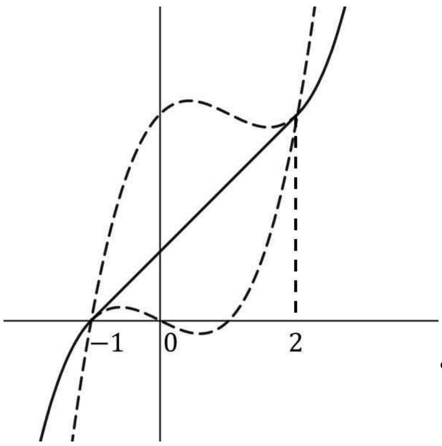
그러면 $a(=2)$의 값으로 뭘 선택해야 할까요? 우리는 그래프를 짤라야 하잖아요. 천천히 그래프를 그려보면 되죠. 만약 $x=m-1$을 선택하면



이렇게 되어야 합니다. 그런데 (나)조건에서 일대일 대응이어야 한다고 했었죠. 일대일 대응이 뭐였죠? 일대일 함수이어야 하고 공역과 치역이 같아야 하죠. 일대일 함수는 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이어야 한다는 거예요. 다시 말하면 x값이 다르면 y값도 달라야 한다는 거죠. x축에 평행하게 선을 그어서 두 점 이상 만나면 안 돼요. 반드시 한 점에서만 만나거나 아예 만나지 말아야 하는 거죠.

여기에 공역과 치역이 같아야 합니다. 공역은 아무 말이 없으면 y값 전체니까 치역도 y값 전체여야 합니다. 그러니까 정리하자면 x축에 평행하게 선을 그어서 반드시 한 점에서만 만나고, 모든 y값을 가져야 합니다. (x축에 평행하게 선을 그어서 아예 만나지 않는 건 안 돼요. 모든 y값을 가져야 하니까요.)

그런데 위의 그래프 확인해보세요. $x>2$에서는 두 개 이상의 점에서 만나는데요? 따라서 $x=m-1$는 선택할 수 없습니다. 따라서 $m+1=2$이어야 합니다. $m=1$이네요. 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 이러면 계속 증가하는 그래프니까 x축에 평행하게 선을 그어서 단 한 번만 만나고 모든 y값을 갖네요.

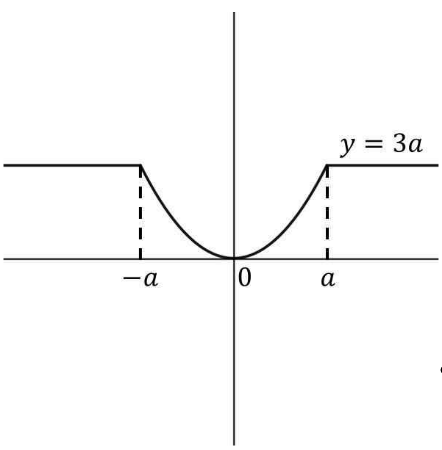
이제 n의 값을 구해봅시다. 그냥 단순히 $f(x-1)+n$가 $(2,\ f(2))$를 지나는 거예요. $f(2)=6$이니까 $f(1)+n=6$이어야 합니다. $f(1)=0$이므로 $n=6$이네요. 따라서 $m+n=7$입니다. 답은 ④번이네요.

30. 정답 290

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$a>0$인데 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$ 랍니다. 이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축, $x=-3,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하라고 하네요.

일단 그래프부터 그려볼까요?



이렇게 됩니다.

이제 $y=f(x)$의 그래프와 x축, $x=-3,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해야 해요. 그런데 3은 a보다

큰가요? 아니면 작나요? 모르죠? 그러면 케이스를 나눠봐야겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a<3$일 때

일단 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이에요. 그 말은 오른쪽만 넓이를 계산하고 그 넓이가 8의 절반인 4이면 되는 거죠. 그러면 넓이는 0부터 a까지 $\int_0^a \frac{3}{a}x^2 = \left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a = a^2$이고 a부터 3까지는 직사각형의 넓이를 구하는 거니까 가로 $3-a$, 세로 $3a$해서 $3a(3-a)=-3a^2+9a$입니다. 총 $-2a^2+9a$인데 이게 4니까 $-2a^2+9a=4$이고 $2a^2-9a+4=(2a-1)(a-4)=0$입니다. $a<3$이니까 $a=\frac{1}{2}$이네요.

2-2) $a\geq 3$일 때

이번엔 0부터 3까지 $\int_0^3 \frac{3}{a}x^2 = \left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3 = \frac{27}{a}$입니다. 이게 4니까 $\frac{27}{a}=4$이고 $a=\frac{27}{4}$이네요. $a\geq 3$이죠?

따라서 모든 a의 합은 $S=\frac{29}{4}$입니다. $40S=290$이네요.

31. 정답 56

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$가 일차함수인데 $g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$랍니다. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$이 됩니다. $x=2$도 넣어보면 $g(2)=0$이네요.

이후엔 미분해야겠죠? 미분하는 변수가 s니까 $(x-2)$는 밖으로 빼고 $g(x)=(x-2)\int_0^x f(s)ds$를 미분하면 $g'(x)=(x-2)f(x)+\int_0^x f(s)ds$입니다. $f(x)$가 일차함수니까 $g'(x)$는 이차함수겠네요. $g(x)$는 삼차함수겠죠?

이때 실수 t에 대하여 $(0,\ 0)$을 지나고 기울기가 t인 직선 $y=tx$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 한답니다. 이때 $g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이라네요.

일단 $g(k)=0$이 되는 k는 2개가 있죠? 0과 2가 있어요. 그러면 $h(t)$는 $t=0$, $t=-2$에서 불연속이 되겠어요.

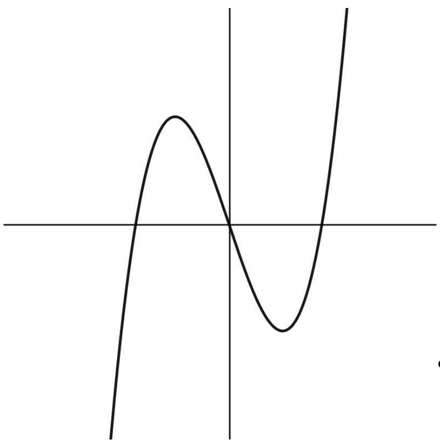
$h(t)$가 불연속이라는 건 어떤 의미일까요? $h(t)$는 $(0,\ 0)$을 지나고 기울기가 t인 직선 $y=tx$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수라고 했었어요. 그러면 기울기가 t에서 살짝만 바뀌어도 만나는 점의 개수가 변한다는 말이겠네요.

지금 $h(t)$는 $t=0$, $t=-2$에서 불연속이어야 하니까 기울기가 0일 때, -2일 때 각각 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변해야 합니다. 그러면 천천히 그래프를 그려서 확인해봅시다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

일단 $g(x)$는 $g(0)=g(2)=0$이에요. 그런데 $g(x)$는 삼차함수잖아요? 그러면 케이스가 두 가지가 있죠. x축과 세 점에서 만나거나 한 점에서 접하고 한 점에서 만나는 거예요.

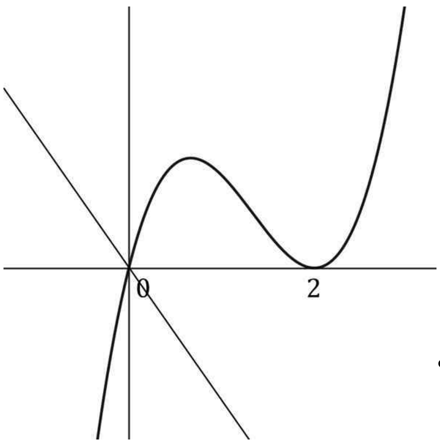
만약에 세 점에서 만난다고 해볼게요. 그냥 아무렇게나 그려보세요.



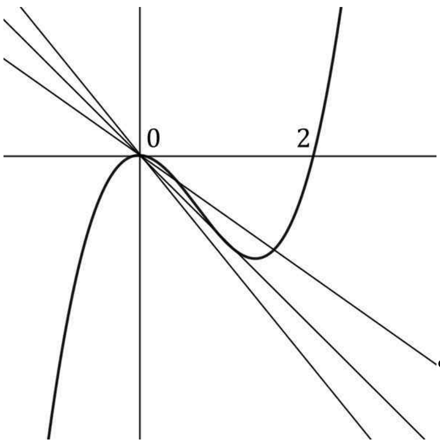
이렇게 됩니다. 이거 원점에서 기울기가 0인 직선 그어보세요. 기울기가 살짝 변하면 만나는 점의 개수가 변하나요? 변하지 않아요. x축과 세 점에서 만나게 그래프를 그리면 모두 안 됩니다.

결국 $x=0$, $x=2$ 둘 중에 하나에서 접하고, 나머지 하나에서 만나는 그래프가 되어야겠네요. 조심해야 할 건 $g(x)$의 최고차항의 계수를 알려주지 않았다는 거예요. 무의식적으로 최고차항의 계수가 양수인 경우만 하지 않도록 조심하세요!

일단 양수인 경우부터 가봅시다.



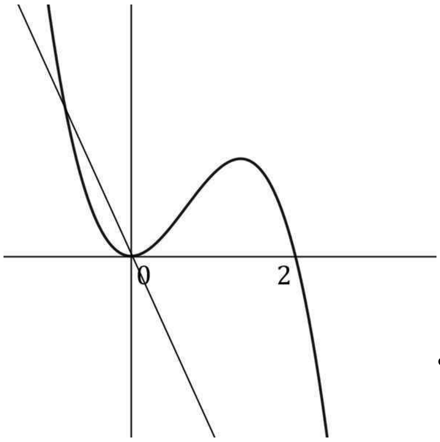
이렇게 그리면 기울기가 -2일 때 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변하나요? 변하지 않네요. 이건 안 됩니다.



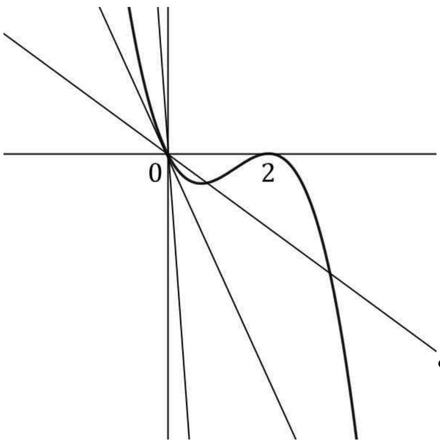
이렇게 그리면 가능합니다. 기울기가 -2인 직선이 접한다면 기울기가 살짝 작으면 1개, 접하면 2개, 살짝 커지면 3개의 점에서 만나니까 불연속이 되죠. 기울기가 0일 때에도 마찬가지입니다. 되네요!

그냥 아예 $g(4)$의 값을 구해버릴게요. 일단 최고차항의 계수를 k라 하면 $g(x)=kx^2(x-2)$이죠? 이 함수와 $-2x$가 $x=0$에서 그냥 만나고 한 점에서 접하니까 $kx^3-2kx^2=-2x$라 하면 $kx^3-2kx^2+2x=x(kx^2-2kx+2)=0$에서 $kx^2-2kx+2=0$은 중근을 가져야 합니다. 따라서 판별식이 0이어야 하므로 $k^2-2k=k(k-2)=0$입니다. k는 최고차항의 계수니까 0이 될 수 없으므로 $k=2$이네요. 따라서 $g(x)=2x^2(x-2)$이고 $g(4)=64$입니다.

계속 가봅시다. 이번엔 음수인 경우로 가볼게요.



이렇게 그리면 기울기가 -2일 때 기울기를 살짝 변화시켜도 만나는 점의 개수가 변하지 않습니다.



이렇게 $x=0$에서 접선의 기울기가 -2가 되도록 그리면 -2일 때 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변합니다. 기울기가 0일 때도 마찬가지이구요.

일단 최고차항의 계수를 k라 하면 $g(x)=kx(x-2)^2$입니다. $x=0$에서 접선의 기울기가 -2이어야 하니까 미분하고 집어 넣으면 $4k=-2$입니다. $k=-\dfrac{1}{2}$이네요. $g(x)=-\dfrac{1}{2}x(x-2)^2$이고 $g(4)=-8$입니다. 모든 값의 합은 $64-8=56$입니다.

32. 정답 ①

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수극한은 위아래 위아래 식 차수, 계수 비교

자연수 n이 있답니다. n에다 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

그리고는 다항함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=2$이라네요. 일단 x가 무한대로 가요. 그런데 아래 식의 차수는

2인데 극한값이 2로 존재하네요? 그러면 위 식의 차수 역시 2로 아래 식과 같아야 해요. 그런데 위 식은 $f(x)-x^3$입니다. 삼차식이 있으니까 없애줘야겠죠? 따라서 $f(x)=x^3+\cdots$입니다.

이러면 $f(x)-x^3$은 이차식이 되었어요. 그 다음에는 위와 아래의 계수를 비교해야겠죠? $\frac{\text{위 식의 최고차항의 계수}}{\text{아래 식의 최고차항의 계수}}$가 극한값인데 이게 2입니다. 이때 아래 식의 최고차항의 계수가 1이니까 위 식의 최고차항의 계수는 2여야겠죠? 따라서 $f(x)-x^3=2x^2+\cdots$이고 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$입니다.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수극한은 논리다, 함수 구하기 - 인수정리

이때 $g(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ \frac{1}{n} & (f(x)=0) \end{cases}$이라고 합니다. 얘가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다네요.

일단 해석부터 해볼게요. $f(x)$가 지금 분모에 있어요. 그래서 $f(x)\neq 0$이면, 즉 분모가 0이 아니라면 $g(x)=\frac{x-1}{f(x)}$입니다. 그리고 $f(x)=0$일 때는 $g(x)=\frac{1}{n}$이에요.

일단 $f(x)\neq 0$인 부분은 살펴볼 필요가 없어요. $f(x)$가 다항함수라 분모에 가 있어도 어차피 연속일 테니까요. 따라서 우리는 $f(x)=0$인 부분만 살펴보면 됩니다.

$f(x)=0$의 한 실근을 k라고 해볼게요. 지금 $g(x)$는 $f(x)=0$이 되는 경계에서 함수가 바뀌잖아요? 이런 함수가 연속이 되려면 $x=k$에서 좌극한 값과 우극한 값, 그리고 함숫값이 모두 같아야 합니다. 결국 $\lim_{x\to k}\frac{x-1}{f(x)}$과 $\frac{1}{n}$이 같아야 하겠네요. 이게 $f(x)=0$이 되는 모든 실근에 대해서 적용되어야 합니다.

만약 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 3개라고 해볼게요. 대충 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라고 해보죠. 그러면 $\lim_{x\to a}\frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\lim_{x\to b}\frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\lim_{x\to c}\frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 모두 $\frac{1}{n}$이어야 합니다.
그런데 a, b, c 중에 하나가 1이라고 하더라도 저 셋 중에 최소한 2개는 ∞ 혹은 $-\infty$가 되어야 하지 않나요? 분모가 0으로 가잖아요. 값이 $\frac{1}{n}$이 나올 수가 없어요. 서로 다른 두 개의 실근을 갖는데 하나는 중근인 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 같은 경우도 마찬가지입니다.

그런데 실근이 아예 없을 수는 없죠. 삼차함수는 x축과 한 번은 만나야 하니까요. 그렇다면 남은 건 실근이 하나이고 나머지는 허근인 경우겠네요.

그 실근을 k라고 하면 $\lim_{x \to k} \frac{x-1}{(x-k)(x^2+\alpha x+\beta)} = \frac{1}{n}$입니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재합니다.

따라서 분자도 0으로 가서 위아래를 같은 인수로 나눠줘야겠죠? 따라서 $k=1$입니다.

$f(x)=(x-1)(x^2+\alpha x+\beta)$이네요.

그런데 아까 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$라고 했었잖아요? $f(x)=(x-1)(x^2+\alpha x+\beta)$의 이차항의 계수가 2여야 하니까 $\alpha-1=2$이고 $\alpha=3$이네요. $f(x)=(x-1)(x^2+3x+\beta)$입니다.

아까 실근이 하나이고 나머지는 허근인 경우여야 한다고 했었죠? 따라서 $x^2+3x+\beta$는 허근을 가져야 합니다.

판별식이 0보다 작아야 하니까 $9-4\beta<0$이고 $\beta>\frac{9}{4}$이네요.

이제 실제로 극한값을 계산해볼까요? $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+3x+\beta)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2+3x+\beta} = \frac{1}{\beta+4} = \frac{1}{n}$이니까

$\beta+4=n$입니다. n은 자연수이죠? 그런데 $\beta>\frac{9}{4}$여야 하니까 $\beta+4=n>\frac{9}{4}+4$입니다. 따라서 최소의 n은 7이네요. 답은 ①번입니다.

33. 정답 ②

1) 등차수열 $a_n=a+(n-1)d$ (a는 첫항, d는 공차)로 놓기, 조건해석

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열이 있답니다. 구하라는 게 자연수 d이니까 d는 자연수여야 하네요.

그럼 바로 $a_n=-45+d(n-1)$(d는 자연수)라고 할게요.

이때 (가)조건에서 $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한답니다. 일단 지금 구조가 -45부터 시작해서 n이 증가할수록 점점 a_n의 값이 증가하는 형태잖아요? 그러면 언젠가는 양수가 되는 지점도 있겠죠. a_m과 a_{m+3}이 모두 양수라고 생각해보세요. 무조건 a_m은 a_{m+3}보다 작아요. 왜냐면 공차가 자연수라 n이 증가할수록 a_n의 값이 커지니까요. a_m과 a_{m+3}이 양수라면 $a_m=a_{m+3}$은 절대로 성립할 수 없어요. 이 둘이 모두 음수인 경우도 마찬가지죠.

따라서 a_m은 음수여야 하고 a_{m+3}은 양수여야 합니다. 따라서 $-a_m=a_{m+3}$이어야 하네요. 수를 넣어서

정리해보면 $45-d(m-1)=-45+d(m+2)$이고 $90=d(2m+1)$입니다. d는 자연수죠? m도 자연수이구요.
그러면 자연수×자연수가 90이 되려면 1×90, 2×45, 3×30, 5×18, 6×15, 9×10 중 하나여야 하겠네요.
그런데 $2m+1$은 3 이상의 홀수니까 가능한 경우는 d와 $2m+1$ 순서대로
(2, 45), (6, 15), (10, 9), (18, 5), (30, 3)만 가능하네요.

(나)조건에서 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이랍니다. 그러니까 $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 아무리 작아도 -100보다는 커야 한다는 거죠?

생각해봅시다. $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 가장 작아지는 부분이 어디일까요? 마지막으로 음수가 되고 다음 항은 양수로 바뀌는 부분에서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 가장 작아질 거예요. 음수를 더하면 가장 작아지는데 양수를 더하면 커지니까요. 그런데 아까 a_m이 음수이고 a_{m+3}이 양수라고 했었잖아요? 그러면 최소가 되는 부분은 m과 $m+2$ 사이에 있겠네요.

여기까지 생각하고 아까 구해놓은 케이스 별로 나눠서 해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) (2, 45)일 때

$d=2$이고 $m=22$이네요. 근데 이건 딱 봐도 아닐 것 같지 않나요? 시작이 -45인데 공차가 2면 a_3까지만 와도 더하면 벌써 값이 -100이 넘는데요?

2-2) (6, 15)일 때

$d=6$, $m=7$입니다. 이것도 뭔가... $a_1=-45$, $a_2=-39$, $a_3=-36$를 더하면 -100이 넘네요.

2-3) (10, 9)일 때

$d=10$, $m=4$입니다. 이건 확인해봐야겠네요. $a_1=-45$, $a_2=-35$, $a_3=-25$를 더하면 -100이 넘네요.

2-4) (18, 5)일 때

$d=18$, $m=2$입니다. 이건 되겠네요. $a_1=-45$, $a_2=-27$, $a_3=-9$, $a_4=9$이니까 아무리 작아도 -81이네요. 이건 됩니다! $d=18$ 하나 있네요.

2-5) (30, 3)일 때

$d=30$, $m=1$입니다. $a_1=-45$, $a_2=-15$, $a_3=15$이니까 아무리 작아도 -60이죠. 되네요. $d=30$도 됩니다.

따라서 모든 자연수 d의 합은 $18+30=48$입니다. 답은 ②번이네요.

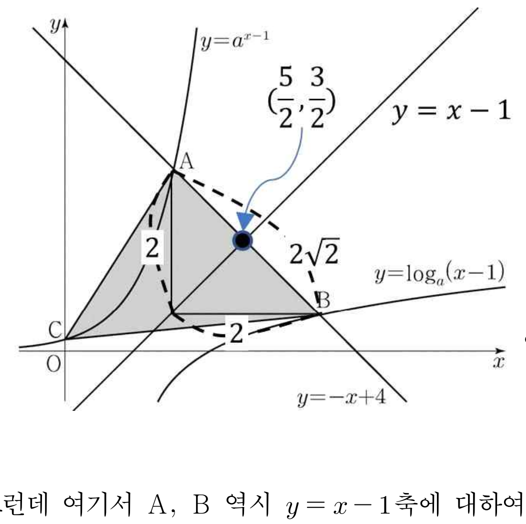
34. 정답 192

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$a>1$인데 $y=-x+4$가 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 각각 A, B라고 한답니다. 그림에 표시되어 있죠?

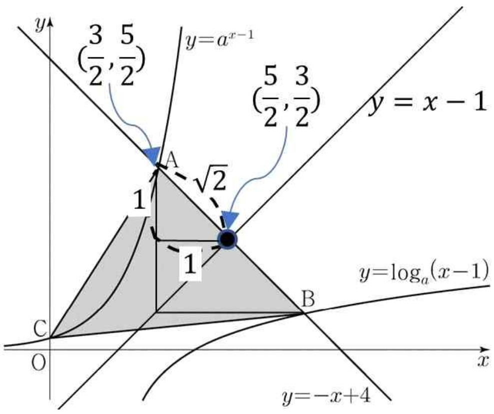
이거 함수를 보면 대칭 관계라는 걸 확인할 수 있네요. $y=a^x$와 $y=\log_a x$는 서로 $y=x$축 대칭 관계잖아요? 그런데 이 두 함수 모두 x 자리에 $x-1$이 들어가 있으니까 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$는 $y=x-1$축 대칭이죠. 그러면 $y=x-1$과 $y=-x+4$가 만나는 점은 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$겠네요.

거기에 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$랍니다. 지금 $y=-x+4$의 기울기는 -1이잖아요? 그러면



이렇게 되겠네요.

그런데 여기서 A, B 역시 $y=x-1$축에 대하여 대칭이니까 $y=x-1$, $y=-x+4$가 만나는 점과 A와의 거리는 $y=x-1$, $y=-x+4$가 만나는 점과 B와의 거리와 같죠. $\sqrt{2}$입니다. 그럼 이것도 마찬가지로



이렇게 됩니다. 따라서 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$입니다.

$y=a^{x-1}$이 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$를 지나니까 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$이고 $a=\frac{25}{4}$이네요.

이제 삼각형 ABC의 넓이를 구해야 해요. 이거는 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$를 고정시킨 후에 기울기가 1이고 점 C를 지나는 직선이 $y=-x+4$와 만나는 점과 C와의 거리를 높이로 해서 구하면 되겠죠?

일단 C의 좌표는 $y=\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$가 y축과 만나는 점이니까 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$입니다. 기울기가 1이고 점 C를 지나는 직선은 $y=x+\frac{4}{25}$이구요. $y=-x+4$와 만나는 점은$\left(\frac{48}{25},\ \frac{52}{25}\right)$입니다. $\left(\frac{48}{25},\ \frac{52}{25}\right)$과 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$의 거리는 $\frac{48\sqrt{2}}{25}$이죠. 아까 기울기가 1일 때는 x값(혹은 y값)의 차이에 $\sqrt{2}$를 곱했잖아요. 따라서

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}=S$입니다. $50S=192$이네요.

35. 정답 2

1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 원점을 지나고 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨답니다. 이거 어디서 많이 봤죠?

넘기면 $f(1-x)+f(1+x)=0$이 되고 2로 나누면 $\frac{f(1-x)+f(1+x)}{2}=0$가 됩니다. $1-x$와 $1+x$를 더하고 2로 나누면 1이 되죠. 이 형태는 결국 $f(x)$가 $(1,\ 0)$ 대칭이라는 말이 됩니다. 1에서 x만큼 떨어진 곳에서의 함숫값과 $-x$만큼 떨어진 곳에서의 함숫값의 부호가 항상 반대가 되어야 하고, 두 함숫값의 중점은 0이 되어야

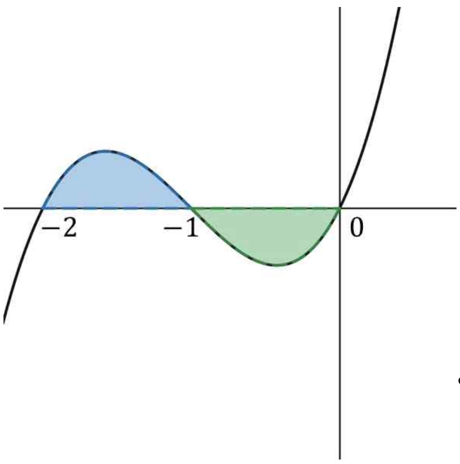
하니까 둘은 점 (1, 0)을 중심으로 대칭되는 형태가 되겠죠. $f(1)=0$이겠어요.

이때 $f(0)=0$이잖아요? (1, 0)대칭인데 (0, 0)을 지나면 당연히 (2, 0)도 지나야죠. 인수정리에 의해 $f(x)=x(x-1)(x-2)$입니다.

2) 정적분 관찰

$y=f(x)$와 $y=-6x^2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 일단 만나는 부분부터 찾아봐야겠어요.

$f(x)-(-6x^2)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$이니까 $x=0$, $x=-1$, $x=-2$에서 만나네요. 이거 근데 그래프 그려보면



이렇게 되네요. 이거 $(-1, 0)$대칭이죠? x축과 만나는 점간의 간격이 모두 같잖아요. 대칭이라는 거죠. 그러면 -2에서 -1, -1에서 0까지 각각 적분할 필요없이 -1에서 0까지만 적분하고 $\times 2$해버리면 되겠어요. 대칭이니까 적분값 역시 부호가 반대가 되겠죠. 따라서

$2\left|\int_{-1}^{0} f(x)+6x^2dx\right|=2\times\left|\left[\frac{x^4}{4}+x^3+x^2\right]_{-1}^{0}\right|=\frac{1}{2}$입니다. $4S=2$입니다.

36. 정답 ③

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰

$a>0$인데 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$이랍니다. 그림도 있네요.

이때 $y=f(x)$ 위를 지나는 세 점 O, A, B이 있는데 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라고 한답니다. ABC가 정삼각형일 때 ABC의 넓이를 구하랍니다.

일단 잘 생각을 해보죠. $-\frac{a}{2}< x < \frac{a}{2}$에서 $f(x)$는 원점대칭함수에요. 이 상황에서 원점을 지나는 직선이 $y=f(x)$와 점 A, B에서 만난다는 건 A, B의 중점은 원점이 된다는 말이겠죠. 원점을 지나는 직선 역시 원점대칭함수잖아요. 다시 표현하면 A, B의 x좌표는 부호가 반대입니다.

또한 C는 A에서 x축에 평행한 직선을 그어서 $y=f(x)$와 만나는 점이에요. $f(x)$는 주기가 있죠? a가 주기입니다. 그러면 A와 C의 x좌표의 차이는 a겠네요. 일단 정삼각형의 한 변의 길이는 나왔어요.

마지막으로 B와 C를 살펴봐야겠네요. A와 B가 점 (0, 0)에 대하여 대칭이었잖아요? 일단 A의 x좌표를 $-t$라 하면 B의 x좌표는 t입니다. 이때 삼각형 ABC는 정삼각형이니까 A와 B의 x값의 차이는 C와 B의 x값의 차이와 같아야겠죠? A와 C의 x값의 중점이 B의 x값이 될 테니까요. 정삼각형이잖아요. 따라서 C의 x좌표는 B의 x좌표인 t에 B의 x좌표와 A의 x좌표의 차이인 $2t$를 더한 $3t$가 되어야 합니다. 그런데 아까 A와 C의 x좌표의 차이는 a라고 했었죠? 따라서 $3t-(-t)=a$이고 $t=\frac{a}{4}$입니다.

$\mathrm{A}\left(-\frac{a}{4},\ \tan-\frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{a}{4},\ \tan\frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{3a}{4},\ \tan\frac{3\pi}{4}\right)$이네요.

아까 정삼각형 한 변의 길이는 a라고 했어요. 그러면 $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{a}$여야겠죠? 선분 AB도 정삼각형의 한 변이니까요. 그럼 이거는 점과 점 사이의 관계를 이용해야겠어요.

그런데 사실 이거는 굳이 그러지 않아도 돼요. 왜냐면 A, B는 원점 대칭이잖아요. $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{a}$는 사실상 $2\overline{\mathrm{OB}}=\mathrm{a}$와 같죠. $\tan\frac{\pi}{4}=1$이니까 피타고라스의 정리에 의하여 $\left(\frac{a}{4}\right)^2+1^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$입니다. $a^2=\frac{16}{3}$이네요.

이제 ABC의 넓이를 구해봅시다. 공식은 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이잖아요? 따라서 넓이는 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$입니다. 답은 ③번이네요.

37. 정답 ②

1) 그림 있으면 그림 보면서

원 C_1, C_2가 있는데 중심이 각각 O_1, O_2이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$이랍니다. 같은 원 두 개네요. 이때 원 C_1

위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 있어요. 그림에 보이죠? 그리고 A, O_1, O_2가 한 직선 위에 있고, C, O_2, D가 한 직선 위에 있답니다. 이것도 그림에서 확인할 수 있어요.

이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$라고 하자고 합니다. 이것도 보이네요.
$\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하려고 한답니다. 이제 과정을 볼게요.

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$라네요. 이건 따라올 수 있죠? 그림에서 180°를 두 개의 각으로 찢은 거잖아요. 그리고 $\angle O_1O_2D=\theta_3$이구요. $\angle CO_2O_1=\pi-\theta_3$이네요. 이때 삼각형 CO_2O_1는 이등변삼각형이죠? 두 변의 길이가 반지름의 길이니까요. 그러면 $\angle CO_2O_1=\pi-\theta_3=\angle O_2CO_1$겠네요. 삼각형의 세 각의 합은 π이니까 $\angle O_1O_2C=\pi-\theta_3=\angle O_2CO_1=\theta_3-\theta_2$입니다. 따라서 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이네요. 음... 굳이 알 필요는 없었을까요? 일단 좀 더 가봅시다.

$\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$와 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$를 정리하면 $2\theta_1+\theta_2=\pi$가 되죠? $\angle BO_1C=\theta_1$입니다. 이거는 180°를 세 각으로 찢은 거네요. θ_1, θ_2으로 찢으면 나머지 $\angle BO_1C$가 남죠. 그런데 $2\theta_1+\theta_2=\theta_1+\theta_1+\theta_2=\pi$이니까 $\angle BO_1C=\theta_1$가 되겠네요. 거기에 삼각형 BAO_1과 CBO_1도 합동입니다. 각이 θ_1로 같고 두 변의 길이가 반지름이잖아요. 요정도 확인해주자구요.

그리고 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$라고 합니다. 이거도 그림 보면 알 수 있죠? 그래서 삼각형 O_1O_2B와 O_2O_1D는 합동이랍니다. 일단 한 각이 θ_3로 같고, $\overline{O_1O_2}$라는 변을 공유하고, $\overline{BO_1}=\overline{O_2D}$이죠.

$\overline{AB}=k$라 할 때 $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$라네요. 일단 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이죠? 거기에 삼각형 O_1O_2B와 O_2O_1D는 합동이니까 $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$가 되네요. 이때 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$랍니다.

그림을 잘 보세요. 지름을 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형의 한 각은 90°잖아요? 그러면 삼각형 ABO_2에서 $\angle O_2BA=\dfrac{\pi}{2}$이네요. 이러면 피타고라스의 정리로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$를 구할 수 있죠?
$k^2+(2\sqrt{2}k)^2=9k^2$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}=f(k)=3k$입니다.

$\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$라네요. 일단 삼각형 BAO_1은 이등변삼각형이니까

$\angle \mathrm{O_1BA} = \dfrac{\pi - \theta_1}{2}$입니다. 그런데 $\angle \mathrm{O_2BA} = \dfrac{\pi}{2}$이니까 $\angle \mathrm{O_2BO_1} = \dfrac{\theta_1}{2}$입니다. 이때 삼각형 $\mathrm{BO_1O_2}$도

이등변삼각형이죠? 두 변의 길이가 반지름으로 같네요. 따라서 $\angle \mathrm{BO_2A} = \dfrac{\theta_1}{2}$가 됩니다. 아무튼

$\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{(\text{나})} = \dfrac{2\sqrt{2}k}{3k} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = p$입니다.

2) 삼각형은 정해져 있다 : 내부 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서 $\overline{\mathrm{BC}} = k$, $\overline{\mathrm{BO_2}} = 2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B} = \dfrac{\theta_1}{2}$이라네요. $\overline{\mathrm{BC}} = k$는 삼각형 $\mathrm{BAO_1}$과 $\mathrm{CBO_1}$가

합동인 거에서 나온 거겠네요. $\angle \mathrm{CO_2B} = \dfrac{\theta_1}{2}$는 $\angle \mathrm{CO_2O_1} = \theta_1$를 $\angle \mathrm{BO_2A} = \dfrac{\theta_1}{2}$로 쪼개고 남은 나머지네요.

그러므로 코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{(\text{다})}$이랍니다. “이므로”가 나왔으니까 알려준 거 써먹으란 얘기겠죠?

삼각형 $\mathrm{CO_2B}$에서 두 변의 길이 $\overline{\mathrm{BC}} = k$, $\overline{\mathrm{BO_2}} = 2\sqrt{2}k$와 한 각 $\angle \mathrm{CO_2B} = \dfrac{\theta_1}{2}$을 아니까 코사인법칙을

사용하면 $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{(2\sqrt{2}\mathrm{k})^2 + \overline{\mathrm{O_2C}}^2 - k^2}{2\times 2\sqrt{2}k \times \overline{\mathrm{O_2C}}}$ 입니다. 이거 정리하면 $(3\overline{\mathrm{O_2C}} - 7k)(\overline{\mathrm{O_2C}} - 3k) = 0$입니다.

이때 삼각형 $\mathrm{CO_2B}$의 빗변의 길이는 $2\sqrt{2}k$인데 이걸 초과할 수는 없으니까 $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{(\text{다})} = g(k) = \dfrac{7}{3}k$입니다.

이제 마지막 $f(p)\times g(p)$를 구해봅시다. $f(k) = 3k$, $g(k) = \dfrac{7}{3}k$, $p = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$입니다. 따라서 $\dfrac{56}{9}$이네요. 답은

②번입니다.

38. 정답 678

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$이 있는데 (가)조건에서 $|a_1| = 2$랍니다. 그리고 (나)조건에서 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이라네요. 이거 아까

$|a_1| = 2$랑 연결해서 n에다 숫자 넣어보면 $|a_2| = 4$, $|a_3| = 8$, $|a_4| = 16$, $\cdots$가 되는 것 아닌가요? 그러면

$|a_n| = 2^n$이네요?

(다)조건에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$랍니다. 어라...? 우리가 아는 건 절댓값밖에 없어요. 그런데 절댓값 풀고 다 더한 게 -14랍니다. 이때 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$를 구하랍니다. 음.... 굳이 홀수항만 더하라고 한 이유가 있을까요?

아무튼 일단 다 나열해볼게요.

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512	-1024

이렇게 됩니다. 위나 아래 둘 중 하나를 고르면 되는 거예요.

생각을 좀 해봅시다. 만약 $a_{10} = 1024$라면? 나머지가 다 $(-)$라고 하더라도 다 더하면 2가 됩니다. 이러면 안 되죠? 우리는 -14를 만들어야 해요. 따라서 $a_{10} = -1024$입니다.

또 생각을 해보죠. 만약 $a_9 = -512$라면? 그러면 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -1026이 됩니다. 그러면 -14를 만들 수 없어요. 따라서 $a_9 = 512$입니다.

계속 가볼까요? 만약 $a_8 = -256$이라면? 그러면 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -514가 됩니다. 이러면 또 -14를 만들 수 없죠? 따라서 $a_8 = 256$입니다.

$a_7 = -128$이라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -258이 됩니다. 안 되네요. 따라서 $a_7 = 128$입니다.

$a_6 = -64$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -130이 됩니다. 따라서 $a_6 = 64$입니다.
$a_5 = -32$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -66이 됩니다. 따라서 $a_5 = 32$입니다.
$a_4 = -16$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -34이 됩니다. 따라서 $a_4 = 16$입니다.
이제 여기서부터는 조심해야 해요. 왜냐면 지금까지 다 더하면 -16이거든요. 우리가 만들어야 하는 건 -14죠? $a_3 = -8$라면? 나머지가 다 $(+)$라고 하더라도 다 더하면 -18이 됩니다. 안 되네요. 따라서 $a_3 = 8$입니다.

여기까지 다 더하면 -8입니다. 이제 남은 건 2와 4에요. 이거는 그냥 $(-)$로 다 더하면 되지 않나요? 그럼 $-8-2-4=-14$가 나오죠. 따라서 $a_1 = -2$, $a_2 = -4$입니다.
$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = -2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 678$입니다.